

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2020

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Modélisation CCINP TSI 2020

Eléments de correction

Partie I – Présentation

I.2 Analyse de l'accélération humaine

Q1. Déterminer l'amplitude maximale des raies d'accélération et la fréquence associée.

Après lecture directe sur la figure 4, on relève les valeurs suivantes :

Partie du corps	Bras	Poitrine	Hanche
Amplitude maxi des raies d'accélération	7,8 g	5 g	6,8 g
Fréquence associée	3 Hz	3 Hz	3 Hz

Les fréquences associées sont identiques.

Q2. La vitesse de course est $v = 6,4 \text{ km/h}$, en déduire la longueur de foulée et préciser si cette valeur est cohérente.

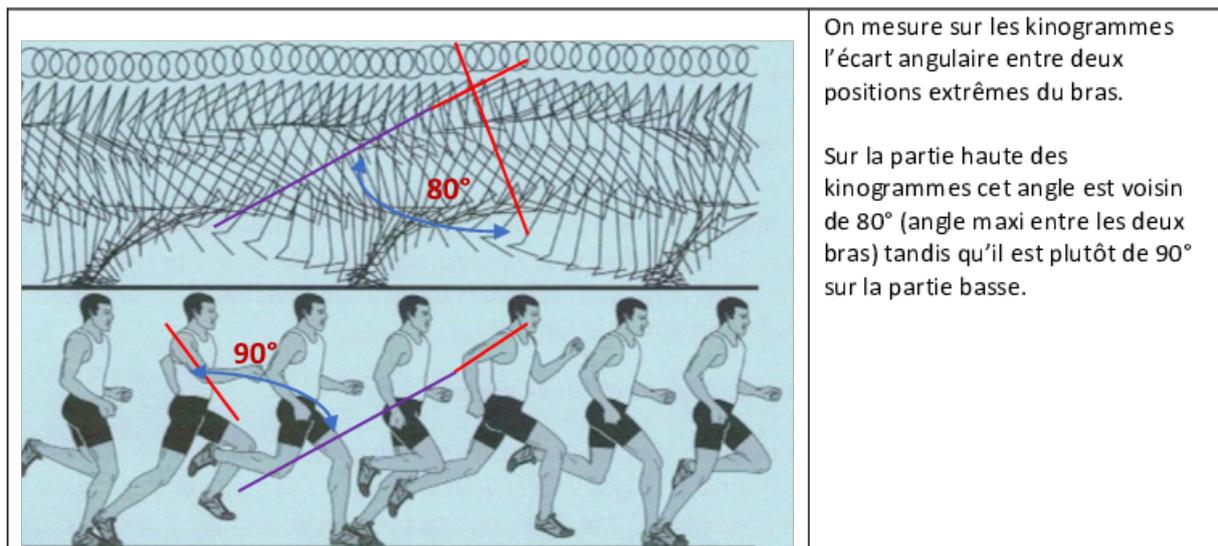
On a trouvé que la fréquence des accélérations est de 3 Hz, cela signifie que le coureur effectue trois « pas » chaque seconde et donc 3×3600 pas pour parcourir 6 400m chaque heure.

Par conséquent, la longueur d'un « pas » ou encore de la foulée est donnée par

$$6400/3 \times 3600 = 0,59 \text{ m} = \text{longueur d'un pas}$$

C'est une valeur physiologiquement cohérente.

Q3. Déterminer l'amplitude angulaire des bras à 10° près et justifier le choix d'exploiter les mouvements de balancier des membres de la personne.



On mesure sur les kinogrammes l'écart angulaire entre deux positions extrêmes du bras.

Sur la partie haute des kinogrammes cet angle est voisin de 80° (angle maxi entre les deux bras) tandis qu'il est plutôt de 90° sur la partie basse.

