MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TSI
2nde année

Classe préparatoire TSI2
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :

- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, projecteurs et symétries, sous-espaces stables,trace, transposée, polynômes de matrice ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 *et* 3 *et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.*

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Familles dénombrables de vecteurs	
Famille libre, famille génératrice, base.	Extension des résultats vus en première année sur les familles finies.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre.	Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.	Par définition, la somme F de p sous-espaces F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour $p \geqslant 3$, toute autre caractérisation est hors programme.
c) Projecteurs et symétries	
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Matrice dans une base adaptée. Caractérisation par les relations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$.	Détermination des éléments caractéristiques d'un projecteur, d'une symétrie.
d) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de sous-espace stable, et inversement. Exemples des projecteurs et des symétries.
e) Matrices	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité.	Notation $\mathrm{Tr}(A)$.
Relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	
Matrice symétrique, antisymétrique. Décomposition d'une matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.	Sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme de matrice.	C'est l'occasion de reprendre le travail fait en première année sur l'exploitation d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice.

Déterminants

Cette section développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; (iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les colonnes. Déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	Démonstration hors programme.
Déterminant de l'inverse d'une matrice carrée.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

Réduction des endomorphismes

Cette section étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres et la notion de polynôme caractéristique, on s'intéresse à la question de la diagonalisabilité, puis de la trigonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.
Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme ou de matrice est hors programme.
Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres et polynôme caractéristique	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme.	Interprétation en termes de droite stable.
Spectre.	Notation Sp.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.	Le polynôme caractéristique, défini par la fonction polynomiale $$x \mapsto \chi_f(x) = \det(x\mathrm{id}_E - f),$$ est de coefficient dominant égal à 1.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	
Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres, spectre d'une matrice carrée.	Extension des définitions et de ces résultats aux matrices. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base donnée.
Lien entre racines d'un polynôme annulateur d'une matrice et son spectre.	Cas d'un projecteur ou d'une symétrie. Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.
b) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Extension des résultats précédents au cas des matrices carrées.
c) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Démonstration hors programme. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.
En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.	
Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres.	Extension des résultats au cas des matrices carrées.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Applications de la réduction	
Si A et B sont semblables, alors il en est de même de leurs puissances. Formule $A^n = PB^nP^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et et $A = PBP^{-1}$. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	Les étudiants peuvent utiliser librement l'expression de D^n pour D diagonale. Application aux récurrences vectorielles d'ordre 1 de la forme $X_{n+1} = AX_n$. Les étudiants peuvent utiliser librement la relation $X_n = A^nX_0$.
Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Base de solutions.	On se limite au cas homogène. Les étudiants doivent connaître la forme des solutions, à l'aide de la résolution de l'équation caractéristique.

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Cette section fournit l'occasion de revoir une partie des notions abordées dans le cours d'analyse de première année. L'étude des fonctions vectorielles en dimension inférieure ou égale à trois permet de présenter des résultats utiles dans les autres disciplines scientifiques et introduit le paragraphe sur les courbes paramétrées. Dans ce cadre, le but est de tracer des courbes sans support logiciel quand les calculs se prêtent à un tracé rapide. Pour les calculs plus longs, on utilise un outil informatique qui permet en plus de mettre en évidence des problèmes d'échelle et de restriction d'intervalle. L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Continuité et dérivabilité (éventuellement à gauche ou à droite) en un point ou sur un intervalle.	Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées. Les étudiants doivent savoir interpréter géométriquement et cinématiquement la notion de dérivée en un point.
Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles. Applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I. Espace vectoriel $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$. Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (éventuellement orienté), dérivation d'un produit scalaire, d'une norme, d'un déterminant et d'un produit vectoriel.	
b) Courbes paramétrées	
Rappels sur les graphes de fonctions réelles d'une variable réelle, tangente à un tel graphe.	
Courbe paramétrée. Tangente en un point.	La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.
Exemples de constructions d'arcs plans.	Les étudiants doivent savoir exploiter les propriétés des fonctions (parité, périodicité) afin de restreindre l'ensemble d'étude. Hormis les cas d'asymptotes verticales et horizontales, l'étude du comportement asymptotique d'une courbe paramétrée est hors programme.
Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul. Cas particulier d'un point régulier. Point stationnaire.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme. Interprétation cinématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente. Point régulier, d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser les développements limités de chacune des composantes.
Longueur d'un arc paramétré régulier de classe $\mathscr{C}^1$.	L'abscisse curviligne est hors programme.

