

# CONCOURS COMMUN 2010

## DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve Spécifique de Sciences Industrielles

(Filière PCSI – Option PSI)

**Mardi 18 mai 2010 de 8H00 à 12H00**

## ENONCE SUJET

### Instructions générales :

Vous devez vérifier que les documents remis comprennent :

- |  |                 |
|--|-----------------|
| <input type="checkbox"/> Un énoncé du sujet    | pages 1 à 12    |
| <input type="checkbox"/> Les documents annexes | DOCUMENTS 1 à 3 |
| <input type="checkbox"/> Un document réponse   | pages 1 à 12    |

**L'emploi d'une calculatrice est interdit**

Vous devez répondre aux questions en utilisant le document réponse. Aucun autre document ne sera accepté.

**Attention :** Vous devez impérativement inscrire votre code candidat sur chaque page du document réponse. En fin d'épreuve, vous ne devez rendre que le document réponse sur lequel vous aurez collé l'étiquette correspondant à l'épreuve spécifique de Sciences-Industrielles.

### Instructions particulières :

Il est fortement conseillé au candidat de lire la totalité du sujet avant de composer. Toutes les parties sont **indépendantes** (elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre). La répartition du temps à consacrer à chaque partie est environ la suivante :

- |   |         |
|---|---------|
| <input type="checkbox"/> Lecture du sujet : | 20 min  |
| <input type="checkbox"/> Partie B :         | 10 min  |
| <input type="checkbox"/> Partie C :         | 20 min  |
| <input type="checkbox"/> Partie D :         | 100 min |
| <input type="checkbox"/> Partie E :         | 60 min  |
| <input type="checkbox"/> Partie F :         | 30 min  |

(Le nombre de points affectés à chaque partie sera sensiblement proportionnel à sa durée).

**AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISE**

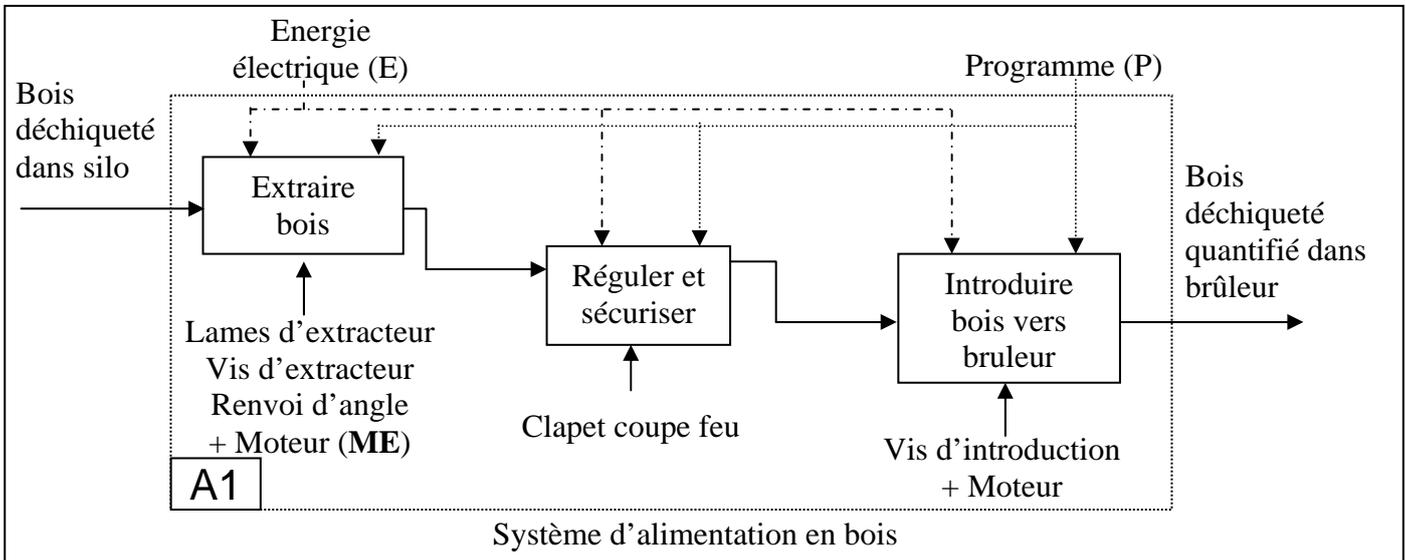
### Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.



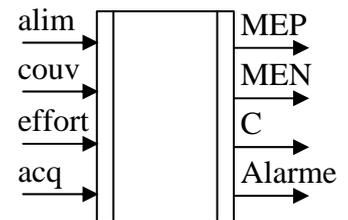
La vis d'introduction est actionnée par le moteur d'introduction.

La vis d'extraction et la vis d'introduction sont séparées par un boîtier de liaison avec un « clapet coupe feu » à fermeture automatique par manque de courant (ce système est donc *monostable*). Ce boîtier de liaison est équipé dans sa partie supérieure d'un « couvercle de sécurité » permettant de détecter le trop plein de bois grâce à un capteur. Les deux moteurs de vis sont équipés d'un contrôle d'effort qui déclenche la marche arrière automatiquement en cas de dépassement du seuil d'effort programmé.



