Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et technologie (PT)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PT
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne d'une part, en analyse (calcul différentiel) d'autre part ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines. Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant en dimension quelconque et aboutit à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième, après quelques généralités sur les espaces préhilbertiens et le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, étudie les isométries vectorielles d'un espace euclidien avec un accent sur les dimensions 2 et 3. Le théorème spectral est étudié du point de vue matriciel.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant une étude aussi bien affine que métrique des arcs paramétrés. L'étude des enveloppes insiste sur la vision géométrique et conduit à celle de la développée d'une courbe régulière.
La section relative aux séries numériques met l'accent sur la convergence absolue et limite l'étude des séries semi-convergentes au cas des séries alternées. Il constitue une introduction à l'étude des séries entières qui sont utilisées pour développer une fonction en série, calculer la somme de certaines séries numériques, trouver des solutions d'une équation différentielle, ou encore définir les séries génératrices en probabilités.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.
Le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonction et l'étude de la régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction a minima de la dénombrabilité en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste. La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations différentielles est limitée au cas des équations linéaires d'ordre 2, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. On indique quelques exemples de résolution : solutions développables en série entière, résolution à partir d'une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.

La section sur les fonctions de deux ou trois variables vise à mettre en place des outils pour l'analyse et la géométrie et prévoit une étude à l'ordre deux des extremums des fonctions de deux variables. La section sur les courbes et les surfaces exploite, d'une part, les fonctions de deux ou trois variables (courbes du plan définies par une équation cartésienne, surfaces paramétrées ou définies par une équation cartésienne, courbes sur une surface), d'autre part, la géométrie euclidienne du plan et les matrices symétriques d'ordre 2 (étude des coniques).

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes); à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes. En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année;*
- *introduire de nouveaux concepts : produit et somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace, hyperplans;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Somme directe.	Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour la somme de plus de trois sous-espaces, toute autre caractérisation est hors programme.
En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Dimension d'une somme directe.	
b) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de stabilité d'un sous-espace et, inversement, traduire cette stabilité sous forme matricielle.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.	
Deux matrices semblables ont même trace.	
Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	
d) Hyperplans en dimension finie	
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, défini comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire.	
Équations d'un hyperplan.	
Si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel. Interprétation géométrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

B - Déterminants

Le déterminant est présenté dans sa version matricielle. L'interprétation géométrique en termes d'aire et de volume algébrique est faite via le produit mixte défini en première année. Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd. Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : *i.* det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; *ii.* det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; *iii.* $\det(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2,3\}$, on fait le lien avec le produit mixte de deux ou trois vecteurs.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si la famille de ses colonnes est liée.
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	La démonstration est hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée.	La démonstration est hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	La démonstration n'est pas exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

C - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.	Équation aux éléments propres $f(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$. Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
b) Polynôme caractéristique	
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(x\,I_n - A)$ est polynomiale, unitaire, de degré n.	La démonstration n'est pas exigible pour $n \geqslant 4$.
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Notations χ_A, χ_f.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
c) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Cas où χ_f est scindé à racines simples. Traduction matricielle des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.
d) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	La démonstration est hors programme. Traduction matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme. Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

A - Structure préhilbertienne

En première année, la notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue géométrique en dimensions 2 et 3. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en petite dimension pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$. Expression $X^\top Y$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité en dimension quelconque	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'un sous espace vectoriel. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^\perp$.
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.

Contenus	Capacités & Commentaires
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$. Application à la recherche du minimum.

B - Isométries d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les décrire en dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Exemples : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle directe, isométrie vectorielle indirecte.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.
c) Isométries vectorielles en dimension 2	
Orientation d'un plan euclidien de dimension 2. Base directe, base indirecte. Description des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
d) Isométries vectorielles en dimension 3	
Orientation d'un espace euclidien de dimension 3. Base directe, base indirecte. Orientation d'une droite, d'un plan d'un espace orienté. Rotation vectorielle d'axe orienté et d'angle donnés. Réflexion vectorielle. Matrices dans une base adaptée.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Réduction en base orthonormée d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et l'angle de la rotation.
e) Matrices symétriques réelles	
Matrice symétrique réelle.	Notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$).	A est dite orthogonalement diagonalisable. La démonstration est hors programme.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

