

# Modélisation d'un éco-bâtiment

Corrigé UPSTI

## PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

### 1 Contexte et problématique de l'étude

#### 1.1 Rôle des différents capteurs

**Question 1** A partir de la base de données capteurs, écrire une requête SQL permettant d'extraire les valeurs de la température interne  $T_{int}$  et externe  $T_{ext}$  du bâtiment à une date souhaitée. On propose ici de prendre les valeurs de température le 14 septembre 2022 sur l'intervalle [14h, 14h30].

```
1 SELECT mesure FROM capteurs
2 WHERE (adresse_I2C='11110yz0' OR adresse_I2C='11110yz2')
3 AND date='2022-09-14' AND ( heure.UTC BETWEEN '14:00:00' AND '14:29:59' )
```

**Question 2** A partir de la base de données capteurs, écrire une requête SQL permettant d'extraire les trois dernières mesures de vitesse de vent  $V_{vent}$  puis d'en faire la moyenne. On propose ici de prendre comme valeur finale de vitesse de vent, la vitesse de vent mesurée le 14 septembre 2022 sur l'intervalle [14h, 14h30]. Cette valeur sera la dernière valeur à considérer pour effectuer le filtrage.

```
1 SELECT AVG(mesure) FROM capteurs
2 WHERE adresse_I2C='11110yz8'
3 AND date='2022-09-14' AND ( heure.UTC BETWEEN '13:00:00' AND '14:29:59' )
4 ORDER BY heure.UTC DESC LIMIT 3
```

**Question 3** A partir de la base de données capteurs, écrire une requête SQL permettant de récupérer l'éclairement  $E_{solaire}$  à une date souhaitée puis de calculer la puissance solaire disponible pour le bâtiment en considérant qu'il y a 20m<sup>2</sup> de panneaux solaires ayant un rendement solaire – électrique de 20%. On propose ici de prendre les valeurs de température le 14 septembre 2022 sur l'intervalle [14h, 14h30].

Erreur dans la question qui doit concerner les valeurs d'éclairement et non de température

```
1 SELECT mesure*20*0.2
2 FROM capteurs WHERE adresse_I2C='11110yz4'
3 AND date='2022-09-14' AND ( heure.UTC BETWEEN '14:00:00' AND '14:29:59' )
```

### 2 Modélisation et contrôle thermique d'un bâtiment

#### 2.1 Choix du modèle thermique du bâtiment

**Question 4** Quelle est la relation entre le transfert de chaleur (Joule) et le flux thermique (Watt) ? Écrire la relation qui lie le flux thermique et l'élévation de température dans le cadre d'une capacité thermique.

Relation transfert thermique et flux thermique :

$$\varphi[W] = \frac{d}{dt}Q[J]$$

Relation flux thermique et élévation de température dans capacité thermique :

$$Q = C_{th}\Delta\theta$$

$$\varphi = C_{th} \frac{d}{dt} \Delta\theta \quad (1)$$

## 2.2 Positionnement du problème

**Question 5** Expliciter en quoi consiste l'étude d'un asservissement et l'étude d'une régulation. Vous pouvez vous aider de schémas de principe.

Un système en boucle fermée peut être utilisé en régulation ou en poursuite (asservissement). Un système est régulé si la consigne est constante. L'objectif est donc de maintenir la sortie constante malgré la présence des perturbations. Si par contre la consigne varie constamment la boucle de commande fonctionne en poursuite (système suiveur). Le but est alors que la sortie suive la consigne. Dans les deux cas l'objectif est donc que la sortie soit égale à la consigne (constante pour un système régulé et variable pour un système suiveur).

**Question 6** Les schémas blocs sont définis au sens des petites variations. Expliciter la signification des petites variations au sens de l'automatique. Donner un exemple concret dans le cadre de cette étude.

Les petites variations sont des variations faibles autour du point de repos, on reste dans la partie linéaire du système. Ici ce sont des petites variations de température (1-2 degrés) pour une température de 19°

**Question 7** Expliquer pourquoi  $\theta_{ext}$  et  $\varphi_s$  sont considérées comme des perturbations.

Ce sont deux grandeurs qui vont faire varier la température sans que l'opérateur puisse les modifier se sont donc des perturbations.

## 2.3 Etude de l'asservissement en température

**Question 8** A partir de la Figure 1, expliciter la fonction de transfert  $H_{S,U}(p)$ . La mettre sous la forme :

$$H_{S,U}(p) = \frac{\alpha R_i}{(1-g\alpha)} \frac{1 + gR_i C_s p}{1 + \left( \frac{\alpha}{1-g\alpha} R_i C_r + \frac{g}{1-g\alpha} R_i C_s \right) p + \frac{\alpha g}{1-g\alpha} R_i^2 C_r C_s p^2} \quad (2)$$

En appliquant la loi des noeuds aux points  $\theta_r$  et  $\theta_s$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= C_r \frac{d}{dt} (\theta_r(t) - \theta_{ref}) + \frac{1}{R_i} (\theta_r(t) - \theta_s(t)) + \frac{1}{R_f} (\theta_r(t) - \theta_{ext}(t)) \\ \varphi_s(t) &= C_s \frac{d}{dt} (\theta_s(t) - \theta_{ref}) - \frac{1}{R_i} (\theta_r(t) - \theta_s(t)) + \frac{1}{R_0} (\theta_s(t) - \theta_{ext}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

