

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2022

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Stabilisateur gyroscopique de bateau

Corrigé UPSTI

1 Introduction

Le système étudié est un dispositif de stabilisation gyroscopique pour bateaux permettant de neutraliser le mouvement de roulis. Cette rotation suivant l'axe longitudinal du navire est la première cause du mal de mer. Si l'idée d'utiliser un gyroscope pour stabiliser un bateau remonte à plus d'un siècle, sa mise en œuvre n'est que très récente notamment grâce à la société Seakeeper. Les principaux verrous technologiques étaient la capacité à mettre et maintenir en rotation un volant d'inertie à des vitesses très élevées ainsi qu'à développer des moyens de contrôles actifs afin de s'adapter à toutes les conditions de houle. La demande concerne en particulier la navigation de plaisance (yacht) avec une exigence de performance forte lors de la phase de fonctionnement bateau à l'arrêt, ancre descendue.

2 Gestion du système

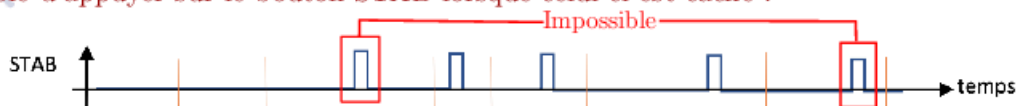
Objectif

L'objectif de cette partie est d'appréhender les modes de fonctionnement du stabilisateur gyroscopique.

Question 1 En vous aidant du diagramme d'état, compléter le tableau du document réponses en entourant pour chaque situation repérée S1 à S7 ce qui est affiché à l'écran et en précisant la couleur pour les boutons (bleu, gris ou caché si le bouton n'est pas présent). Entourer sur le chronogramme les actions sur les boutons qui sont impossibles.

Situation	Zone d'affichage	Bouton ON/OFF	Bouton STAB	Barre de progression visible
S1	Courbe	Gris	Caché	Non
S2	Courbe	Bleu	Caché	Oui
S3	Courbe	Bleu	Gris	Oui
S4	Courbe	Bleu	Bleu	Oui
S5	Courbe	Bleu	Gris	Non
S6	Cadran	Bleu	Bleu	Non
S7	Cadran	Gris	Caché	Non

Il est impossible d'appuyer sur le bouton STAB lorsque celui-ci est caché :



3 Modélisation du système de contrôle

Objectif

La compréhension de l'architecture du stabilisateur gyroscopique et sa mise en équation permet dans cette

On isole l'ensemble $\{2+3\}$ (moteur inclus). Le B.A.M.E. donne :

$$\begin{aligned} \bullet \{ \mathcal{T}_{Modulateur \rightarrow 2} \} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_h(t) \\ C_h(t) \vec{y}_2 \end{array} \right\}_O \\ \bullet \{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow 3} \} &= \left\{ \begin{array}{c} -M_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \\ \bullet \{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \} &= \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{y}_2), (-\vec{y}_2, -)} \end{aligned}$$

On choisit d'appliquer le **PFD au point O** (pour ne déplacer aucun torseurs) **en moment projeté sur \vec{y}_2** pour ne faire apparaître aucune des inconnues de $\{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \}$.

Calcul du moment dynamique en O :

$$\vec{\delta}_{\{2,3\}/0}(O) = \vec{\delta}_{3/0}(O) \text{ car les masses et inerties de la pièce 2 sont négligées.}$$

$$\vec{\delta}_{3/0}(O) = \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{3/0}(O) \right|_0 \text{ car O est le centre d'inertie de 3.}$$

$$\vec{\sigma}_{3/0}(O) = [I(O, 3)] \cdot \vec{\Omega}_{3/0} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{B_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_3 \dot{\alpha} \cos \beta \\ A_3 \dot{\beta} \\ C_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \end{pmatrix}_{B_2}$$

Par dérivation du produit $\left. \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{3/0}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{3/0}(O) \right|_0 \cdot \vec{y}_2 + \vec{\sigma}_{3/0}(O) \cdot \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0$ d'où :

$$\vec{\delta}_{3/0}(O) \cdot \vec{y}_2 = \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{3/0}(O) \right|_0 \cdot \vec{y}_2 = \left. \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{3/0}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 - \vec{\sigma}_{3/0}(O) \cdot \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0$$

$$\text{On a d'une part : } \left. \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{3/0}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\beta}) \right|_0 = A_3 \ddot{\beta}$$

$$\text{et d'autre part : } \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0 = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\alpha} \vec{z}_1 = \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 - \sin \beta \vec{x}_2)$$