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est double :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.*

L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	
Pour f continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est positive sur $[a, +\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée. Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.	
b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\displaystyle\int_a^b f, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$. Nature et valeur de $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α.	Les intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ ne font pas partie des intégrales de référence.
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ avec $a = \lim\limits_{u\to\alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{u\to\beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
c) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle	
Intégrale absolument convergente.	
La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une fonction f est dite intégrable sur I si elle est continue sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ converge absolument ».
Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t)\mathrm{d}t$.	
Si f est continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $$\left\|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_I \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I. Si f est une fonction continue et positive sur I et telle que $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.	
Pour f et g fonctions continues sur $[a,+\infty[$: – si $\|f\| \leqslant \|g\|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ est équivalente à celle de g.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$.

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries entières et des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.
L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série à termes réels ou complexes ; sommes partielles. Convergence ou divergence et, en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	De plus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs sous l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ou $u_n = o(v_n)$.	
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.	Toute autre règle de comparaison est hors programme.
Théorème de comparaison série-intégrale : si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Exemples simples d'encadrements et d'application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.
Séries de Riemann.	Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible.
Pour une série absolument convergente $\sum u_n$, $$\left\vert\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\vert \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \vert u_n\vert.$$	
Séries alternées	
Théorème des séries alternées : si la suite réelle (u_n) converge en décroissant vers 0, alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Encadrement de la somme.

Séries entières

Les séries entières considérées sont à coefficients réels ou complexes. La variable est réelle ou complexe. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence d'une série entière	
Série entière d'une variable réelle ou complexe.	
Lemme d'Abel : étant donné un nombre réel $r > 0$, tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $\vert z\vert < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence défini comme borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.	Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, alors pour $\vert z\vert < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $\vert z\vert > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.	Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.
Si $\vert a_n\vert \leqslant \vert b_n\vert$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.	
Si $\vert a_n\vert \sim \vert b_n\vert$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à celui de $\sum b_n z^n$.	
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	Démonstration hors programme.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction somme d'une série entière, domaine de définition.	
La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.	Démonstration hors programme.
Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.	
Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.

c) Fonctions développables en série entière

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction développable en série entière au voisinage de 0.	Lien avec la série de Taylor.
Unicité du développement en série entière.	
Développements en série entière usuels : $$\frac{1}{1-x},\quad \ln(1+x),\quad \mathrm{e}^x,\quad \cos(x),\quad \sin(x),\quad (1+x)^\alpha.$$	Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière.

d) Exponentielle complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Développement en série entière admis : $$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$	En première année, l'exponentielle complexe est définie par la relation $$\mathrm{e}^{x+iy}=\mathrm{e}^x(\cos(y)+i\sin(y))$$ où x et y sont deux réels quelconques.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- *introduire les notions fondamentales liées à la structure préhilbertienne ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

A - Structure préhilbertienne

a) Produit scalaire et norme

Contenus	Capacités & commentaires
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x\cdot y$.
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	
Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Exemples de produits scalaires sur des espaces de fonctions ou de polynômes.
Norme associée à un produit scalaire, distance associée.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	
Identité du parallélogramme, identité de polarisation.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F. Théorème de Pythagore. Famille orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	Notation $F^{\perp}$.
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs.
Existence de bases orthonormées en dimension finie. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée ; expression du produit scalaire et de la norme.	
c) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Pour étudier la notion de projection orthogonale et la distance à un sous-espace, on s'appuie sur des figures.	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.	Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\\|x - y\\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x, F)$.