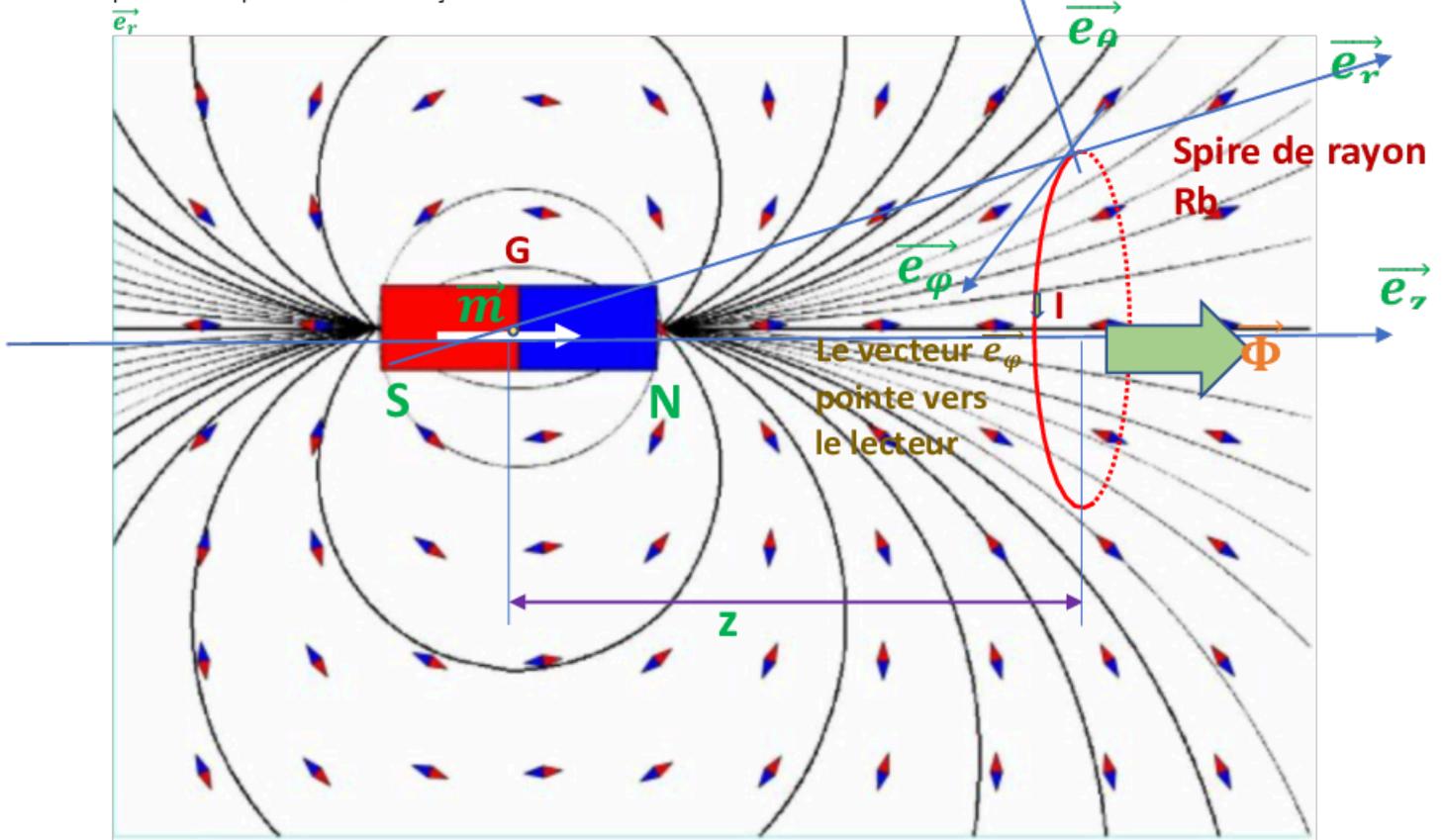
Il est préférable d'exploiter les mouvements de balancier sur les membres car ce sont les parties du corps qui offrent les plus grandes amplitudes angulaires, qui seront donc les plus faciles à détecter et à mesurer.

Partie II – Principe de la conversion d'énergie

II.1 Principe du couplage électromécanique

Q4. Expliquer l'origine d'un courant induit I dans le circuit et prévoir son sens en donnant son signe d'après la loi de Lenz.