La section sur les fonctions vectorielles trouve une illustration naturelle dans l'étude des courbes paramétrées.
Il convient de formaliser des notions géométriques (courbe paramétrée, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.
Sur des exemples, l'étude d'une courbe paramétrée peut être amenée par la détermination d'un lieu géométrique.
La longueur d'une courbe paramétrée est définie par la formule intégrale et tout développement théorique est hors programme. On peut cependant présenter la définition géométrique à l'aide de figures.
Dans l'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée, les problèmes de régularité que l'on peut rencontrer dans les calculs n'ont pas à être soulevés et ils n'ont pas l'importance de l'interprétation géométrique que l'on peut obtenir.
L'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée et celle de l'enveloppe d'une famille de droites privilégient la vision géométrique plutôt que le recours à l'application de formules.
L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3)	
Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Vecteur dérivé en un point.	Caractérisation par les fonctions coordonnées. Interprétation cinématique.
Fonction dérivée. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un produit.	La dérivée du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle, au produit scalaire de deux fonctions vectorielles et au produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz).	La formule du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle.
Formule de Taylor-Young.	La démonstration est hors programme.
Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage d'un point.	Les calculs sont faits à l'aide des fonctions coordonnées.
b) Courbes paramétrées du plan et de l'espace	
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.	Notation $t \mapsto M(t)$.
Tangente en un point $M(t_0)$.	Sous réserve d'existence, la tangente est dirigée par $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{v}(t)$ avec $\overrightarrow{v}(t)$ un vecteur unitaire dirigeant la corde $[M(t_0)M(t)]$.
Point régulier, courbe régulière.	
Vecteur tangent en un point régulier.	Détermination d'une équation ou d'un paramétrage de la tangente.

Contenus	Capacités & Commentaires
Orientation d'une courbe.	L'orientation d'une courbe régulière peut se faire par le choix d'un vecteur unitaire dirigeant la tangente ou par celui d'un sens de parcours de la courbe.
c) Étude des courbes paramétrées du plan	
Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative. Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour les études locales.
Branches infinies.	Asymptotes, branches paraboliques. Les étudiants doivent savoir utiliser des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.
Support d'une courbe paramétrée.	Construction à partir de tableaux de variations.
d) Propriétés métriques d'une courbe plane	
Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Abscisse curviligne, paramétrage par une abscisse curviligne pour une courbe régulière. Repère de Frenet $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, normale.	Définition par la formule intégrale.
Courbure en un point régulier, formules de Frenet.	La courbure est définie par $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$. Interprétation géométrique du signe de la courbure. La formule donnant la courbure à partir du déterminant de la vitesse et de l'accélération est hors programme.
Expression $\overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$.	Les problèmes liés à la régularité de α ne sont pas un attendu du programme.
Expression de la courbure $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.	On interprète géométriquement la valeur de $\lvert\gamma\rvert$ sans démonstration formelle.
Point birégulier d'une courbe de classe $\mathscr{C}^2$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure. Développée d'une courbe birégulière : ensemble des centres de courbure.	On interprète géométriquement le rayon et le cercle de courbure sans démonstration formelle.
e) Enveloppe d'une famille de droites	
Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique $t \mapsto A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ où A et $\overrightarrow{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\overrightarrow{u}(t)$. Caractérisation de la développée comme enveloppe des normales.	L'objectif est de privilégier une vision géométrique de la notion d'enveloppe et du procédé permettant de l'obtenir.

Séries numériques

Cette partie étend l'étude des séries à termes positifs vue en première année à celle des séries à termes réels et complexes. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à termes réels	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Théorème des séries alternées : si la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Encadrement de la somme.
b) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Somme d'une série absolument convergente.
Pour (u_n) et (v_n) deux suites complexes : – si $\lvert u_n\rvert \leqslant \lvert v_n\rvert$ à partir d'un certain rang, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$; – si $u_n = O(v_n)$, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$; – si $u_n \sim v_n$, la convergence absolue de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$.	Le résultat s'applique en particulier lorsque $u_n = o(v_n)$.
Règle de d'Alembert.	
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier la régularité de la somme dans le cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série entière de variable réelle, de variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme la borne supérieure dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Disque ouvert de convergence.	
Intervalle ouvert de convergence.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $\|a_n\| \leqslant \|b_n\|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	

b) Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière.	
Théorème de continuité : la fonction somme est continue sur son intervalle de définition.	La démonstration est hors programme. Cet énoncé contient le théorème d'Abel radial, qu'il est inutile de formaliser auprès des étudiants. En dehors de ce cadre, les études au bord de l'intervalle ouvert de convergence ne sont pas un attendu du programme.
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme. Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	La démonstration est hors programme.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0.	
Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle qui n'est pas un segment;*
- *énoncer dans un cadre plus général que celui des séries entières, un théorème d'intégration terme à terme;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si $\int_a^x f$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variable usuels.
c) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente.	
Une fonction f est dite intégrable sur I si elle est continue sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b (resp. en a) si $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$).