L'application de la transformée de Laplace aux équations pour des petites variations et des valeurs initiales des variations nulles donnent :

$$p\Theta_r(p) = -\frac{1}{\alpha R_i C_r} \Theta_r(p) + \frac{1}{R_i C_r} \Theta_s(p) + \frac{1}{R_f C_r} \Theta_{ext}(p) + \frac{1}{C_r} \Phi_r(p) \quad (4)$$

$$p\Theta_s(p) = \frac{1}{R_i C_s} \Theta_r(p) - \frac{1}{g R_i C_s} \Theta_s(p) + \frac{1}{R_0 C_s} \Theta_{ext}(p) + \frac{1}{C_s} \Phi_s(p) \quad (5)$$

Par application du principe de superposition, on annule les variations de  $\varphi_s(t)$  et  $\theta_{ext}(t)$ . L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} p\Theta_r(p) &= -\frac{1}{\alpha R_i C_r} \Theta_r(p) + \frac{1}{R_i C_r} \Theta_s(p) + \frac{1}{C_r} \Phi_r(p) \\ p\Theta_s(p) &= \frac{1}{R_i C_s} \Theta_r(p) - \frac{1}{g R_i C_s} \Theta_s(p) \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient la fonction de transfert recherchée :

$$H_{S_r,U}(p) = \frac{\alpha R_i}{(1-g\alpha)} \frac{1 + g R_i C_s p}{1 + \left( \frac{\alpha}{1-g\alpha} R_i C_r + \frac{g}{1-g\alpha} R_i C_s \right) p + \frac{\alpha g}{1-g\alpha} R_i^2 C_r C_s p^2} \quad (7)$$

**Question 9** La fonction de transfert en boucle ouverte est-elle stable ? Quelle est la valeur du gain statique ?

Quel est le pôle dominant ?

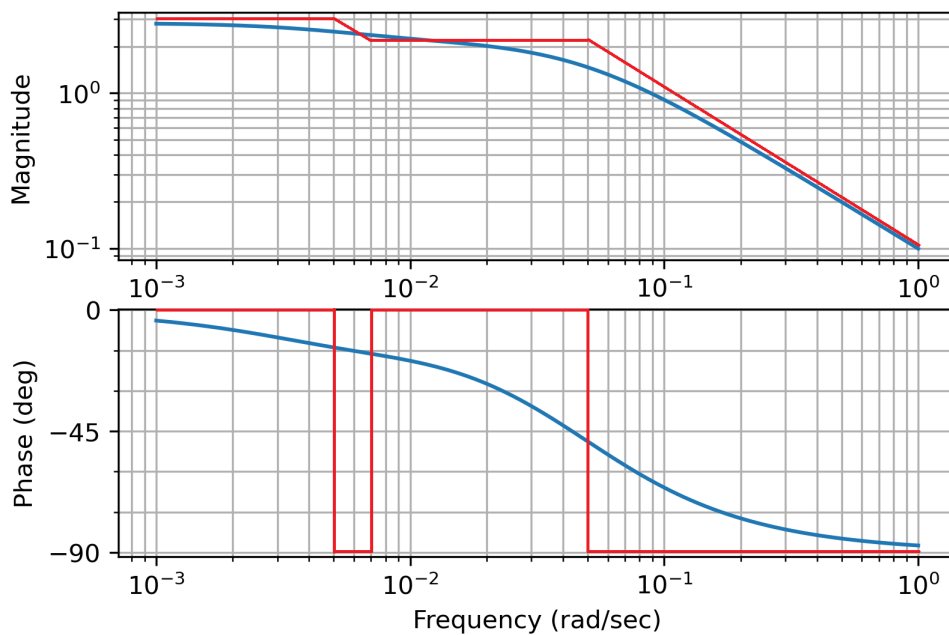
La fonction de transfert en boucle ouverte est d'ordre 2 et de classe 0. Le déphasage sera toujours supérieur à  $180^\circ$ . De plus les pôles sont tous à la partie réelle négative, le système sera stable.

Gain statique = 2,83[K/W]

Le pôle dominant sera le pôle le plus lent.

Pôle dominant = -1/202 rd/s

**Question 10** Tracer de manière qualitative précise le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme réel pour  $H_{S_r,U}(p = j\omega)$ .



**Question 11** À partir des résultats précédents et du cahier des charges, justifier quel est le correcteur le plus adapté à la situation ? Justifier.

On souhaite une erreur statique nulle, il faut que le correcteur comporte un intégrateur. Pour la rapidité, on peut utiliser le proportionnel. On peut se contenter du correcteur PI

**Question 12** On choisit de dimensionner le correcteur avec une méthode de pôle dominant. Quelle autre méthode aurait pu être envisagée ?

Par réglage de marge de phase et gain On place l'intégration une décade avant le pôle dominant et on ajuste avec  $K_p$ .

Hors programme : Méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte ou en boucle fermée.