Application du TMD en O projeté sur \vec{y}_2 :

$$\vec{\delta}_{3/0}(O) \cdot \vec{y}_2 = C_h(t) = A_3 \ddot{\beta} + A_3 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta$$

$$\text{d'où : } \boxed{C_h(t) = A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \beta}$$

Question 7 Linéariser l'équation de mouvement obtenue à la **Question 6** en tenant compte des hypothèses formulées précédemment.

Lorsque $\beta \rightarrow 0$, on a à l'ordre 1 : $\sin \beta \rightarrow \beta$ et $\cos \beta \rightarrow 1$, d'où :

$$A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \beta - C_3 \dot{\gamma} \dot{\alpha} = C_h(t)$$

De plus, $\dot{\gamma} = \omega_m \gg \dot{\alpha}$ (approximation gyroscopique) donc on néglige le terme en $\dot{\alpha}^2 \beta$ devant celui en $\dot{\gamma} \dot{\alpha}$.

$$\text{D'où : } \boxed{A_3 \ddot{\beta} = C_h(t) + C_3 \omega_m \dot{\alpha}}. \text{ On identifie } \boxed{I_g = A_3}$$

Question 8 A partir des deux équations de dynamique (**eq1**, **eq2**), déterminer la fonction de transfert $H(p)$ telle que $\alpha(p) = H(p) \cdot C_{mer}(p)$ (avec $C_h = 0$) et la mettre sous la forme $\frac{1}{K + Ap + Bp^2}$ où les expressions de K , A et B seront précisées. Indiquer en le justifiant si le système, de fonction de transfert $H(p)$, est stable.

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$\text{(eq1)} \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m p \alpha(p)$$

$$\text{(eq2)} \Rightarrow I_b p^2 \alpha(p) = C_{mes}(p) - f_b p \alpha(p) - k_b \alpha(p) - C_3 \omega_m p \beta(p)$$

d'où, avec $C_h(p) = 0$, (eq1) dans (eq2) donne :

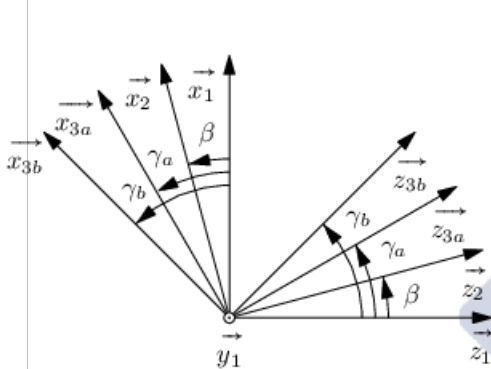
$$\alpha(p) \left(I_b p^2 + f_b p + k_b + C_3 \omega_m \dot{p} \frac{C_3 \omega_m \dot{p}}{I_g p^2} \right) = C_{mes}(p)$$

soit
$$H(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{\left(k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \right) + f_b p + I_b p^2}$$
 On identifie :
$$\begin{cases} K = k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \\ A = f_b \\ B = I_b \end{cases}$$

Ce système est **stable** car c'est un **système d'ordre 2 à coefficients positifs** (critère de Routh simplifié).

3.2.2 Modélisation de la structure articulée

Question 9 Déterminer une équation donnant l'évolution de λ_a en fonction de β et une autre équation reliant l'angle γ_a en fonction β .



On a la fermeture : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

soit $e \vec{z}_2 - \lambda_a \vec{x}_{3a} = -L \vec{x}_1 + d \vec{z}_1$

or $\vec{z}_2 = \cos \beta \vec{z}_1 + \sin \beta \vec{x}_1$ et $\vec{x}_{3a} = \cos \gamma_a \vec{x}_1 - \sin \gamma_a \vec{z}_1$

d'où en projection sur (\vec{x}_1, \vec{z}_1) :

$$\begin{cases} e \sin \beta - \lambda_a \cos \gamma_a = -L & (1) \\ e \cos \beta + \lambda_a \sin \gamma_a = d & (2) \end{cases}$$

On isole : $\lambda_a^2 (\cos^2 \gamma_a + \sin^2 \gamma_a) = (e \sin \beta + L)^2 + (d - e \cos \beta)^2$

soit $\lambda_a = +\sqrt{(e \sin \beta + L)^2 + (d - e \cos \beta)^2}$ car $\lambda_a > 0$.