La situation magnétique de l'ensemble, lorsque l'axe magnétique de la bille est confondu avec celui de la spire peut être représentée de la façon suivante :



Le flux Φ embrassé par la spire et créé par la bille magnétique dépend de deux choses :

- De la distance z entre le centre G de la bille et celui de la spire (Φ augmente lorsque z diminue)
- Et de l'angle entre \vec{m} et \vec{e}_z (l'influence est maximale lorsque \vec{m} et \vec{e}_z sont colinéaires), cet angle sera plus tard appelé β

Ainsi, si β est maintenu à 0° et que z diminue, on peut raisonner de la façon suivante :

- Sur un intervalle de temps Δt on dit que Φ augmente et passe de Φ à $\Phi + \Delta\Phi$
- La loi de Lenz commande que la spire sera alors le siège d'une fem e_{ind} dont l'effet sera de s'opposer à cette augmentation de flux $\Delta\Phi$
- Il faut donc que l'action du courant I induit par e_{ind} soit de créer un flux $\Delta\Phi_{ind}$ opposé à $\Delta\Phi$,
- Donc $\Delta\Phi_{ind}$ doit être orienté vers la gauche sur le schéma ci-dessus
- Et en utilisant, par exemple, la règle du tire-bouchon de Maxwell, on conclut que le **courant induit** est orienté selon \vec{e}_ϕ au point M

II.2 Etude de la conversion d'énergie mécano-électrique

Q5. En supposant que la bille se déplace à vitesse constante v , déterminer la fem e_{ind} sur la bobine de N spires supposées confondues.

Hypothèse : on suppose que le flux Φ est maximal ($\beta = 0$) et vaut la valeur donnée dans l'énoncé
On écrit alors son expression :

$$e_{ind} = N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{\mu_0 m R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{5/2}} \cdot 2zz \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot N \mu_0 m R_b^2 \frac{zv}{(z^2 + R_b^2)^{5/2}} = e_{ind}$$

En déduire une expression du courant induit I .

$$I = \frac{e_{ind}}{Rc}$$

Et de la puissance électrique extraite

$$P_{elec} = \frac{e_{ind}^2}{Rc}$$

Q6. Déterminer une expression du coefficient d'amortissement c_e et expliquer pourquoi et comment le maximiser.

Si on suppose que toute la puissance $\mathcal{P}m$ est convertie alors :

$$\mathcal{P}e = -\mathcal{P}m = c_e \cdot v^2 = \frac{e_{ind}^2}{Rc} = \frac{9}{4Rc} \cdot \frac{(N\mu_0 m R_b^2 z v)^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$$

Et le coefficient c_e devient alors :

$$c_e = \frac{9}{4Rc} \cdot \frac{(N\mu_0 m R_b^2 z)^2}{(z^2 + R_b^2)^5}$$

Pour maximiser ce coefficient :

- Il faut choisir Rc la plus petite possible
- N et m le plus grands possible,
- Pourquoi pas une bille avec plusieurs axes magnétiques

L'intérêt d'avoir c_e le plus grand possible est de disposer d'un couplage électromagnétique le plus efficace et de récupérer le plus de puissance possible.

II.3 Etude de l'énergie électrique produite

Q7. Etudier la parité de $\mathcal{P}e$. Que peut-on en déduire pour ses variations ?

$\mathcal{P}e$ est une fonction paire car $\mathcal{P}e(-z) = \mathcal{P}e(z)$

Conséquence, ses variations sont symétriques de part et d'autre de $z = 0$.

Q8. Calculer la dérivée $\frac{d\mathcal{P}e}{dz}$ de $\mathcal{P}e$

$$\frac{d\mathcal{P}e}{dz} = A \frac{2z \cdot (z^2 + R_b^2)^5 - 5z^2 (z^2 + R_b^2)^6 \cdot 2z}{(z^2 + R_b^2)^{10}} = A \frac{2z(R_b^2 - 4z^2)}{(z^2 + R_b^2)^6}$$

En déduire les variations de $\mathcal{P}e$ sur \mathbb{R} et vérifier qu'elle admet un maximum global sur \mathbb{R}_+ en $\frac{Rb}{2}$ dont on précisera l'expression en fonction de A et Rb