**Question 13** Quelle valeur de  $K_p$  permet de respecter le cahier des charges ?

Pour avoir un temps de réponse en boucle fermée égal à la moitié de la boucle ouverte (environ 165s), il faut choisir le gain  $K_p = 0,15$

## 2.4 Etude des performances en régulation

**Question 14** A partir de la Figure 1, expliciter la fonction de transfert  $H_{S_r\theta_{ext}}(p)$ . La mettre sous la forme :

$$H_{S_r\theta_{ext}}(p) = \frac{1 + \frac{R_0}{gR_f + R_0} gR_i C_s p}{1 + \left( \frac{\alpha}{1-g\alpha} R_i C_r + \frac{g}{1-g\alpha} R_i C_s \right) p + \frac{\alpha g}{1-g\alpha} R_i^2 C_r C_s p^2} \quad (8)$$

A partir de l'équation 4 et par application du principe de superposition, on annule les variations de  $\varphi_r(t)$  et  $\varphi_s(t)$ , on obtient :

$$H_{S_r\theta_{ext}}(p) = \frac{1 + \frac{R_0}{gR_f + R_0} gR_i C_s p}{1 + \left( \frac{\alpha}{1-g\alpha} R_i C_r + \frac{g}{1-g\alpha} R_i C_s \right) p + \frac{\alpha g}{1-g\alpha} R_i^2 C_r C_s p^2} \quad (9)$$

Cette fonction de transfert s'obtient avec la relation  $\frac{\alpha R_i}{(1-g\alpha)} \frac{gR_f + R_0}{R_f R_0} = 1$ .

**Question 15** Calculer la fonction de transfert entre la sortie  $S_r(p)$  et par perturbation  $\Theta_{ext}(p)$  en boucle fermée. On prendra  $T_i = 21s$  et  $K_p = 0,15$ .

L'énoncé propose un choix de  $T_i$  qui est contraire au pôle qui a dû être compensé.

$$\frac{S_r}{\Theta_{ext}}(p) = \frac{21p(1+87p)}{2.83 * 0.15 * (1+154p)(1+21p) + 21p(1+202p)(1+21p)} \quad (10)$$

**Question 16** A partir du théorème de la valeur finale et pour un échelon unitaire de perturbation  $\Theta_{ext}(p)$ , calculer la valeur finale de  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_r(t)$ . Conclure quant à la réjection des perturbations pour des variations de la température extérieure.

En utilisant le théorème de la valeur finale (système stable) :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} \theta_r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p * \frac{21p(1+87p)}{2.83 * 0.15 * (1+154p)(1+21p) + 21p(1+202p)(1+21p)} * \frac{1}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_r(t) = 0 \quad (11)$$

Il y a réjection des perturbations de type échelon.

## 3 Modélisation de la puissance restituée par un panneau solaire

**Question 17** Estimer la surface des panneaux photovoltaïque nécessaires pour avoir une autonomie de 5 jours (utilisation de batteries), quelle que soit la période de l'année. Vous détaillerez votre démarche et

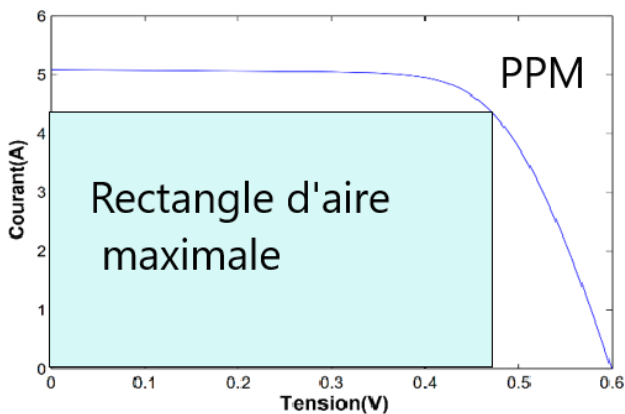
expliquez pourquoi l'influence de la température n'est pas prise en compte ici (courbe caractéristique rendement=f(température) non donnée).

Le calcul peut être fait pour le cas le plus défavorable, donc avec un rendement de la structure cristalline de 16% au mois de décembre. Comme le calcul est fait en décembre, la température ne va pas influencer le calcul, l'air ambiant refroidira les panneaux.

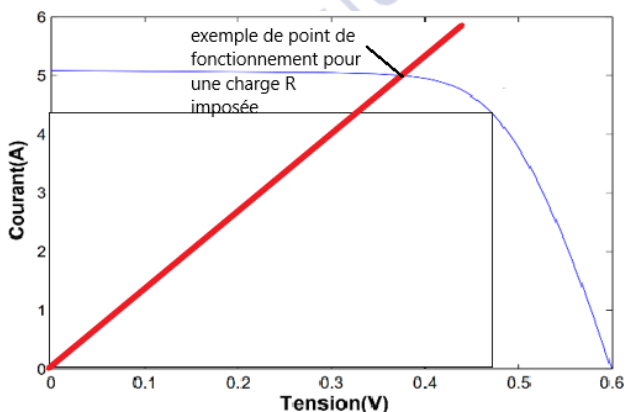
Pour une exposition en région parisienne avec une orientation optimale (100%), l'énergie reçue par le panneau sera par jour :  $E_p = S * 1100 * \frac{0.023}{31} * 0.16$  or on souhaite avoir une consommation de 18kWh donc la surface sera de  $S = 138m^2$  ce qui est plus grand que la surface du logement mais le calcul a été fait dans le cas le plus défavorable.