Le graphe partiel des Entrées-Sorties relatif à cette étude est donné à titre indicatif ci-contre.

La mise en rotation dans le sens positif du moteur de la vis d'extraction (**MEP**) est commandée par la demande d'alimentation (**alim**). Cette rotation n'est possible que si le capteur du « couvercle de sécurité » (**couv**) est à l'état 1 et que le capteur d'effort (**effort**) sur le moteur n'a pas atteint le seuil programmé, il est donc à l'état 0.



La suite du fonctionnement est conditionnée par :

- Une extraction trop importante de bois provoque l'ouverture du « couvercle de sécurité », commandant uniquement l'arrêt du moteur d'extraction jusqu'à la fermeture du couvercle.
- OU : lorsque le seuil d'effort programmé est atteint sur le moteur d'extraction, celui ci tourne en sens inverse (sens négatif **MEN**) pendant 5 secondes puis se remet à tourner dans le sens positif si les conditions de fonctionnement sont vérifiées.
- OU : de plus, sans demande d'alimentation, le moteur de vis d'extraction (**MEP**) se met à l'arrêt.

**Question C1 :** Compléter la séquence du GRAFCET d'« alimentation en bois ».

Le cahier des charges stipule que pour des raisons de sécurité, il est nécessaire que l'actionneur du clapet coupe feu (**C**) ait le mode de fonctionnement suivant :

- Il doit être ouvert durant une alimentation normale : **C = 1.**
- Il reste ouvert lors d'une extraction trop importante : **C = 1.**
- Il doit être fermé lors de la rotation en sens inverse de la vis d'extraction : **C = 0.**

**Question C2 :** Compléter le GRAFCET de la question C1.

Le cahier des charges stipule que lorsque le seuil d'effort programmé est atteint 2 fois consécutives sur un intervalle de temps d'une minute, la chaudière se met en défaut (arrêt de la chaudière, la variable **alim** passe à 0) et actionne une alarme (**Alarme**). Pour permettre le redémarrage, l'utilisateur doit appuyer sur le bouton acquittement (**acq**) qui permettra la remise en fonctionnement normal de la chaudière.

**Question C3 :** Compléter le GRAFCET de « sécurité d'alimentation ».

**D – VÉRIFICATION DE LA FONCTION « DÉPOUSSIÉRER, DÉCENDRER »****D – 1. Mise en situation.**

(Voir document 2 figures 4 et 5)

Le système de décendrage nettoie la chaudière à intervalle de temps régulier. La chambre de détente permet la séparation entre les cendres volatiles et les fumées. Les cendres volatiles de dépolluage des fumées sont automatiquement transportées et évacuées avec les cendres de combustion grâce d'abord à la vis de dépolluage puis à la vis de décendrage, vers le cendrier.

Le nettoyage de l'échangeur à partir des turbulateurs fait tomber les suies sur la vis de dépolluage. Celle-ci évacue les suies et les poussières de fumées au dessus de la vis de décendrage. La vis de décendrage évacue les suies, les poussières et les cendres du foyer dans le cendrier. Toutes ces opérations sont réalisées à partir d'un seul motoréducteur (MD).

**Question D1 :** Compléter le diagramme SADT A3.

**ETUDE DU POINT DE VUE DES MOUVEMENTS.**

Le but de cette partie est d'étudier la relation entre la vitesse de rotation du moteur de décendrage (MD) et la vitesse de translation des turbulateurs. En effet cette vitesse est un élément déterminant pour un nettoyage optimum de l'échangeur qui contribue au bon rendement de la chaudière.

Le cahier des charges stipule que la vitesse maximum des turbulateurs par rapport à l'échangeur soit comprise entre 0,15 m/s et 0,25 m/s.

(Voir document 2 figure 6 et document 3 figures 7 à 10)

**D – 2. Étude de la relation entre la rotation du moteur et le mouvement de la tringle de commande 4.**

On considère le mécanisme plan (dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ), dans la situation proposée sur le schéma cinématique du document 3 figure 7, à l'échelle 1/3, et dans le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ .

- La manivelle d'entraînement **1** est mise en rotation par le motoréducteur de décendrage (MD), lié au bâti **0**, à partir d'une liaison pivot d'axe  $O\vec{z}$  à la vitesse de rotation  $\omega_{10}\vec{z}$ , tel que l'angle  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  et  $\vec{OA} = r\vec{x}_1$ .
- Le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$  est lié à la manivelle d'entraînement **1**.
- La bielle **2** est liée à la manivelle d'entraînement **1** par une liaison pivot d'axe  $A\vec{z}$ .
- Le repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  est lié à la bielle **2**. On note l'angle  $\theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ .
- L'accouplement **3** est lié à la bielle **2** par une liaison pivot d'axe  $B\vec{z}$ .
- Le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$  est lié à l'accouplement **3**. On note  $\vec{AB} = \ell\vec{y}_2$ .
- L'accouplement **3** est lié au bâti **0** par une liaison pivot d'axe  $C\vec{z}$ .
- On note l'angle  $\theta_{30} = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$  et  $\vec{BC} = -R\vec{x}_3$ .
- On note  $\vec{CO} = L\vec{x}_0$ .