B - Isométries d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée .	
Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Réflexion.	On s'appuie sur des figures.
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie ici les propriétés conférant à $\mathrm{O}(E)$ une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal est stable par cette isométrie.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par l'égalité $A^{\top}A = I_n$.	Traduction sur les colonnes ou les lignes de A.
Groupe orthogonal d'ordre n. Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E, une base $\mathscr{B}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ est orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.	Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormée directe.
Isométrie vectorielle directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.

c) Classification en dimensions 2 et 3

Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3. Caractérisation des symétries orthogonales par leurs représentations matricielles.	Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries. Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.

d) Matrices symétriques réelles

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.	Démonstration non exigible.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$.	Démonstration hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T-périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette section développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. L'interprétation géométrique de la n-ième somme de Fourier comme projection orthogonale relie les points de vue analytique et géométrique de la théorie. Cette section est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Fonctions définies par morceaux

Une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$ à est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.	
Une fonction à valeurs réelles T-périodique est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période.	Interprétation graphique.
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, T-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$).	
Intégrale sur une période d'une fonction T-périodique et continue par morceaux.	Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.

b) Coefficients et séries de Fourier

Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction continue par morceaux T-périodique.	Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k. Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas des fonctions paires, impaires.	
Série de Fourier d'une fonction f continue par morceaux T-périodique. Sommes partielles : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$	Dans le cas des fonctions continues, interprétation géométrique de $S_n(f)$ comme la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(k\omega t)$ et $t \mapsto \sin(k\omega t)$ ($k \in [\![0, n]\!]$) pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
c) Théorèmes de convergence	
Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et : $$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$	Démonstration hors programme. Interprétation géométrique du théorème de Parseval dans le cas des fonctions continues. Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.
Théorème de Dirichlet : si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et $$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h) + f(t-h)\big)$$	Démonstration hors programme. On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h)+f(t-h)\big)$.
Cas où f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.	Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Probabilités

A - Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

Cette sous-section a pour objectifs de consolider les acquis de première année sur les variables aléatoires réelles finies et d'étendre les résultats au cas de n variables aléatoires. Dans ce cadre, l'accent est mis sur les couples. Les vecteurs aléatoires ne sont introduits que dans le but d'interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes. La notion d'espace probabilisé produit n'est pas au programme. L'univers est supposé fini.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Couple de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires. Loi du couple ou loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	
b) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes : pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si X et Y sont indépendantes, pour tout $(A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P\big((X,Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi. Variables aléatoires indépendantes : si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, alors $$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$	Démonstration hors programme.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Démonstration hors programme.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Les étudiants doivent savoir interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes.
c) Covariance	
Covariance d'un couple de variables aléatoires. Variance de $aX + bY$.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0;$$ $$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y).$$	Les réciproques sont fausses en général.

B - Probabilités sur un univers dénombrable

On aborde dans cette sous-section l'étude des probabilités sur un univers dénombrable afin de modéliser les processus stochastiques à temps discret. Les résultats démontrés en première année dans le cadre d'un univers fini sont étendus sans démonstration. La construction d'espaces probabilisés modélisant notamment une suite d'expériences aléatoires indépendantes est hors de portée à ce niveau. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. La notion de tribu est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$. On signale que les intervalles ne sont pas dénombrables. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
Expérience aléatoire, événements. Suite infinie d'événements ; union et intersection. Système complet d'événements.	Extension des définitions vues en première année. Les étudiants doivent faire le lien entre point de vue probabiliste et point de vue ensembliste.

Contenus	Capacités & Commentaires
On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega)=1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles : $$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

b) Indépendance et conditionnement

Si A et B sont deux événements tels que $P(B)>0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$	L'application P_B est une probabilité.
Formule des probabilités composées.	Brève extension des résultats vus dans le cadre d'un univers fini.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et, $$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)\,P(A_n).$$	La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)=1$.
Formule de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A)>0$, $P(B)>0$, alors, $$P_B(A)=\frac{P_A(B)\,P(A)}{P(B)}.$$	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A)=P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n\geqslant 3$.