**Question 18** Localiser sur le graphique précédent le point de puissance maximale délivrée par la cellule. Donner une interprétation géométrique expliquant votre démarche.

Le point de puissance maximal (PPM) correspond au produit  $(UI)_{max}$ . Il correspond au point où l'aire du rectangle  $U \times I$  est la plus grande.



**Question 19** Expliquez pourquoi, lorsqu'on connecte une charge résistive R, la puissance délivrée par le générateur photovoltaïque est rarement maximale.

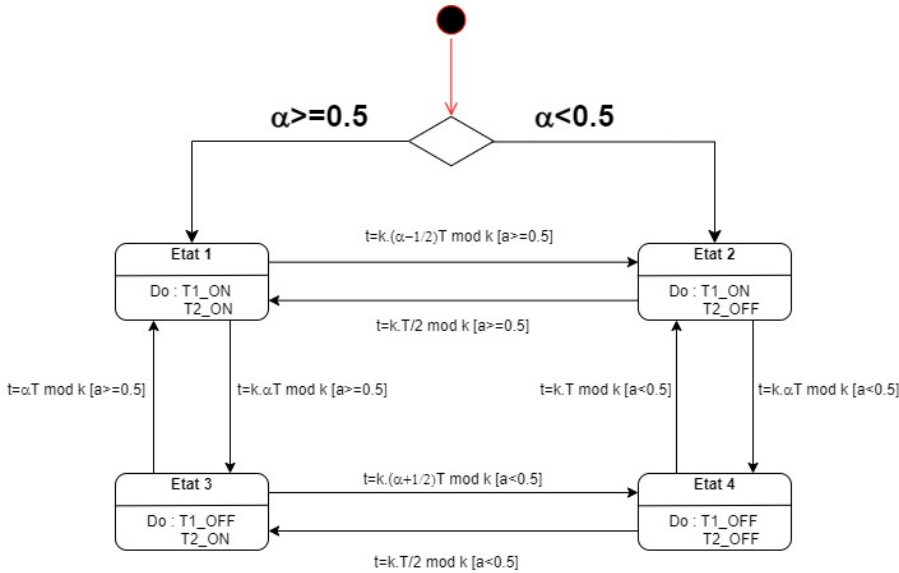


En imposant une charge résistive R, on fixe une courbe de fonctionnement :  $I_{PV} = U_{PV}/R$ . Cette courbe (une droite) ne passe pas obligatoirement par le point de puissance maximale.

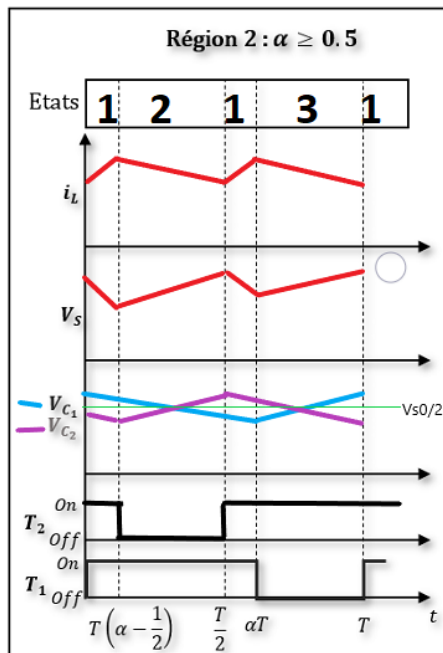
**Question 20** Compléter ce diagramme, Figure 10, en fonction des valeurs de  $\alpha$ , en régime établi. Quelle est la succession d'états pour la région 1 ? Pour la région 2 ?

Succession d'états de la région 1 : 2-4-3-4

Succession d'états de la région 2 : 1-2-1-3



**Question 21** Un diagramme d'états (incomplet) du CBTN est présenté sur le document réponse. Compléter les diagrammes de la région 2. Vous indiquerez la valeur  $V_{S0}/2$  sur le diagramme de  $V_{C1}$  et  $V_{C2}$ .



**Question 22** Quelle hypothèse permet de justifier le comportement linéaire des tensions aux bornes des condensateurs ? Justifier.

Le comportement des condensateurs peut être considéré comme linéaire si la période  $T$  est petite devant le temps de charge et décharge des condensateurs.

A l'état 1, on a  $i_{c1} = -i_s$ , soit  $C \frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{V_s}{R}$ , il faut donc que les variations de  $V_s$  soient faibles.