Contenus	Capacités & Commentaires
La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La démonstration n'est pas exigible pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, positive et intégrable sur I, et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Pour f et g fonctions continues sur $[a,+\infty[$: – si $\|f\| \leqslant \|g\|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g en $+\infty$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$;	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0^+ peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\|x-a\|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

d) Intégration terme à terme

Soit $S\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ intégrables telles que : $\forall t \in I,\ S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. Si la série $\displaystyle\sum \int_I \|f_n(t)\|\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors S est intégrable sur I et : $$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.

e) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par rapport à t.

Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x \in A, \quad g'(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilités, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes, la notion de variable à densité est hors programme.

En première année, les étudiants se sont familiarisés avec les sommes finies, en particulier les sommes doubles. Dans le cadre du programme, la définition de l'espérance et le théorème de transfert font appel à la convergence absolue de familles décrites en extension.

Dans la pratique, lorsque $X(\Omega)$ n'est pas présenté sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on utilise les résultats suivants démontrés dans le cas fini :

- *on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente est indépendante de l'ordre de sommation et d'un choix de regroupement de termes par paquets ;*
- *on étend les définitions et propositions du programme dans le cas où les sommes mises en jeu sont indexées sur un produit, sans soulever de difficulté. Le théorème de Fubini est admis.*

L'usage de ces résultats est strictement réservé au contexte probabiliste et la notion de famille sommable est hors programme.

A - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble fini ou dénombrable est dit au plus dénombrable.	Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables. Un ensemble est au plus dénombrable s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i,\ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et les x_i distincts.
Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
c) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
d) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_n$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$. On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	
e) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Contenus	Capacités & Commentaires
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation de la loi de Poisson comme la loi des événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Événements indépendants

Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

g) Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une telle suite. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires

a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

Variable aléatoire X à valeurs réelles d'espérance finie, espérance de X.	La variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n \| n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est l'espérance de X. Variable aléatoire centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité : $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n \| n \in \mathbb{N}\}$ et si f est définie sur cet ensemble et à valeurs réelles, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.	La démonstration est hors programme. On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.

Contenus	Capacités & Commentaires
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance.	La démonstration est hors programme.
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	La démonstration est hors programme.
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	La démonstration est hors programme. Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, XY aussi et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable aléatoire réduite. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux décorrélées.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=\mathrm{E}\left(t^X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)=G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$ où $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration. Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma=\sigma(X_1)$: $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Équations différentielles et calcul différentiel

A - Équations différentielles scalaires d'ordre 2

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres 1 et 2, abordée en première année, se poursuit par celle des équations scalaires à coefficients non constants d'ordre 2. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :
- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *la résolution explicite.*

Cette section favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensemble des solutions	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Équation différentielle homogène associée.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration est hors programme.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition des solutions.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
b) Exemples de résolutions	
Exemples de recherches de solutions développables en série entière.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.
Résolution dans le cas où on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.	

B - Fonctions de deux ou trois variables

Cette section est consacrée aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ pour $p = 2$ ou 3, sauf dans le paragraphe (g). Leur étude est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie.
La notion de différentielle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Topologie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	
Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.	Interprétation de la norme en termes de distance.
Boule ouverte, boule fermée.	
Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées.	Toutes les définitions sont illustrées par des figures.
Point intérieur, point adhérent à une partie.	
b) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent.	
Continuité en un point. Continuité sur une partie.	La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme. Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Opérations sur les fonctions continues.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

c) Dérivées partielles d'ordre 1

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par l'existence et la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Les démonstrations sont hors programme.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	La démonstration est hors programme.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation ∇f.

d) Dérivées partielles et composées

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(a), u\rangle$.
Règle de la chaîne : dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.	Interprétation comme dérivée le long d'une courbe γ donnée par $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_p(t))$ et expression à l'aide du gradient : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	

e) Dérivées partielles d'ordre 2

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme. Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordres.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Contenus	Capacités & Commentaires
Point critique d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Extremum local, extremum global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$.	La démonstration est hors programme.
Nature d'un point critique.	Classification à l'aide du déterminant et de la trace de la matrice hessienne. Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

g) Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$)

Contenus	Capacités & Commentaires
Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	Expression coordonnée par coordonnée.