$\frac{d\mathcal{P}e}{dz}$ s'annule lorsque $z = +/- 2Rb$ et lorsque $z = 0$. De plus, on montrer que $\mathcal{P}e\left(\frac{Rb}{2}\right) = \frac{A \cdot \frac{R_b^2}{4}}{\left(\frac{R_b^2}{4} + R_b^2\right)^5}$

Ce qui donne $\mathcal{P}e\left(\frac{Rb}{2}\right) = \frac{0,082 \cdot A}{R_b^8}$

Quant aux variations de $\mathcal{P}e$, en tenant compte du signe de z et de $(R_b^2 - 4z^2)$, les voici :

z	∞	$-Rb/2$	0	$Rb/2$	∞
$\mathcal{P}e(z)$	0	$\frac{0,082 \cdot A}{R_b^8}$	0	$\frac{0,082 \cdot A}{R_b^8}$	0
$\frac{d\mathcal{P}e}{dz}$	+	0	-	0	+

Q9. Déterminer la limite de $\mathcal{P}e$ en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour sa courbe ?

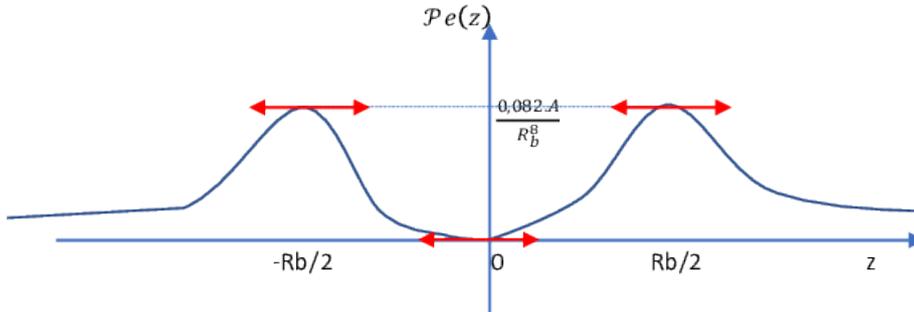
On calcule que $\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathcal{P}e(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{A}{z^8} = 0$

La fonction $\mathcal{P}e(z)$ est donc bornée.

Comme la courbe est paire alors la limite est identique en $-\infty$ et en $+\infty$ et vaut 0.

Q10. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{P}e(z)$ sur \mathbb{R} et tracer l'allure de son graphe sur \mathbb{R} en précisant les tangentes horizontales.

Le tableau est déjà donné à la question Q8. Il permet de tracer l'allure de $\mathcal{P}e(z)$



On a donc trois points où la tangente est horizontale, hormis l'asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$, Ces trois points ont pour coordonnées $(-Rb/2, \frac{0,082.A}{R_b^8})$, $(0,0)$ et $(+Rb/2, \frac{0,082.A}{R_b^8})$.

Q11. Montrer que l'intégrale $\mathcal{E}_e^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}e(z) dz$ est une intégrale convergente.

La fonction $\mathcal{E}_e^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}e(z) dz$ est une intégrale généralisée de première espèce (ou impropre) car $\mathcal{P}e(z)$ est une fonction bornée et continue et l'intégrale porte sur des limites d'intégration qui sont en $-\infty$ et en $+\infty$.

Le comportement de $\mathcal{P}e(z)$ lorsque z tend vers l'infini (positif ou négatif) s'apparente à celui d'une fonction en $\frac{A}{z^8}$. Sachant que la convergence d'une fonction en $\frac{k}{z^r}$ est garantie dès que l'ordre de la puissance r de z est strictement supérieur à 1 (intégrales de Riemann) alors \mathcal{E}_e^T est une intégrale convergente.

Q12. En posant $z = R_b \tan u$ et en justifiant ce changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_n = \frac{1}{R_b^{2n-1}} \cdot \int_0^{+\pi/2} \cos^{2(n-1)} u \cdot du$$

Le changement de variable $z = R_b \cdot \tan u$ est une bijection différentiable qui fait correspondre $[0, +\infty[$ à $[0, +\pi/2[$, donc parfaitement justifié.