De plus, (1) $\Rightarrow \lambda_a = \frac{e \sin \beta + L}{\cos \gamma_a}$, soit en réintégrant dans (2) : $e \cos \beta + (e \sin \beta + L) \tan \gamma_a = d$ d'où :

$$\gamma_a = \arctan \left(\frac{d - e \cos \beta}{e \sin \beta + L} \right)$$

Question 10 Justifier que $\vec{F}_a = F_a \vec{x}_{3a}$ (respectivement $\vec{F}_b = F_b \vec{x}_{3b}$). Détailler le ou les systèmes mécaniques isolés, le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ces systèmes, le ou les théorèmes généraux utilisés.

La pesanteur étant négligée, **le vérin {3a,4a} est soumis à 2 glisseurs** : $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3a}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{23a} & - \\ - & 0 \\ Z_{23a} & - \end{matrix} \right\}_{A,(-\vec{y}_1,-)}$ et

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 4a}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{14a} & - \\ - & 0 \\ Z_{14a} & - \end{matrix} \right\}_{B,(-\vec{y}_1,-)}$$

En effet, en modélisation plane de normale \vec{y}_1 , les actions mécaniques des pivots d'axe (P, \vec{y}_1) sont des glisseurs.

On note $\vec{F}_{23a} = X_{23a} \vec{x}_1 + Z_{23a} \vec{z}_1$

En déplaçant le torseur au point B, on obtient : $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3a}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{23a} \\ \vec{BA} \wedge \vec{F}_{23a} \end{matrix} \right\}_B$

On néglige les effets dynamiques, **le théorème du moment statique en B** donne donc : $\vec{BA} \wedge \vec{F}_{23a} = \vec{0}$

On en déduit que \vec{F}_{23a} est porté par le vecteur directeur de $\vec{BA} = \lambda_a \vec{x}_{3a}$ et $\vec{F}_a = -\vec{F}_{23a}$ (actions réciproques)

également : $\boxed{\vec{F}_a = F_a \vec{x}_{3a}}$

Question 11 Déterminer le moment C_h correspondant à la somme des moments en O exercés par les deux vérins.

La pièce 2 est soumise à :

- $\{\mathcal{T}_{3a \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$
- $\{\mathcal{T}_{3b \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_b \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
- la liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) avec 1.

La somme \vec{C}_h de ces moments en O vaut :

$$\vec{C}_h = \vec{OA} \wedge \vec{F}_a + \vec{OC} \wedge \vec{F}_b = e \vec{z}_2 \wedge F_a \vec{x}_{3a} + (-e \vec{z}_2) \wedge F_b \vec{x}_{3b} = (e F_a \sin(\pi/2 + (\gamma_a - \beta)) - e F_b \sin(\pi/2 + (\gamma_b - \beta))) \vec{y}_1$$

d'où : $\boxed{C_h = e (F_a \cos(\gamma_a - \beta) - F_b \cos(\gamma_b - \beta))}$

Remarque : F_a et F_b sont de signes opposés.

Question 12 A partir de la courbe **Figure 9**, formuler une hypothèse sur les angles γ_a et γ_b sachant que l'angle β varie entre $\pm 45^\circ = \pm 0.7 \text{rad}$. En déduire une relation approchée sur le moment C_h tenant compte de l'hypothèse formulée.

L'angle γ_a reste très faible devant β sur toute la plage de variation de ce dernier (visiblement inférieur à 0.1rad). D'où : $\beta \gg \gamma_a$.

De même $\beta \gg \gamma_b$, ainsi : $\boxed{C_h = e \cos \beta (F_a - F_b)}$

Question 13 A l'aide des équations (eq 1, eq 2, eq 3) et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert H_1 à H_6 du schéma-blocs du document réponses.