**Question D2-1 :** Écrire la fermeture géométrique pour les centres de liaison O, A, B et C.

En déduire une relation entre  $\theta_{30}$  et  $\theta_{10}$  uniquement en fonction de r, R, L et  $\ell$ . Cette relation permettrait d'obtenir  $\theta_{30}$  en fonction de  $\theta_{10}$ .

**Question D2-2 :** Quelle méthode faudrait-il appliquer pour en déduire la relation entre la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  de la manivelle **1** par rapport au bâti **0**, et la vitesse de rotation  $\omega_{30}$  de l'accouplement **3** par rapport au bâti **0** (il n'est pas demandé de calcul).

L'accouplement **3** est formé de deux bras décalés l'un de l'autre d'un angle  $\alpha = (\vec{x}_3, \vec{x}_3^*)$

(**document 3 figure 7**). La tringle de commande **4** est en liaison pivot d'axe  $D\vec{z}$  avec l'accouplement **3** au point D et tel que  $\vec{CD} = d\vec{x}_3^*$ .

**Question D2-3 :** Déterminer la vitesse du point D appartenant à l'accouplement **3** dans son mouvement par rapport au bâti **0** notée  $\vec{V}_{D \in 3/0} = V_{D30} \vec{y}_3^*$  en fonction de la vitesse de rotation  $\omega_{30}$  et en projection dans le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ .

Pour la suite, dans l'étude du mouvement simplifié, on ne tiendra pas compte de la composante sur  $\vec{x}_0$ .

### **D – 3. Étude du mouvement entre la tringle de commande 4 et les turbulateurs 8 et 9.**

On considère le mécanisme plan (dans le plan  $(\vec{y}_0, \vec{z})$ ), **du document 3 figures 9 et 10**, dans la situation telle que modélisée schématiquement sur le document réponse, à l'échelle 1/2, dans le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ .

L'axe de commande **5** est mis en rotation par la tringle de commande **4**, telle que la vitesse du point E lié à l'axe de commande **5** par rapport au bâti **0** est :  $\vec{V}_{E \in 5/0} = V_{E50} \vec{y}_5$ .

L'axe de commande **5** est en liaison pivot avec le bâti **0** d'axe  $G\vec{x}_0$ .

Les plaques support **6** et **7**, sont en liaison sphérique avec l'axe de commande **5** respectivement de centre F et H.

Les turbulateurs **8** et **9** sont en liaison sphérique avec les plaques support **6** et **7** respectivement de centre I et J, et en liaison glissière avec l'échangeur lié au bâti **0** d'axe respectif  $I\vec{y}_0$  et  $J\vec{y}_0$ .

A partir d'une étude cinématique graphique et dans la position définie sur le document réponse, donner les rapports qui existent entre  $\vec{V}_{E \in 5/0} = V_{E50} \vec{y}_5$  et :

**Question D3-1 :** d'une part la vitesse du point I appartenant au turbulateur **8** dans son mouvement par rapport au bâti **0**  $\vec{V}_{I \in 8/0} = V_{80} \vec{y}_0$  ;

**Question D3-2 :** d'autre part la vitesse du point J appartenant au turbulateur **9** dans son mouvement par rapport au bâti **0**  $\vec{V}_{J \in 9/0} = V_{90} \vec{y}_0$ .

Justifier les constructions.

### **D – 4. Étude du mouvement simplifié de la tringle de commande 4.**

**Nota :** les deux schémas proposés dans cette partie sur le document réponse D4-1 et D4-2 définissent la géométrie du système pour un même instant, lorsque les turbulateurs se déplacent aux vitesses maximum (déterminé au cours d'une autre étude).

Les dimensions des mécanismes sont telles que :

- DE = 1 150 mm sur la tringle de commande **4** (**voir document 2 figure 6**) ;
- CD = d = 120 mm sur l'accouplement **3** ;
- EG = 92 mm sur l'axe de commande **5**.

**Question D4-1 :** A partir du schéma fourni à l'échelle 1/3 sur le document réponse, tracer les deux positions extrêmes du point D appartenant à l'accouplement **3** dans son mouvement par rapport au bâti **0** :  $D_0$  et  $D_1$ . Préciser la méthode.

**Question D4-2 :** En comparant la longueur de la tringle de commande **4** par rapport aux autres dimensions, quelle approximation peut-on faire quant au mouvement de la tringle de commande **4** par rapport au bâti **0**.

**Question D4-3 :** A partir des positions extrêmes obtenues dans la question précédente, du schéma fourni à l'échelle 1/2 sur le document réponse et de l'approximation précédente, tracer les deux positions extrêmes approximatives du point E appartenant à l'axe de commande 5 dans son mouvement par rapport au bâti 0 : respectivement E<sub>0</sub> et E<sub>1</sub>.