**Question 23** Pour les quatre états, exprimer  $\frac{di_L}{dt}$  en fonction de  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$ ,  $V_S$  et  $V_E$ .

$$\begin{aligned} \text{Etat 1 : } T_1 \text{ fermé } T_2 \text{ fermé } \quad \frac{di_L}{dt} &= \frac{V_E}{L} \\ \text{Etat 2 : } T_1 \text{ fermé } T_2 \text{ ouvert } \quad \frac{di_L}{dt} &= \frac{V_E - V_{C2}}{L} \\ \text{Etat 3 : } T_1 \text{ ouvert } T_2 \text{ fermé } \quad \frac{di_L}{dt} &= \frac{V_E - V_{C1}}{L} \\ \text{Etat 4 : } T_1 \text{ ouvert } T_2 \text{ ouvert } \quad \frac{di_L}{dt} &= \frac{V_E - V_S}{L} \end{aligned}$$

**Question 24** En déduire le gain  $G_V$  tel que  $V_{S0} = G_V V_E$ . Montrer que ce gain est indépendant de la région de fonctionnement.

Lorsqu'on est en régime permanent la valeur moyenne du courant dans la bobine est nul. Pour la région 1, les états sont 2-4-3-4 :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{di_L}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{\alpha T} \frac{V_E - V_{C2}}{L} dt + \int_{\alpha T}^{T/2} \frac{V_E - V_S}{L} dt + \int_{T/2}^{T/2 + \alpha T} \frac{V_E - V_{C1}}{L} dt + \int_{T/2 + \alpha T}^T \frac{V_E - V_S}{L} dt \right) \\ (V_E - \frac{V_{S0}}{2})\alpha + (V_E - V_{S0})(0.5 - \alpha) + (V_E - \frac{V_{S0}}{2})\alpha + (V_E - V_{S0})(0.5 - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } V_{S0} = \frac{1}{1-\alpha} V_E$$

Pour la région 2 les états sont 1,2,1,3 :

$$\left\langle \frac{di_L}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left( \int_0^{\alpha T - T/2} \frac{V_E}{L} dt + \int_{\alpha T - T/2}^{T/2} \frac{V_E - V_{C2}}{L} dt + \int_{T/2}^{\alpha T} \frac{V_E}{L} dt + \int_{\alpha T}^T \frac{V_E - V_{C1}}{L} dt \right)$$

et donc

$$\boxed{V_{S0} = \frac{1}{1-\alpha} V_E} \quad (12)$$

Le gain  $G_V = \frac{1}{1-\alpha}$  est indépendant de la région de fonctionnement.

**Question 25** Donner le domaine de validité du modèle présenté dans cette partie et proposer une explication pour les différences observées.

D'après la courbe en figure 12, le modèle est valable pour  $\alpha \in [0.10, 0.85]$ , pour des  $\alpha$  supérieurs la tension théorique est différente de celle réelle. Une explication possible : la capacité des condensateurs est trop faible pour alimenter la charge résistive en tension sur un cycle. L'étude est faite avec l'hypothèse d'une tension aux borne de la diode nulle, étude précédente a été faite avec les hypothèses suivantes ainsi que pas de pertes par commutation dans les semi-conducteurs ni dans les composants d'une manière générale, or il y a des imperfections sur tous les composants.

**Question 26** Donner les expressions de  $B$  et  $C$  et  $A_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . La loi des mailles nous donne quelque soit l'état :  $V_S = V_{C1} + V_{C2}$

Etat 1 :

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{V_E}{L} \\ \frac{dV_{C1}}{dt} &= \frac{-1}{RC} (V_{C1} + V_{C2}) \end{aligned}$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2})$$

Etat 2 :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_E - V_{C2}}{L}$$

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2})$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2}) - \frac{i_L}{C}$$

Etat 3 :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_E - V_{C1}}{L}$$

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2}) - \frac{i_L}{C}$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2})$$

Etat 4 :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_E - V_{C1} - V_{C2}}{L}$$

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2}) - \frac{i_L}{C}$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{-1}{RC}(V_{C1} + V_{C2}) - \frac{i_L}{C}$$

En conclusion

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \\ 0 & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \\ 0 & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Question 27** Donner l'expression de  $\bar{A}$  en fonction de la région de fonctionnement.

La matrice  $\bar{A}$  s'obtient en pondérant par la durée de chaque état les matrices  $A_i$  Pour la région 1 :

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \left( \alpha T A_2 + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) T A_4 + \alpha T A_3 + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) T A_1 \right)$$

$$\bar{A} = \alpha A_2 + \alpha A_3 + (1 - 2\alpha) A_4$$

Pour la région 2 (états 1-2-1-3) :

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \left( \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) TA_1 + (1 - \alpha) TA_2 + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) TA_1 + (1 - \alpha) TA_3 \right)$$

$$\bar{A} = (2\alpha - 1) A_1 + (1 - \alpha) A_2 + (1 - \alpha) A_3$$

**Question 28** Conclure sur la pertinence d'utiliser le modèle moyen pour représenter le comportement du contrôleur.

Le modèle moyen pourra représenter le comportement du contrôleur si la matrice  $\bar{A}$  ne dépend pas de la région. Or d'après la question précédente on trouve  $\bar{A}$  de la région 1 égale à celle en région 2. Le modèle peut être utilisé.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\alpha}{L} & \frac{-1+\alpha}{L} \\ \frac{1-\alpha}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \\ \frac{1-\alpha}{C} & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{RC} \end{pmatrix}$$

**Question 29** Associer à chaque figure un type de variation parmi les propositions suivantes : variation de température, de charge, d'ensoleillement.