Courbes et surfaces

En application directe de la section sur les fonctions de deux ou trois variables, on présente la définition des courbes de $\mathbb{R}^2$ et surfaces de $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne. Le passage (dans les deux sens) d'une équation cartésienne à un paramétrage peut être étudié sur des exemples, mais le cas général est hors programme.

A - Courbes implicites du plan

Les coniques sont définies à partir de foyer, excentricité et directrice, puis ramenées à leurs équations cartésiennes réduites (le théorème spectral pour les matrices symétriques est exploité pour obtenir une équation réduite à partir d'une équation générale). D'autres définitions géométriques (bifocale, par foyer et cercle directeur, comme sections planes de cônes de révolution...) peuvent être présentées, mais aucune connaissance n'est attendue des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Courbes du plan définies par une équation cartésienne	
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
b) Coniques	
Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité. Classification des coniques en fonction de l'excentricité, à partir d'une équation réduite.	Obtention d'une équation cartésienne réduite à partir de la définition géométrique. Les formules de calcul des éléments géométriques ne sont pas exigibles des étudiants et doivent être fournies au besoin.
Axes et centre de symétrie. Grand axe et petit axe d'une ellipse. Asymptotes d'une hyperbole.	Détermination de ces éléments géométriques à partir d'une équation réduite.
Une équation du type $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, définit une conique, éventuellement dégénérée.	Réduction de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour obtenir une équation réduite dans un repère orthonormé. Interprétation géométrique des droites propres. L'équation $xy = k$ définit une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.
Paramétrage des ellipses et des hyperboles à partir de leur centre, respectivement par les fonctions trigonométriques et hyperboliques.	Dans le cas de l'hyperbole, les deux branches sont paramétrées séparément.

B - Surfaces

La visualisation des surfaces grâce à un outil informatique ou par l'étude de sections planes sont privilégiées. Les exemples peuvent être choisis parmi les quadriques, mais la définition et la classification de celles-ci sont hors programme. De la même façon, l'étude des surfaces réglées peut s'appuyer sur des exemples usuels (cônes, cylindres, surfaces développables engendrées par les tangentes à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$...) mais toute connaissance spécifique est hors programme. Toujours dans cet esprit, on peut fournir divers exemples de courbes tracées sur une surface (lignes de pente, contours apparents coniques ou cylindriques...). De manière générale, on attend des étudiants une certaine familiarité avec la représentation mathématique des surfaces en lien avec leurs propriétés géométriques (par exemple qu'ils sachent obtenir rapidement un paramétrage de surface réglée, une équation cartésienne de surface de révolution...) même si aucun point du programme ne précise théoriquement ces aspects.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Surfaces paramétrées	
Surface paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(u,v) \mapsto M(u,v)$.	
Point régulier d'une surface paramétrée.	
Courbes coordonnées d'une surface paramétrée.	
Plan tangent en un point régulier.	Par définition, le plan est dirigé par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées. Détermination d'une équation ou d'un paramétrage du plan tangent.
Vecteur normal à une surface en un point régulier, droite normale.	
b) Surfaces définies par une équation cartésienne	
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$.	Surfaces de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal au plan tangent en un point régulier.	On admet que la surface admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation du plan tangent en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Courbe paramétrée tracée sur une surface.	Cas d'une surface paramétrée, d'une surface définie par une équation cartésienne.
Si Γ est une courbe tracée sur la surface Σ, et si M est un point régulier à la fois de Σ et de Γ, la tangente en M à Γ est incluse dans le plan tangent en M à Σ.	
c) Exemples de surfaces	
Surface d'équation $z=f(x,y)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Interprétation géométrique de l'étude des points critiques de f effectuée dans la section « Fonctions de deux ou trois variables ».
Surface réglée. Génératrices.	Obtention d'un paramétrage d'une surface réglée à partir de la famille de ses génératrices. Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.
Surface de révolution. Axe, méridiennes, parallèles.	Dans le cas où l'axe est l'un des axes du repère, obtention d'un paramétrage ou d'une équation cartésienne. On met en évidence l'intérêt de l'utilisation de matrices de rotation.

d) Courbes de l'espace définies par un système d'équations cartésiennes

Courbe définie par l'intersection de deux surfaces données par une équation cartésienne. Un point M de la courbe définie par le système $\left\{\begin{array}{l} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{array}\right.$ est régulier si les gradients de f et g en M sont linéairement indépendants. Tangente en un point régulier.	
Cas des sections planes.	Lignes de niveau d'une surface. Sur des exemples, utilisation pour visualiser l'allure d'une surface.