**D – 5. Étude de la relation entre la rotation du moteur et la translation des turbulateurs 8 et 9.**

Dans la position du système donnée pour l'étude de cinématique graphique et les épures, la relation entre  $\omega_{30}$  et  $\omega_{10}$  est telle que  $\omega_{30} = K_1 \omega_{10}$  avec  $\omega_{10} = 4 \text{ rd/s}$ ,  $\theta_{30} = 95^\circ$ , et  $\alpha = 70^\circ$ .

Dans les applications numériques, pour un angle compris entre  $160^\circ$  et  $180^\circ$ , on prendra son cosinus équivalent à  $-1$ .

**Question D5-1 :** En déduire de manière littérale la composante sur  $\vec{y}_0$  de la vitesse de la tringle de commande 4 par rapport au bâti 0 :  $V_{40}$  en fonction de  $K_1$ ,  $\omega_{10}$ , et d.

**Question D5-2 :** Vérifier que les valeurs absolues approchées des vitesses maximum de translation des turbulateurs 8 et 9 sont conformes au cahier des charges. Pour cela  $K_1 = -1/2$ , cette valeur ayant été obtenue à partir d'une étude annexe.

**ETUDE DU POINT DE VUE DES EFFORTS.**

(Voir document 2 figure 6 et document 3 figures 7 à 10)

Le motoréducteur de décendrage (MD) permet à la fois la mise en rotation de la vis de décendrage en prise directe, la mise en rotation de la vis de dépoussiérage à partir d'un système pignons chaîne, la mise en mouvement de la grille de décendrage et enfin la mise en mouvement des turbulateurs.

L'étude porte sur les actions nécessaires à la mise en mouvement des turbulateurs.

On note :

$$\left\{ S_{i \rightarrow j} \right\}_P = \begin{pmatrix} X_{i \rightarrow j} & L_{i \rightarrow j} \\ Y_{i \rightarrow j} & M_{i \rightarrow j} \\ Z_{i \rightarrow j} & N_{i \rightarrow j} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)}$$

le torseur des actions transmissibles associé à une liaison L<sub>ij</sub> de la pièce i sur la pièce j écrit en P en projection dans la base  $(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$  ;

On suppose que :

- les liaisons sont parfaites ;
- le poids des différentes pièces est négligeable, sauf pour les turbulateurs dont le poids est inclus dans les actions définies ci-dessous.

Le nettoyage de l'échangeur se fait à partir de 4 couples de turbulateurs identiques travaillant de façon identique. Les différents couples de pièces, actions et liaisons seront différenciés par un indice k allant de 1 à 4 :

- Les 4 couples de turbulateurs transmettent au travers des plaques support 6<sub>k</sub> et 7<sub>k</sub> des actions que l'on considère identiques sur l'axe de commande 5.
- Les liaisons entre l'axe de commande 5, les plaques support 6<sub>k</sub> et 7<sub>k</sub> et les turbulateurs 8<sub>k</sub> et 9<sub>k</sub> seront modélisées par des liaisons sphériques.

L'équilibre des turbulateurs a permis de mettre en évidence les relations qui existent entre :

- l'effort dû au nettoyage par les turbulateurs associé au poids des turbulateurs,  $\vec{F}_{8k} = -F_{8k} \vec{y}_0$ ,  $\vec{F}_{9k} = -F_{9k} \vec{y}_0$ , avec  $F_{8k} > 0$ ,  $F_{9k} > 0$  ;
- et l'action créée respectivement par les plaques support sur les turbulateurs 8<sub>k</sub>, 9<sub>k</sub> :  $\vec{F}_{(6 \rightarrow 8)k}$ ,  $\vec{F}_{(7 \rightarrow 9)k}$  avec  $\|\vec{F}_{(6 \rightarrow 8)k}\| = \frac{F_{8k}}{\cos \theta_{60}}$ ,  $\|\vec{F}_{(7 \rightarrow 9)k}\| = \frac{F_{9k}}{\cos \theta_{70}}$ , telle que les deux plaques soient toujours tendues (soumises à de la traction).

**D – 6. Étude de l'équilibre des plaques support 6 et 7.**

On modélise le mécanisme plan (dans le plan  $(\vec{y}_0, \vec{z})$ ), tel que schématisé sur le document 3 figure 9 dans le repère  $R_0(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ .

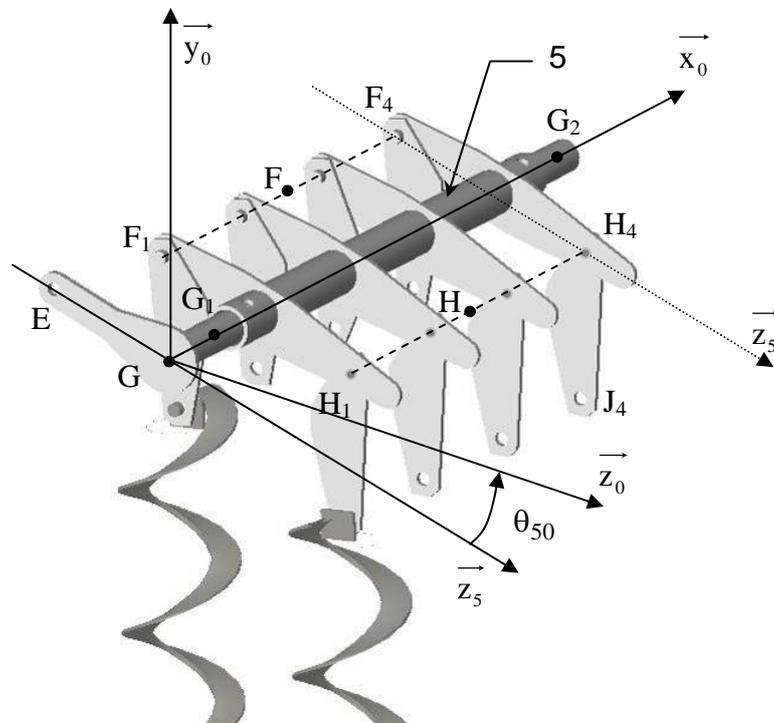
On néglige le poids des plaques support 6 et 7 devant les autres actions.

**Question D6-1 :** Écrire les équilibres des plaques support  $6_k$  et  $7_k$  pour un couple de turbulateurs. On notera l'action de la pièce i sur la pièce j pour le couple de pièces k :  $\vec{F}_{(i \rightarrow j)k}$ .

**Question D6-2 :** En déduire l'action de la plaque support  $6_k$   $\vec{F}_{(6 \rightarrow 5)k}$  en projection sur  $\vec{y}_6$ , ainsi que l'action de la plaque support  $7_k$   $\vec{F}_{(7 \rightarrow 5)k}$  en projection sur  $\vec{y}_7$ , sur l'axe de commande 5 en fonction respectivement de  $F_{8k}$  et  $F_{9k}$ .

**D – 7. Étude de l'équilibre de l'axe de commande 5.**

On considère le système spatial ci-dessous :



L'étude du mouvement de la tringle de commande 4 nous a permis de montrer que celle-ci restait dans une position à peu près verticale.

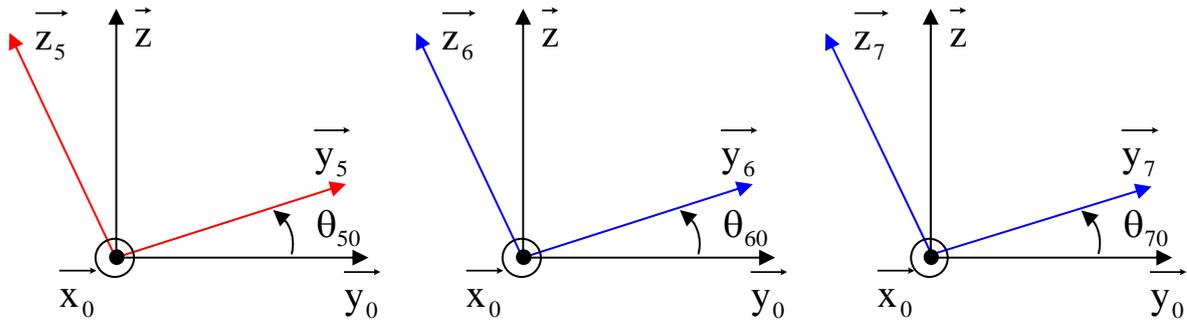
On suppose donc que l'action de la tringle de commande 4 sur l'axe de commande 5 peut être modélisée par un glisseur en E tel que :  $\vec{F}_{4 \rightarrow 5} = F_{45} \vec{y}_0$ .

On néglige les actions dues au poids de l'axe de commande 5 devant les autres actions.

L'axe de commande 5 est en liaison pivot d'axe  $G \vec{x}_0$  par rapport au bâti 0 à partir d'une liaison sphérique en  $G_1$  telle que  $\vec{GG}_1 = \lambda \vec{x}_0$  et d'une liaison sphère cylindre en  $G_2$  telle que  $\vec{GG}_2 = \mu \vec{x}_0$ .

L'axe de commande 5 est en liaisons sphériques avec :

- La tringle de commande 4 en E, tel que :  $\vec{GE} = -e \vec{z}_5$  ;
- Le turbulateur  $6_k$  en  $F_k$ , tel que :  $\vec{GF}_k \cdot \vec{z}_5 = -f$  ;
- Le turbulateur  $7_k$  en  $H_k$ , tel que :  $\vec{GH}_k \cdot \vec{z}_5 = f$  .