La figure (a) correspond à une *variation d'ensoleillement*, la puissance et la tension varient.

La figure (b) correspond à une *variation de charge*, la courbe de puissance en fonction de la tension reste la même, le point de fonctionnement change car la courbe de charge croise la courbe de puissance en un point différent.

La figure (c) correspond à une *variation de température*, la puissance varie très peu.

**Question 30** Exprimer  $z_1$  en fonction de  $i_{PV}$ ,  $V_{PV}$  et éventuellement leurs dérivées partielles. En déduire la relation entre  $z_1$ ,  $C_p$ ,  $i_L$ ,  $i_{PV}$  et ses dérivées partielles.

$$z_1 = \frac{\partial P_{PV}}{\partial V_{PV}} = \frac{\partial (i_{PV} V_{PV})}{\partial V_{PV}}$$

$$z_1 = i_{PV} + V_{PV} \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{di_{PV}}{dt} + \frac{dV_{PV}}{dt} \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \frac{dV_{PV}}{dt} = \frac{di_{PV}}{dt} + \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right) \frac{dV_{PV}}{dt}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{di_{PV}}{dt} + \frac{1}{C_p} (i_{PV} - i_L) \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right) \quad (13)$$

**Question 31** A l'aide d'une constante  $K_1$ , déterminer une relation entre  $\dot{z}_1$  et  $z_1$  pour que la fonction  $V_1$  soit une bonne candidate pour assurer la stabilité du système.

D'après le théorème de Lyapunov pour que le système soit stable on doit avoir  $\dot{V}_1(z_1) < 0$   $\dot{V}_1(0) = 0$ .  
Or  $\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1$  donc si  $\dot{z}_1 = K_1 z_1$  avec  $K_1 < 0$  alors  $\dot{V}_1(z_1) < 0$  et  $\dot{V}_1(0) = 0$

$$\dot{z}_1 = K_1 z_1 \quad (14)$$

**Question 32** En déduire une relation entre  $K_1$ ,  $C_P$ ,  $i_{PV}$ ,  $i_L$  et  $V_{PV}$  (et leurs dérivées).

D'après les questions précédentes, on a :  $\dot{z}_1 = K_1 z_1$

$$\frac{di_{PV}}{dt} + \frac{1}{C_p} (i_{PV} - i_L) \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right) = K_1 \left( i_{PV} + V_{PV} \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} \right) \quad (15)$$

**Question 33** Exprimer  $\dot{z}_2$  en fonction de  $\alpha$ ,  $i_{LC}$  et des tensions  $V_{PV}$  et  $V_{DC}$ .

D'après la définition de  $z_2$  on détermine

$$\dot{z}_2 = \frac{di_L}{dt} - \frac{di_{LC}}{dt} = \frac{1}{L} (V_{PV} - (1 - \alpha) V_S) - \frac{di_{LC}}{dt} \quad (16)$$

**Question 34** Exprimer  $\dot{V}_1$  en fonction de  $z_1$ ,  $z_2$  et des grandeurs électriques du générateur photovoltaïque

On a  $i_{LC} = i_L - z_2$  et l'équation de la question 30 était :

$$\dot{z}_1 = \frac{di_{PV}}{dt} + \frac{1}{C_p} (i_{PV} - i_{LC}) \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right)$$

d'où :

$$\dot{z}_1 = \left[ \frac{di_{PV}}{dt} + \frac{1}{C_p} (i_{PV} - i_L - z_2) \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right) \right]$$

De plus  $\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1$  donc

$$\dot{V}_1 = z_1 \left[ \frac{di_{PV}}{dt} + \frac{1}{C_p} (i_{PV} - i_L - z_2) \left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right) \right] \quad (17)$$

**Question 35** Par un raisonnement similaire à la première fonction  $V_1$ , établir une relation entre  $z_2$  et  $\dot{z}_2$  avec une nouvelle constante  $K_2$ , pour que  $V_2$  puisse assurer la stabilité du système.

Par dérivation, on a :

$$\dot{V}_2 = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = -K_1 z_1^2 + z_2 \dot{z}_2$$

Le système sera stable si  $\dot{z}_2 = K_2 z_2$  avec  $K_2 < 0$  (même raisonnement que Q31)

**Question 36** En déduire l'expression du rapport cyclique  $\alpha$  qui permettra d'atteindre l'objectif de poursuite du point maximal de puissance.