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$\begin{cases} \text{eq3} \Rightarrow Q(p) = S e \Omega_\beta(p) + \frac{V_0}{2 B S e} p C_h(p) \\ \text{eq1} \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m \Omega_\alpha(p) \\ \text{eq2} \Rightarrow (I_b p^2 + f_p p + k_b) \alpha(p) = C_{mer}(p) - C_3 \omega_m \Omega_\beta(p) \end{cases}$$

$$\text{eq3} \Rightarrow C_h(p) = \underbrace{\frac{2 B S e}{p V_0}}_{H_1(p)} (Q(p) - \underbrace{S e}_{H_6(p)} \Omega_\beta(p))$$

$$\text{eq1} \Rightarrow \Omega_\beta(p) (= p \beta(p)) = \underbrace{\frac{1}{I_g p}}_{H_2(p)} (C_h(p) + \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\alpha(p))$$

$$\text{eq2} \Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{\underbrace{I_b p^2 + f_p p + k_b}_{H_4(p), H_5(p)}} (C_{mer}(p) - \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\beta(p)). \text{ Or } H_5(p) \text{ est un intégrateur : } H_5(p) = \frac{1}{p} \text{ ce qui}$$

permet de déduire :

$H_1(p) = \frac{2 B S e}{p V_0}$	$H_2(p) = \frac{1}{I_g p}$
$H_3(p) = -C_3 \omega_m$	$H_4(p) = \frac{p}{I_b p^2 + f_p p + k_b}$
$H_5(p) = \frac{1}{p}$	$H_6(p) = S e$

Question 14 Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme donnée où l'on précisera l'expression

de H_b et H_a en fonction de H_1 à H_6 uniquement.

On cherche à identifier la forme suivante issue du schéma-blocs de l'énoncé : $\alpha(p) = H_b(p)(K_{sv}I(p) - H_a C_{mer}(p))$

Par lecture sur le schéma-blocs initial, on obtient :

$$\alpha(p) = H_5 H_6 \left[C_{mer}(p) + H_3 H_2 \left(-H_3 \Omega_\alpha(p) + H_1 (K_{sv} I(p) - H_6 \Omega_\beta(p)) \right) \right]$$

$$\text{Or, } \Omega_\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{H_5} \text{ et } (\Omega_\beta(p) H_3 + C_{mer}(p)) H_4 H_5 = \alpha(p), \text{ soit } \Omega_\beta(p) = \left(\frac{\alpha(p)}{H_4 H_5} - C_{mer}(p) \right) \frac{1}{H_3}$$

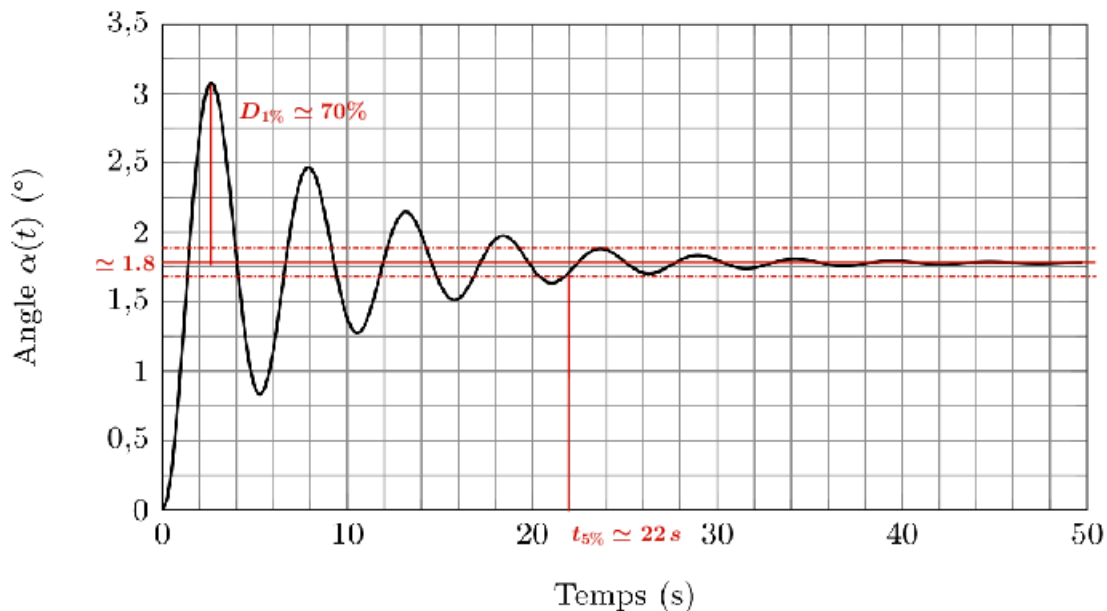
$$\text{d'où : } \alpha(p) = C_{mer}(p) \left(H_4 H_5 + \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3} \right) + I(p) (H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 K_{sv}) \\ + \alpha(p) \left(-\frac{H_2 H_3^2 H_4 H_5}{H_5} - \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3 H_4 H_5} \right)$$