C - Variables aléatoires discrètes

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite en pratique aux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variable aléatoire réelle	
Une variable aléatoire réelle X est une application définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.	
Loi de probabilité.	Notation P_X.
L'application P_X est définie par la donnée des $P(X=x)$ pour x dans $X(\Omega)$.	
Lien entre $P(X\leqslant x)$, $P(X\leqslant x-1)$ et $P(X=x)$ pour une variable aléatoire réelle discrète à valeurs entières.	
Image d'une variable aléatoire par une application.	Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Espérance	
La variable aléatoire réelle X est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration hors programme.
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir calculer une espérance en appliquant le théorème du transfert.
c) Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Lorsque X^2 est d'espérance finie, alors $(X - \mathrm{E}(X))^2$ est d'espérance finie et on appelle variance de X le réel $\mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$.	Notation $\mathrm{V}(X)$.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ (Koenig-Huygens).	
Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.	
Écart type d'une variable aléatoire.	
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$ pour a et b réels.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov n'est pas au programme.
d) Lois usuelles	
Pour $p \in\,]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Les étudiants doivent savoir reconnaître des situations modélisables par une loi géométrique. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On remarquera que cette interprétation requiert l'existence d'une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes, donc un univers non dénombrable. Elle est donnée à titre heuristique.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, loi de Poisson de paramètre λ : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Illustration numérique de l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson pour certains paramètres (loi des événements rares).
Espérance et variance d'une loi géométrique, d'une loi de Poisson.	

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles est limitée au cas linéaire en raison de son importance dans d'autres champs disciplinaires.
Cette section donne l'occasion de faire le lien avec les résultats de première année dans le cas des coefficients constants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles linéaires d'ordre 1	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(t)y = b(t),$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I.	Équation homogène associée.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.	Détermination des solutions.
Principe de superposition.	
Structure de l'ensemble des solutions.	Plan de résolution.
Méthode de variation de la constante.	Le raccordement de solutions est hors programme.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.	Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.
b) Équations différentielles d'ordre 2	
Équation différentielle linéaire du second ordre $$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$ où a, b, c sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I.	Équation homogène associée.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	Le raccordement de solutions est hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Recherche de solutions particulières polynomiales ou développables en série entière.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Démonstration hors programme.
Résolution complète par abaissement de l'ordre dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.	On donne toute indication utile.
Exemples de résolution d'équations différentielles par changement de variable.	On donne toute indication utile.
c) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice carrée réelle ou complexe à coefficients constants.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Pratique guidée de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.	
Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.	Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude des fonctions de plusieurs variables se veut résolument pratique : présentation de recherche d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles simples, application à l'étude de certaines courbes et surfaces.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$)	
Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.	Tout développement sur les normes non euclidiennes est hors programme.
Boule ouverte, boule fermée. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Partie ouverte, partie fermée.	
Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Intérieur, frontière (ou bord) d'une partie de $\mathbb{R}^n$.	Chaque définition est assortie d'une figure. Les caractérisations séquentielles sont hors programme.
b) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations. Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.	L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
c) Dérivées partielles	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. La notion de différentielle en un point est hors programme.
Gradient.	Notation ∇f.
Point critique. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert. Opérations.	
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Existence admise.
Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.	
Dérivées partielles de $(u, v) \mapsto h(f(u, v), g(u, v))$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables.
Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_1 \partial_2 f$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Opérations.	
Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.
d) Équations aux dérivées partielles	
Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables suggéré dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
e) Extremums d'une fonction de deux variables	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.	

f) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier.	Cas particulier des courbes d'équation $y=g(x)$.
Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant par le point. En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	En admettant l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$, lien avec la tangente à un arc paramétré. Démonstration hors programme.
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point. Position relative locale entre une surface d'équation $z=g(x,y)$ et son plan tangent.	Cas particulier des surfaces d'équation $z=g(x,y)$.