**Question D7-1 :** Donner les torseurs des actions transmissibles des liaisons suivantes :

- Liaison en  $G_1$  entre le bâti  $0$  et l'axe de commande  $5$   $\{S_{0 \rightarrow 5}\}_{G_1}$
- Liaison en  $G_2$  entre le bâti  $0$  et l'axe de commande  $5$   $\{S'_{0 \rightarrow 5}\}_{G_2}$
- Liaison en  $F_k$  entre la plaque support  $6_k$  et l'axe de commande  $5$   $\{S_{6_k \rightarrow 5}\}_{F_k}$

**Question D7-2 :** Compléter le bilan des actions mécaniques extérieures sur l'axe de commande  $5$ .

On note : au point F milieu de  $F_1F_4$  la résultante  $\vec{F}_{6 \rightarrow 5} = \sum_{k=1}^4 \vec{F}_{(6 \rightarrow 5)k} = 4\vec{F}_{(6 \rightarrow 5)k} = F_{65} \vec{y}_6$  ;

de même : au point H milieu de  $H_1H_4$  la résultante  $\vec{F}_{7 \rightarrow 5} = \sum_{k=1}^4 \vec{F}_{(7 \rightarrow 5)k} = 4\vec{F}_{(7 \rightarrow 5)k} = F_{75} \vec{y}_7$  .

**Question D7-3 :** A partir de l'équilibre de l'axe de commande  $5$ , et de la figure 9 du document 3, en déduire l'équation de moment permettant de donner la relation entre  $F_{45}$  et  $F_{65}$ ,  $F_{75}$ .

**Question D7-4 :** En déduire l'expression de  $F_{45}$  en fonction de  $F_{8k}$  et  $F_{9k}$ .

### D – 8. Étude de la transmission entre le motoréducteur de décendrage (MD) et l'axe de commande 5

On modélise le mécanisme plan dans la situation telle que schématisé sur le document réponse dans le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ . Une autre étude a permis de montrer que le couple maximum transmissible par le moteur est atteint dans la position de cette figure.

On considère que l'accouplement  $3$  est soumis à une action verticale en D due à la tringle de commande  $4$  telle que  $\vec{F}_{4 \rightarrow 3} = F_{43} \vec{y}_0$  avec  $F_{43} = 200$  N

**Question D8-1 :** En déduire graphiquement  $\vec{B}_{2 \rightarrow 3}$ , l'action dans la liaison de la bielle  $2$  sur l'accouplement  $3$ . On prendra pour échelle de force :  $1 \text{ cm} \cong 40 \text{ N}$ . Justifiez la méthode.

**Question D8-2 :** En déduire le couple Maxi instantané que doit fournir le motoréducteur (MD) pour l'action de décendrage, dans la position proposée. Le schéma cinématique de la figure utilisée pour la question précédente étant à l'échelle  $1/3$ , certaines dimensions pourront être mesurées sur celui-ci.

**Question D8-3 :** Sachant que le couple nominal en sortie du motoréducteur est de  $40 \text{ Nm}$  quelle est la raison qui nous amène à utiliser un tel moteur ?

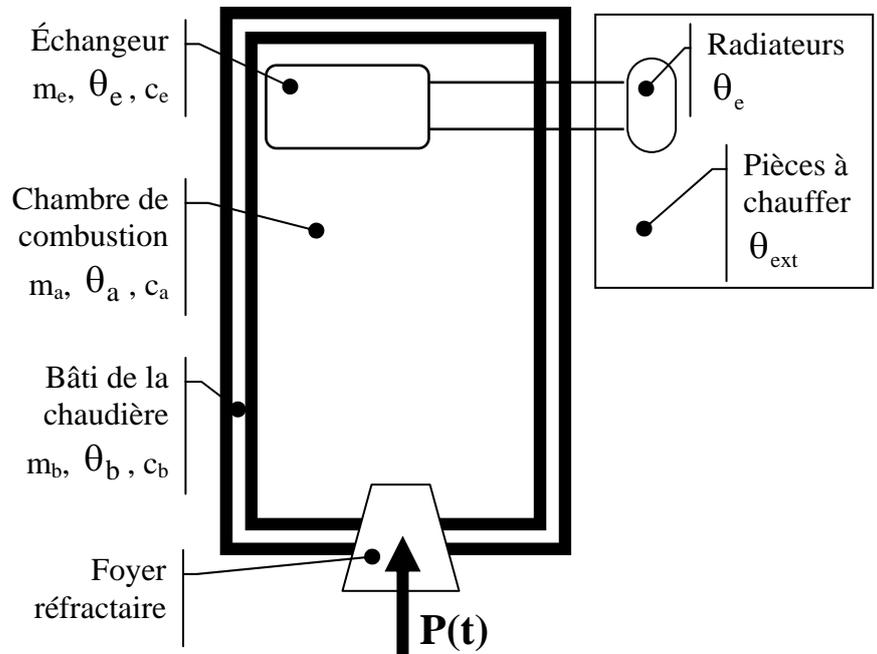
## E – ÉTUDE DE LA FONCTION « CHAUFFER L'EAU »

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

### E – 1. Modélisation théorique de la chaudière.

On considère que :

- $p(t)$  est la puissance calorifique en Watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière.
- L'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température  $\theta_e(t)$  l'eau située dans l'échangeur.
- l'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température  $\theta_{ext}(t)$ .