$$\text{Après une factorisation en } \alpha(p), \text{ on identifie : } H_b = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$$

$$\text{et } H_b H_a = -\frac{H_4 H_5 + H_1 H_2 H_4 H_5 H_6}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6} = H_b \left(-\frac{H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5} \right)$$

$$\text{d'où : } H_a = -\frac{1 + H_1 H_2 H_6}{H_1 H_2 H_3}$$

Question 15 Proposer un modèle de comportement de la chaîne d'action (fonction de transfert $G(p) = K_{sv} H_b$ à partir de la réponse indicielle. Identifier les valeurs numériques des paramètres caractéristiques intervenant dans la fonction de transfert.



On propose un modèle d'ordre 2 (présence de dépassements) : $H_b(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

$$K = \frac{\alpha(\infty)}{i(0)} = \frac{1.8}{1}, \quad K = 1.8^\circ \cdot A^{-1}$$

$$D_{1\%} = \frac{3.1 - 1.8}{1.8} \simeq 70\%. \text{ On lit sur l'abaque 2 que ce dépassement correspond à } \xi = 0.1.$$

$$\text{On lit } t_{5\%} \simeq 22s. \text{ Or } \xi = 0.1 \text{ donc l'abaque 1 donne : } t_{5\%} \cdot \omega_0 = 30, \text{ soit } \omega_0 \simeq 1.4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

4 Performances du système de contrôle

Objectif

Dans cette partie, un modèle complet de l'asservissement en roulis du bateau est construit afin d'en étudier les performances. Le choix des correcteurs et l'optimisation de leurs paramètres de réglage vis-à-vis des performances attendues permettent de conclure sur les capacités de stabilisation du dispositif.

Question 16 Déterminer l'erreur statique associée à une entrée $\alpha_c(t)$ en échelon d'amplitude α_{c0} (avec $C_{mer} = 0$). En déduire la valeur minimale de K_p assurant le critère de précision.

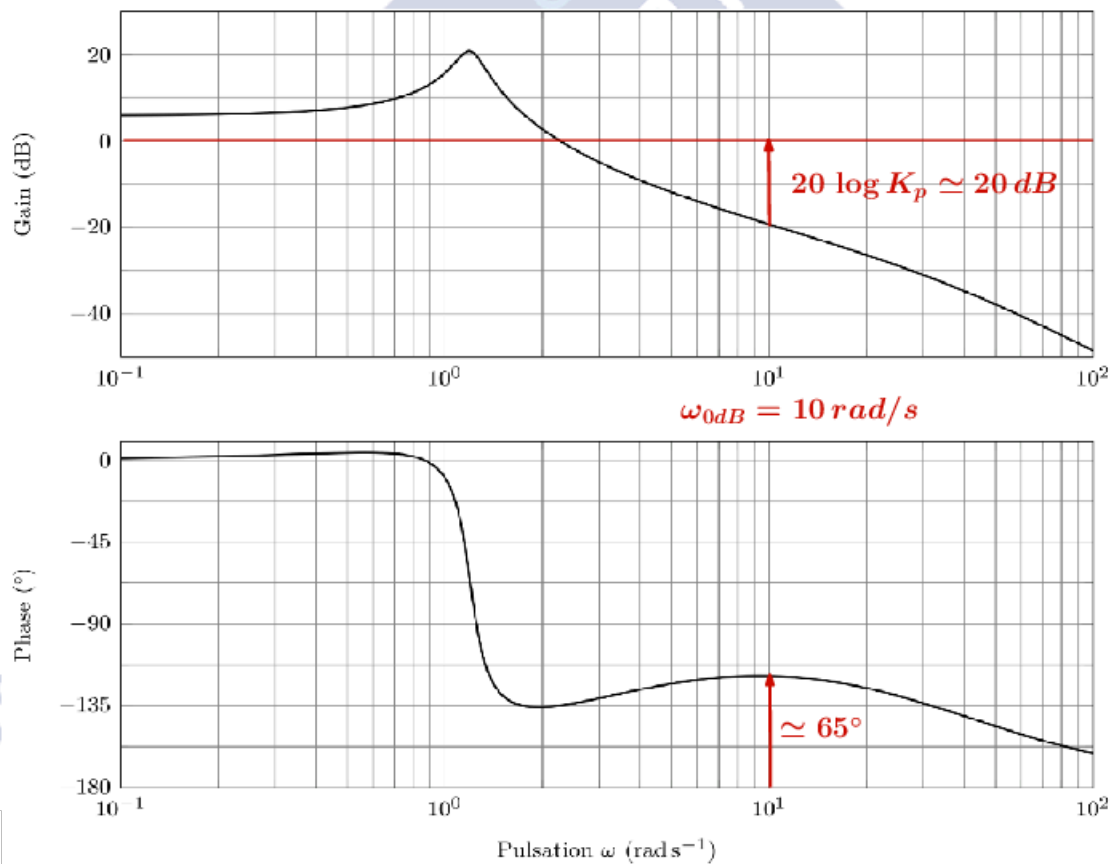
Ce schéma est à retour unitaire, on utilise donc directement : $\mu_S = \frac{1}{1 + K_{BO}}$ car la FTBO est de classe nulle.