En différenciant l'expression de dz on trouve $dz = R_b \frac{du}{\cos^2 u}$

Cela donne, en remplaçant dans I_n :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^n} = \int_0^{+\pi/2} \frac{1}{((R_b \cdot \tan u)^2 + R_b^2)^n} \cdot \frac{R_b \cdot du}{\cos^2 u} = \int_0^{+\pi/2} \frac{1}{R_b^{2n} ((\tan u)^2 + 1)^n} \cdot \frac{R_b \cdot du}{\cos^2 u}$$

Or on sait que $(\tan u)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$

Cela donne, en remplaçant dans l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\pi/2} \frac{\cos^{2n} u}{R_b^{2n}} \cdot \frac{R_b \cdot du}{\cos^2 u} = \frac{1}{R_b^{2n-1}} \cdot \int_0^{+\pi/2} \cos^{2(n-1)} u \cdot du$$

Q13. A l'aide d'une intégration par parties, que l'on justifiera, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$W_{n+1} = \frac{(2n+1)}{2n+2} \cdot W_n$$

On retrouve des intégrales de Wallis.

$$W_{n+1} = \int_0^{+\pi/2} \cos^{2(n+1)} u \cdot du = \int_0^{+\pi/2} \cos u \cdot \cos^{2n+1} u \cdot du$$

En intégrant par partie, on applique

$$\int_0^{\pi/2} f \cdot g' \cdot du = [f \cdot g]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f' \cdot g \cdot du \quad \text{avec } f = \cos u \quad \text{et } g = \cos^{2n+1} u$$

Ce qui est possible car f et g sont de classe C^1 au moins.

Il vient alors

$$W_{n+1} = [\sin u \cdot \cos^{2n+1} u]_0^{+\pi/2} - (2n+1) \int_0^{+\pi/2} \sin^2 u \cdot \cos^{2n} u \cdot du$$

$$W_{n+1} = 0 - (2n+1) \int_0^{+\pi/2} (1 - \cos^2 u) \cdot \cos^{2n} u \cdot du = (2n+1)(W_n - W_{2n})$$

D'où finalement $W_{n+1}(1+2n+1) = (2n+1) \cdot W_n$ et qui aboutit au résultat demandé :

$$W_{n+1} = \frac{(2n+1)}{2n+2} \cdot W_n$$

Q14. Calculer W_0 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \cdot \pi$

On montre facilement que $W_0 = \pi/2$

$$\text{De plus, } W_n = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot W_{n-1} = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{2(n-1)} W_{n-2} = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \cdot \frac{(2n-5)}{2(n-2)} W_{n-3}$$

Pour faire apparaître les factorielles, il faut intercaler les termes manquants en $(2n-2)$, $(2n-4)$ au numérateur et au dénominateur.

$$W_n = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-2)} \cdot \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \cdot \frac{(2n-4)}{(2n-4)} \cdot \frac{(2n-5)}{2(n-2)} W_{n-3}$$

Et ainsi de suite jusqu'à W_0

$$W_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-2)}{2(n-1)} \cdot \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \cdot \frac{(2n-4)}{2(n-2)} \cdot \frac{(2n-5)}{2(n-2)} \dots W_0$$

Ce qui donne

$$W_n = \frac{n(2n-1)!}{2^{2n} \cdot n! \cdot n!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \cdot \pi$$

Q15. Vérifier que $\mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 \cdot I_5)$ et que $\mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^2} (W_3 - W_4)$

On montre que

$$2A(I_4 - R_b^2 \cdot I_5) = 2A \left(\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_b^2)^4} - \int_0^{+\infty} \frac{R_b^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right) = 2A \left(\int_0^{+\infty} \frac{(z^2 + R_b^2) dz}{(z^2 + R_b^2)^5} - \int_0^{+\infty} \frac{R_b^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right)$$

ce qui donne

$$2A(I_4 - R_b^2 \cdot I_5) = 2A \left(\int_0^{+\infty} \frac{(z^2 + R_b^2 - R_b^2) dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right) = 2A \left(\int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5} \right)$$

Or $\mathcal{E}_e^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}e(z) dz = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5} = 2A \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + R_b^2)^5}$ car la fonction est paire.