On note :

- $\theta_b(t)$  la température du bâti de la chaudière ;
- $m_b$  la masse du bâti à monter en température ;  $m_b = 200\text{kg}$
- $c_b$  la capacité calorifique massique du bâti ;  $c_b = 500\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $\theta_a(t)$  la température de l'air dans la chambre de combustion ;
- $m_a$  la masse de l'air à monter en température ;  $m_a = 2\text{kg}$
- $c_a$  la capacité calorifique massique de l'air ;  $c_a = 700\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $\theta_e(t)$  la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs ;
- $m_e$  la masse de l'eau à monter en température dans l'échangeur ;  $m_e = 50\text{kg}$
- $c_e$  la capacité calorifique massique de l'eau ;  $c_e = 4000\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $\theta_{ext}(t)$  la température ambiante des pièces à chauffer.

Le principe de conservation de l'énergie conduit à une modélisation par les équations différentielles suivantes :

$$\textcircled{1} : m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab} [\theta_b(t) - \theta_a(t)] = p(t)$$

$$\textcircled{2} : m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae} [\theta_a(t) - \theta_e(t)] = K_{ab} [\theta_b(t) - \theta_a(t)]$$

$$\textcircled{3} : m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae} [\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)] = K_{ae} [\theta_a(t) - \theta_e(t)]$$

Avec :

$K_{ab}$  la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion ;

$$K_{ab} = 40 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$K_{ae}$  la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs.

$$K_{ae} = 400 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

**Les transformées de Laplace seront notées :**  $\mathcal{L}[\theta_i(t)] = T_i(p)$  et  $\mathcal{L}[p(t)] = P(p)$ .

**Question E1-1 :** En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles précédentes.

**Question E1-2 :** Exprimer  $T_b(p)$  en fonction de  $T_a(p)$  et de  $P(p)$  en faisant apparaître les variables  $m_b$ ,  $c_b$  et  $K_{ab}$  et mettre  $T_b(p)$  sous la forme  $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$ .

Préciser l'ordre du système défini par la fonction de transfert  $H_1(p)$ , ainsi que, littéralement, ses caractéristiques.

Calculer la valeur numérique approchée de  $\tau_1$ , la constante de temps de ce système.

Compléter le schéma bloc du document réponse en n'utilisant que les variables  $K_{ab}$  et  $\tau_1$ .

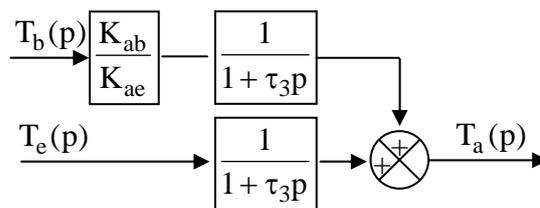
**Question E1-3 :** Exprimer  $T_a(p)$  en fonction de  $T_e(p)$  et de  $T_b(p)$  en faisant apparaître les variables  $m_a$ ,  $c_a$ ,  $K_{ae}$  et  $K_{ab}$ .

Mettre  $T_a(p)$  sous la forme  $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$ .

Préciser l'ordre des systèmes définis par les fonctions de transfert respectives  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$ , ainsi que, littéralement, leurs caractéristiques.

Calculer la valeur numérique approchée de  $\tau_3$ , la constante de temps de ces systèmes.

Dans la suite de l'étude, on suppose que  $K_{ae}$  est très grand devant  $K_{ab}$ , ainsi le schéma bloc ayant pour entrées  $T_b(p)$  et  $T_e(p)$  et pour sortie  $T_a(p)$  peut se mettre sous la forme suivante :



**Question E1-4 :** Exprimer  $T_e(p)$  en fonction de  $T_a(p)$  et de  $T_{ext}(p)$ .

Préciser l'ordre du système défini ainsi que, littéralement, ses caractéristiques.

Calculer la valeur numérique approchée de  $\tau_5$ , la constante de temps de ce système.

Tracer le schéma bloc ayant pour entrées  $T_a(p)$  et  $T_{ext}(p)$  et pour sortie  $T_e(p)$ , en n'utilisant que la variable  $\tau_5$ .

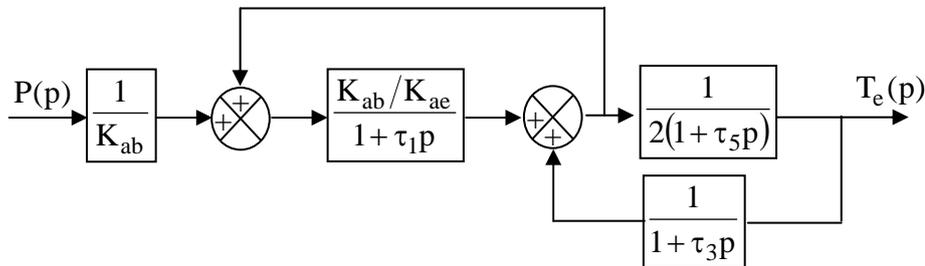
**Question E1-5 :** Tracer, sous forme de schéma bloc, la fonction de transfert du système global ayant pour entrée  $P(p)$ , pour sortie  $T_e(p)$  et comme perturbation  $T_{ext}(p)$ . A l'intérieur des blocs, on ne fera apparaître que les paramètres suivants :  $K_{ab}$ ,  $K_{ae}$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  et  $\tau_5$ .