$$\text{D'où : } \mu_S = \frac{1}{1 + K_{sv}K_bK_p}$$

$$\text{On a } \mu_S \geq 5\% \text{ si } \frac{1}{1 + K_{sv}K_bK_p} \geq 0.05 \text{ soit } K_p \geq \frac{0.95}{K_{sv}K_b}.$$

$$\text{A.N. : } K_p \geq \frac{0.95}{2} = 0.48 \text{ A.rad}^{-1}$$

Question 17 Déterminer la valeur de K_p permettant de respecter le critère de bande passante à 0 dB (on laissera éventuellement la valeur de K_p sous la forme 10^x). Vérifier que le critère de marge de phase est respecté également.



On doit traduire la courbe de $+20 \log K_p \approx 20 \text{ dB}$ pour obtenir $\omega_{0\text{dB}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, d'où $K_p = 10 \text{ A.rad}^{-1}$

On lit $M_\varphi \approx 65^\circ$ qui respecte le cahier des charges.

Question 18 Donner la forme de l'expression de l'angle en régime établi $\alpha(t)$ en réponse à cette entrée

sinusoïdale $C_{mer}(t)$. Compléter le tableau du document réponses. Conclure sur l'intérêt de ce système avec stabilisation gyroscopique.

Expression de $\alpha(t) = C_0 |H_r(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

Pulsation	Rapport d'amplitude		Déphasage	
	Sans stabilisation	Avec stabilisation	Sans stabilisation	Avec stabilisation
1 rad/s	$10^{-\frac{90}{20}}$	$10^{-\frac{111}{20}}$	-20°	$\simeq -20^\circ$
10 rad/s	$10^{-\frac{135}{20}}$	$10^{-\frac{134}{20}}$	-180°	$\simeq -165^\circ$

Conclusion : On constate qu'à basse fréquence, le couple ressenti après stabilisation est bien plus faible et diminue d'un facteur 10 environ à 1 rad/s.

A haute fréquence, le stabilisateur a peu d'influence mais le couple était déjà très atténué.

La phase n'a aucune incidence sur le ressenti des passagers quelle que soit la fréquence.

Question 19 Préciser la pulsation du moment C_{mer} notée ω_{mer} utilisée dans la simulation temporelle. Préciser l'atténuation apportée par le système de stabilisation à partir de la réponse temporelle.

Entre 10 et 35 secondes, on observe 4 périodes complètes, donc : $\omega_{mer} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{25/4}$. A.N. : $\omega_{mer} \simeq 1 \text{ rad.s}^{-1}$

On passe d'une amplitude (crêtes à crêtes) de environ 60° à des oscillations d'amplitudes de l'ordre de 6° , soit une atténuation de l'ordre de $\frac{6}{60} = 0.1$. Cette atténuation d'un facteur 10 est très proche de celle lue sur le

digramme de Bode (Question 18). En effet, $\frac{10^{-\frac{111}{20}}}{10^{-\frac{90}{20}}} = 10^{-\frac{21}{20}} \simeq 0.1$.