Donc on a bien $\mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 \cdot I_5)$

De plus, on remarque que $I_n = \frac{W_{n-1}}{R_b^{2n-1}}$, ce qui permet en remplaçant dans l'expression précédente de prouver que :

$$\mathcal{E}_e^T = 2A(I_4 - R_b^2 I_5) = 2A \left(\frac{W_3}{R_b^7} - R_b^2 \frac{W_4}{R_b^9} \right) = \frac{2A}{R_b^7} (W_3 - W_4)$$

Q16. Exprimer W_3 comme étant le produit de π et d'une fraction irréductible.

On remplace n par trois dans la formule de W_n à la question Q14.

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \cdot \pi = \frac{6!}{2^7 \cdot (3!)^2} \cdot \pi = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 2^2} \pi = \frac{\pi}{2^5} \quad \text{Le terme } \frac{1}{2^5} \text{ est bien une fraction irréductible.}$$

En déduire la valeur de \mathcal{E}_e^T

Il faut d'abord calculer W_4 : on remplace n par 3 dans la relation de récurrence trouvée plus haut

$$W_{n+1} = \frac{(2n+1)}{2n+2} \cdot W_n, \text{ cela donne } W_4 = \frac{7}{8} \cdot W_3$$

$$\text{Et en remplaçant dans } \mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^7} (W_3 - W_4) \text{ on arrive à } \mathcal{E}_e^T = \frac{2A}{R_b^7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{2^5} = \frac{A\pi}{R_b^7 \cdot 2^7}$$

II.4 Couple d'induction

Q17. Déterminer les positions d'équilibre et d'équilibre stable de la bille en fonction de son orientation magnétique $\beta = (\vec{e}_z; \vec{m})$.

Recherche des états stables :

- Lorsque la bille se rapproche de la bobine, le champ magnétique induit par celle-ci est répulsif, tendant à retourner la bille. La seule orientation stable est celle qui annule l'induction par rapport au déplacement. Donc c'est lorsque la bille se rapproche de la bobine avec un angle β constant et égal à $\pm \pi/2$.
- Si la bille s'éloigne, le champ induit est attractif, le couple induit tend à aligner l'axe polaire de la bille avec celui de la bobine. L'orientation stable sera donc lorsque l'angle sera nul ou égal à π (une seule de ces deux positions est stable, cela dépend du sens du courant I).

Q18. Déterminer le couple d'induction subi par la bille en fonction son orientation magnétique $\beta = (\vec{e}_z; \vec{m})$.

Préciser si la bille peut rester dans sa position d'équilibre stable et rouler à vitesse constante sur l'induit.

Le couple d'induction est porté par l'axe \vec{e}_y et vaut :

$$\vec{C}_{ind} = \frac{\mu_0 I R_b^2}{2(z^2 + R_b^2)^{3/2}} \cdot m \cdot \sin \beta \cdot \vec{e}_y$$

La bille ne peut pas rester sur une position stable si la bille roule à vitesse constante car l'angle β sera variable.

Partie III – Comportement mécanique du générateur

III.1 Mouvement d'excitation

Q19. Justifier que l'on puisse modéliser le mouvement d'excitation comme $\varphi: t \mapsto \varphi_m \sin \omega t$ et proposer des valeurs numériques pour les constantes φ_m et ω en supposant la fréquence d'excitation $f = 2,5$ Hz.

Les kinogrammes laissent suggérer un mouvement pendulaire des bras (et plus particulièrement de l'humérus) à peu près équilibré par rapport à la position verticale.

La valeur de φ_m vaut à peu près la moitié de l'amplitude angulaire du mouvement de l'humérus trouvée à la question Q3, donc φ_m est voisin de 45° .