D'après les questions précédentes  $\dot{z}_2 = K_2 z_2$  et

$$z_2 = \frac{C_p}{\left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right)} \left( \frac{di_{PV}}{dt} - \dot{z}_1 \right) + i_{PV} - i_L$$

d'où

$$\frac{1}{L} (V_{PV} - (1 - \alpha) V_S) - \frac{di_{LC}}{dt} = K_2 \frac{C_p}{\left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right)} \left( \frac{di_{PV}}{dt} - z_1 \right) + i_{PV} - i_L$$

On détermine alors  $\alpha$  qui permet d'atteindre l'objectif de poursuite du PMP :

$$\alpha = 1 + \frac{L}{V_S} \left( \frac{di_{LC}}{dt} + K_2 \frac{C_p}{\left( \frac{\partial i_{PV}}{\partial V_{PV}} + V_{PV} \frac{\partial^2 i_{PV}}{\partial V_{PV}^2} \right)} \left( \frac{di_{PV}}{dt} - z_1 \right) + i_{PV} - i_L \right) - \frac{V_{PV}}{V_S} \quad (18)$$

## 4 Construction d'une loi de pilotage prédictive

**Question 37** Exprimer la réponse impulsionnelle du  $u_{BOZ}(t)$  bloqueur. En déduire sa fonction de transfert  $U_{BOZ}(p)$ .

La réponse impulsionnelle temporelle s'écrit :  $u_{BOZ}(t) = u(t - t_0) - u(t - t_0 T_e)$  avec  $t_0$  l'origine temporelle. En appliquant la transformée de Laplace (CI nulles) à cette expression, on obtient :

$$U_{BOZ}(p) = e^{-t_0 p} \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \quad (19)$$

**Question 38** Ecrire l'équation différentielle à l'origine de la fonction de transfert  $G_r(p)$  puis, à l'aide de la méthode d'Euler explicite, formuler le problème sur un intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ .

La fonction de transfert  $G_r(p) = \frac{Y_r(p)}{X(p)} = \frac{K_r e^{-\eta_r p}}{1 + \tau_r p}$  est donnée par l'énoncé.

Les conditions initiales sont nulles donc dans le domaine temporel :

$$y_r(t) + \tau_r \frac{dy_r(t)}{dt} = K_r x(t - \eta_r)$$

La formulation d'Euler explicite s'écrit :

$$y_r(t_{k+1}) = y_r(t_k) + y_r'(y_r(t_k), t_k)$$

$$y_r(0) = 0$$

et d'après l'équation précédente :

$$y_r'(y_r(t_k), t_k) = \frac{1}{\tau_r} (K_r x(t_k - \eta_r) - y_r(t_k)) \quad (20)$$

**Question 39** En déduire l'équation de récurrence approchée à l'ordre 1, sous la forme :  $y_r(t_{k+1}) = \alpha_E y_r(t_k) + \beta_E x(t_{k+1} - \eta_r)$

D'après le résultat de la question précédente :

$$\beta_E = \frac{T_e}{\tau_r} K_r$$

$$\alpha_E = 1 - \frac{T_e}{\tau_r}$$

**Question 40** Comparer les coefficients  $(\alpha_r, \beta_r)$  et  $(\alpha_E, \beta_E)$  et formuler une relation entre  $T_e$  et  $\tau_r$  pour que le schéma d'Euler soit précis.

$$\alpha_r = e^{-\frac{T_E}{\tau_r}}$$

Le développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle s'écrit :

$$\alpha_r \approx 1 - \frac{T_E}{\tau_r} = \alpha_E$$

Donc si  $T_E \ll \tau_r$  on retrouve l'équation précédente, le schéma d'Euler est précis.

**Question 41** Déterminer la loi de commande prédictive du système de régulation :

$$y_r(t_{k+H}) = f(y_r(t_k), x(t_k), \alpha_E, K_r)$$

En procédant par récurrence :

$$y_r(t_{k+1}) = \alpha_E y_r(t_k) + K_r(1 - \alpha_E)x(t_k)$$

$$y_r(t_{k+2}) = \alpha_E y_r(t_{k+1}) + K_r(1 - \alpha_E)x(t_k) = \alpha_E^2 y_r(t_k) + K_r(1 - \alpha_E^2)x(t_k)$$

$$y_r(t_{k+3}) = \alpha_E y_r(t_{k+2}) + K_r(1 - \alpha_E)x(t_k) = \alpha_E^3 y_r(t_k) + K_r(1 - \alpha_E^3)x(t_k)$$

On en déduit :

$$y_r(t_{k+H}) = \alpha_E^H y_r(t_k) + K_r(1 - \alpha_E^H)x(t_k) \quad (21)$$

**Question 42** Par analogie, exprimer la commande prédictive du modèle :  $y_m(t_{k+H}) = f(y_m(t_k), x(t_k), \alpha_E, K_m)$

Par analogie

$$y_m(t_{k+H}) = \alpha_E^H y_m(t_k) + K_m(1 - \alpha_E^H)x(t_k) \quad (22)$$

**Question 43** En exploitant la coïncidence à  $t_{k+H}$ , déterminer l'incrément  $\Delta_r(t_{k+H})$  en fonction de  $y_c$ ,  $y_{ref}(t_k)$  et  $\lambda = e^{-T_e/\tau_c}$ .

$$\Delta_r(t_{k+H}) = (y_c - y_{ref}(t_k))(1 - e^{-\frac{-t_{k+H}-t_k}{\tau_c}})$$

$$\Delta_r(t_{k+H}) = (y_c - y_{ref}(t_k))(1 - e^{-\frac{H \cdot T_e}{\tau_c}})$$

$$\Delta_r(t_{k+H}) = (y_c - y_{ref}(t_k)) \cdot (1 - \lambda^H) \quad (23)$$

**Question 44** Exprimer l'incrément lié au modèle  $\Delta_m(t_{k+H})$  en fonction de  $y_m(t_k)$ ,  $x(t_k)$ ,  $\alpha_E$ ,  $K_m$  et  $H$ .