Placer sur ce schéma bloc les grandeurs  $T_b(p)$ ,  $T_a(p)$ .

**E – 2. Étude du système autour d'un point de fonctionnement**

La suite de l'étude porte sur la dynamique des systèmes autour d'un point de fonctionnement. Nous pouvons donc considérer que  $T_{ext}(p) = 0$ .

De plus comme la constante de temps  $\tau_1$  est grande devant  $\tau_3$ , le schéma bloc du système peut alors se représenter sous la forme suivante :



**Question E2-1 :** Donner la fonction de transfert  $H(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)}$ . Il est demandé de ne pas développer les produits d'éléments de la forme  $(1 + \tau_i p)$ , mais de les conserver sous une forme factorisée la plus simple.

**E – 3. Réponse de la chaudière à partir d'un modèle simplifié.**

A partir des résultats obtenus précédemment, on peut considérer que :  $K_{ab} \ll K_{ae}$ ,  $\tau_3 \ll \tau_5$  et que  $\tau_3 \ll \tau_1$ . De ce fait, dans la suite de cette étude, on pourra utiliser la fonction de transfert simplifiée :

$$H(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400(1 + 2500p)(1 + 500p)}$$

On considère que le corps de chauffe de la chaudière est soumis à un échelon de puissance de chauffe  $p(t) = P_0 \cdot u(t)$  où  $u(t)$  est la fonction causale, avec  $P_0 = 10 \text{ kW}$ .

**Question E3-1 :** Calculer, à partir de ce modèle simplifié, les valeurs initiales et finales prévisibles pour les températures de l'eau  $\theta_e(t)$ , préciser les pentes à l'origine et en régime permanent.

**Question E3-2 :** Tracer, sur la figure du document réponse, l'allure de la réponse  $\theta_e(t)$  à une entrée échelon de puissance de 10 kW. Faire figurer sur le graphique tous les éléments remarquables de la réponse.

---

**F – ÉTUDE DE LA FONCTION « ALIMENTER EN BOIS »**


---

On considère que la chaudière peut-être décrite à partir du schéma fonctionnel donné sur le document réponse.

Une température de consigne  $\theta_c(t)$  est donnée au système. Un dispositif électronique convertit celle-ci en une tension  $v_c(t)$  telle que  $V_c(p) = K_c T_c(p)$ ,  $K_c$  pouvant être modifié.

Cette tension  $v_c(t)$  est comparée à la tension  $v_e(t)$  fournie par le capteur mesurant la température de l'eau au sein de l'échangeur :  $\theta_e(t)$  telle que  $V_e(p) = K_e T_e(p)$ , avec  $K_e = 0,2 \text{ Volt}/^\circ\text{C}$ .

Cette différence de tension est amplifiée par un correcteur proportionnel C.

La tension obtenue permet au moteur de tourner à une vitesse de rotation  $\Omega_m$ .

Le moteur entraîne la vis d'introduction qui fournit un débit massique de bois.

Ce bois au sein du foyer dégage une puissance de chauffe  $p(t)$ .

**Question F1 :** Compléter, sur le document réponse le schéma fonctionnel global en précisant les grandeurs physiques véhiculées, ainsi que leurs unités. On notera : une température **T**, une puissance **P**, une tension **V**, un débit massique **D**, une vitesse de rotation  **$\Omega$** .

Pour les mêmes raisons que précédemment l'ensemble Moteur, Vis, Foyer et Corps de chauffe de la chaudière a été soumis à une entrée du type indicielle. Cette expérience a permis de modéliser la fonction de transfert de cet ensemble sous la forme suivante :

$$H_{MC}(p) = \frac{T_e(p)}{V_M(p)} = \frac{K_{MC}}{(1 + \tau_A p)(1 + \tau_B p)}$$

**Question F2 :** Sur le diagramme de Bode du document réponse, tracer le diagramme asymptotique de la fonction de transfert  $H_{MC}(p)$  avec  $K_{MC} = 0,3^\circ\text{C}/\text{Volt}$ ,  $\tau_A = 360 \text{ min}$  et  $\tau_B = 120 \text{ min}$ .

On prendra  $\log 3 \approx 0,5$ .

**Question F3 :** Donner la fonction de transfert en boucle fermée du système global :

$$H_G(p) = \frac{T_e(p)}{T_c(p)}. \text{ La mettre sous forme littérale canonique.}$$

**Question F4 :** En déduire la valeur en régime permanent de  $\theta_e(t)$  quand on soumet l'ensemble à une consigne d'entrée de type échelon de type  $\theta_c(t) = \theta_{c0}$ .

**Question F5 :** En déduire la valeur de l'écart statique  $\theta_e(t) - \theta_{c0}$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Quel doit être la valeur de  $K_c$  pour obtenir un écart statique nul.