La question laisse supposer que la pulsation ω est simplement liée à f par relation $\omega = 2\pi f = 15,7 \text{ rad/s}$

Mais on pourrait aussi envisager le problème sous un angle différent :

Sachant qu'il faut 2 pas pour que le bras retrouve sa position, il faut diviser la fréquence par 2 :

$$\text{Auquel cas nous aurions } \omega = 2\pi \frac{f}{2} = 7,8 \text{ rad/s}$$

Q20. Déterminer les éléments de réduction du torseur associé au champ de vitesse du bâti S1 par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_0 noté $\{V_{1/0}\}$

On recherche le torseur cinématique tel que

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{O,1/0}} \end{Bmatrix}$$

D'abord $\overrightarrow{V_{O,1/0}}$:

Par définition $\overrightarrow{V_{O,1/0}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OY_1} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} (-l)\overrightarrow{y_1} \right]_{R_0} = -l \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{y_1} \right]_{R_0}$

L'utilisation de la formule de changement de base de dérivation conduit à écrire que

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{y_1} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{y_1} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{y_1} = \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\phi} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Soit finalement $\overrightarrow{V_{O,1/0}} = l\dot{\phi} \cdot \overrightarrow{x_1}$

De plus, il est dit que la rotation de R1 par rapport à R0 se fait selon l'axe $\overrightarrow{z_1}$, et donc

$$\overrightarrow{\omega_{1/0}} = \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

Ce qui permet de conclure $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ l\dot{\phi} \cdot \overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}$

III.2 Comportement cinématique de la bille dans le tore

Q21. Par dérivation, déterminer une expression de $\overrightarrow{V_{G,2/1}}$, puis, en supposant que la bille roule sans glissement sur le tore au point I, tel que $\overrightarrow{IG} = R_b \overrightarrow{x_b}$, déterminer une expression de $\omega_{2/1}$ et de $\overrightarrow{V_{G,2/1}}$ en fonction de R, R_b et $\dot{\theta}$.

$$\overrightarrow{V_{G,2/1}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt} R \overrightarrow{x_b} \right]_{R_1}$$

On sait que $\overrightarrow{x_b}$ tourne à la vitesse $\dot{\theta}$ par rapport à $\overrightarrow{x_1}$ donc $\overrightarrow{\omega_{b/1}} = \dot{\theta} \overrightarrow{z_1}$

En utilisant la formule du changement de base de dérivation on obtient :

$$\left[\frac{d}{dt} R \overrightarrow{x_b} \right]_{R_1} = R \left(\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{x_b} \right]_b + \overrightarrow{\omega_{b/1}} \wedge \overrightarrow{x_b} \right) = R \cdot \overrightarrow{\omega_{b/1}} \wedge \overrightarrow{x_b} = R \cdot \dot{\theta} \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_b} = R \dot{\theta} \overrightarrow{y_b}$$

S'il y a roulement sans glissement au point I, alors $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \vec{0}$

Et donc

$$\overrightarrow{V_{G,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,2/1}} + \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}} = R_b \overrightarrow{x_b} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}}$$

Ce qui finalement nous amène à

$$\overrightarrow{V_{G,2/1}} = R \dot{\theta} \overrightarrow{y_b} = R_b \overrightarrow{x_b} \wedge \overrightarrow{\omega_{2/1}}$$

D'où on tire

$$\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \frac{R}{R_b} \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_b} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_{G,2/1}} = R \dot{\theta} \overrightarrow{y_b}$$

Q22. Préciser si le champ de vitesse de la bille S_2 est adapté à la conversion d'énergie. Expliquer comment maximiser cette dernière.

La conversion d'énergie se fera le mieux possible si l'angle β entre l'axe polaire de la bille et celui de la spire reste le plus petit possible. Il faut donc s'arranger pour que cet angle β reste contenu dans des limites restreintes. Ce qui implique que la bille ne s'écarte pas trop du centre de la spire d'induction.

On a donc intérêt à faire en sorte que l'effort magnétique qui s'exerce entre la bille et le rail soit suffisamment élevé pour limiter l'excursion de la bille en dehors de la bobine. Donc il faut choisir un moment m élevé et positionner au repos la bille de façon à rendre au départ \vec{m} et \vec{e}_z colinéaires.

III.3 Moment d'inertie de la bille

Q23. Montrer que ρ, α et β le système suivant de coordonnées sphériques du point M :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \sin \beta \\ y &= \rho \sin \alpha \sin \beta \\ z &= \rho \cos \beta \end{aligned}$$

En projetant le point M sur chacun des 3 axes \vec{x}_1, \vec{y}_1 et \vec{z}_1 on retrouve effectivement ces trois relations.