$$\Delta_m(t_{k+H}) = \alpha_E^H y_m(t_k) + K_m (1 - \alpha_E^H) x(t_k) - y_m(t_k)$$

$$\Delta_m(t_{k+H}) = (1 - \alpha_E^H) (K_m x(t_k) - y_m(t_k)) \quad (24)$$

**Question 45** En exprimant la coïncidence, à l'horizon  $t_{k+H}$ , entre l'écart réel et l'écart du modèle, exprimer la loi de commande  $x(t_k)$  en fonction de  $y_m(t_k)$ ,  $y_r(t_k)$ ,  $y_c$ ,  $\alpha_E$ ,  $K_m$  et  $H$ .

La coïncidence nous permet d'écrire :  $\Delta_r(t_{k+H}) = \Delta_m(t_{k+H})$

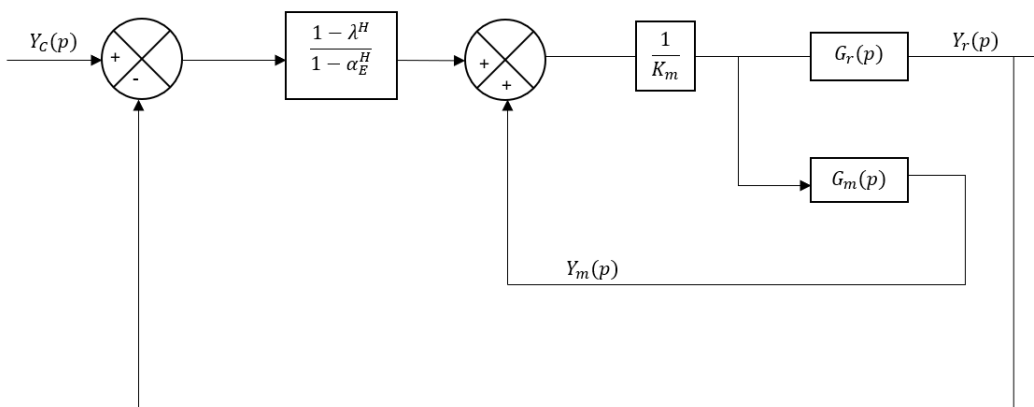
donc :

$$(y_c - y_r(t_k)) (1 - \lambda^H) = (1 - \alpha_E^H) (K_m x(t_k) - y_m(t_k))$$

Et enfin

$$x(t_k) = \frac{1}{K_m} \left( \frac{(y_c - y_r(t_k)) (1 - \lambda^H)}{(1 - \alpha_E^H)} + y_m(t_k) \right) \quad (25)$$

**Question 46** Compléter le schéma bloc modélisant cette commande prédictive, Figure 21 :



**Question 47** Cet apprentissage doit-il utiliser une méthode de régression ou de classification ?

Les valeurs de sorties ne sont pas continues, il y a 6 classes : il s'agit donc d'une méthode de classification.

**Question 48** Sans rentrer dans le niveau de détail d'un algorithme, donner les différentes étapes de cet apprentissage et associer une méthode de classification ou de régression (selon la réponse à la question précédente).

Nous pouvons utiliser ici l'algorithme des K moyennes. Les différentes étapes de cet algorithme sont :

- Initialiser K centres aléatoirement.

- Calculer les distances de chaque observation aux centres choisis.
- Affecter chaque observation au centre le plus proche.
- Calculer les nouveaux centres.
- Si les centres ont été modifiés (ou si les catégories ont changé), on recommence, sinon, on s'arrête.

**Question 49** Evaluer la sensibilité de chaque classe de la matrice. Cet apprentissage est-il performant (sensibilité > 80%) ?

La sensibilité se détermine à partir de la matrice de confusion. On calcule le rapport du nombre de bonne prédiction sur le nombre de faux négatif.

$$\text{Classe 1 Sensibilité } \frac{24}{24+5+1} = 80\%$$

$$\text{Classe 2 Sensibilité } \frac{33}{33+3+1+4+1} = 78\%$$

$$\text{Classe 3 Sensibilité } \frac{90}{90+1+2+3+5} = 90\%$$

$$\text{Classe 4 Sensibilité } \frac{86}{86+3+5+2} = 90\%$$

$$\text{Classe 5 Sensibilité } \frac{29}{29+1+2+3} = 83\%$$

$$\text{Classe 6 Sensibilité } \frac{17}{17+7} = 71\%$$

Le critère de sensibilité n'est pas respecté pour les classes 2, 3 et 6.

**Question 50** Les caractéristiques du logement sont susceptibles d'évoluer au cours du temps. Proposer un autre choix d'apprentissage permettant d'améliorer les performances de ce modèle.

Lorsque les caractéristiques du logement évoluent au cours du temps on n'aura plus de donnée qui correspondent au logement pour l'apprentissage. Il faut alors penser à une méthode d'apprentissage non supervisée.