On peut commencer par projeter le point M dans le plan $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ selon l'axe \vec{z}_1 , ce qui donne le point P, et déterminer les coordonnées x et y du point P. Quant à la projection du point M sur l'axe \vec{z}_1 , son expression est plus simple car elle ne fait intervenir que l'angle β .

Q24. Calculer J en fonction de ρ, α et β , puis prouver que $Det(J) = -\rho^2 \sin \beta$

On calcule J en effectuant les dérivées partielles :

Cela donne :
$$J = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta & -\rho \cdot \sin \alpha \sin \beta & \rho \cdot \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \rho \cdot \cos \alpha \sin \beta & \rho \cdot \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta & 0 & -\rho \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

Ensuite, il n'y a plus qu'à calculer le déterminant de cette matrice jacobienne, appelé aussi le jacobien :

$$Det(J) = -\cos \alpha \sin \beta \cdot \rho^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \beta + \rho \sin \alpha \sin \beta (-\rho \cdot \sin \alpha \sin^2 \beta - \rho \cdot \sin \alpha \cos^2 \beta) - \rho \cos \alpha \cos \beta \cdot \rho \cos \alpha \cos \beta \sin \beta$$

$$Det(J) = -\rho^2 \cdot \sin \beta (\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta)$$

Ce qui donne finalement le résultat attendu : $Det(J) = -\rho^2 \cdot \sin \beta$

Q25. En déduire que $I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} \pi \xi \cdot R b^5 \int_0^\pi (\sin \beta)^3 d\beta$

On peut exprimer le moment d'inertie de la bille :

$$I(G, \vec{z}_1) = \iiint_{\substack{\text{volume} \\ \text{bille}}} d(M, G\vec{z}_1)^2 \cdot \xi \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Qui se transforme à l'aide du jacobien de la manière suivante :

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \iiint_{\substack{\text{volume} \\ \text{bille}}} d(M, G\vec{z}_1)^2 \cdot |Det(J)| d\alpha \cdot d\beta \cdot d\rho$$

Or $d(M, G\vec{z}_1)$ représente la distance entre le point courant d'intégration M repéré par ses coordonnées (α, β, ρ) et l'axe $G\vec{z}_1$, donc $d(M, G\vec{z}_1) = \rho \cdot \sin \beta$

Il vient alors :

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \iiint_{\substack{\text{volume} \\ \text{bille}}} (\rho \cdot \sin \beta)^2 \cdot (\rho^2 \cdot \sin \beta) d\alpha \cdot d\beta \cdot d\rho$$

Ce qui s'arrange, puisque les variables et les fonctions sont indépendantes,

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \int_0^{Rb} \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi (\sin \beta)^3 d\beta$$

Qui devient

$$I(G, \vec{z}_1) = \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{Rb} \cdot [\alpha]_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \beta)^3 d\beta = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi (\sin \beta)^3 d\beta$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Q26.A l'aide des formules d'Euler, prouver que pour tout réel x : $\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$

Comme

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \text{alors, en élevant au cube, et en développant,}$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right)^3 = \frac{e^{3jx} - 3e^{j2x} \cdot e^{-jx} + e^{jx} \cdot e^{-2jx} - e^{-3jx}}{-8j} = \frac{(e^{3jx} - e^{-3jx}) - 3(e^{jx} - e^{-jx})}{-8j}$$

$$\text{ce qui s'écrit encore } \sin^3 x = \frac{-2j \cdot \sin 3x - 3 \cdot 2j \sin x}{-8j}$$

et donc finalement

$$\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$$

Q27. En déduire que $I(G, \vec{z}_1) = \frac{2}{5} m_b R_b^2$

La masse m_b de la bille est donnée par $m_b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_b^3 \xi$ (volume de la bille multiplié par sa masse volumique)

Or

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi (\sin \beta)^3 d\beta = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \frac{(3 \cdot \sin \beta - \sin 3\beta)}{4} d\beta$$

Soit

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5 \cdot 4} \cdot 2\pi \cdot \left[-3 \cos \beta \right]_0^\pi - \left[\frac{-\cos 3\beta}{3} \right]_0^\pi = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5 \cdot 4} \cdot 2\pi \left(6 - \frac{2}{3} \right)$$

Ce qui donne en remplaçant par m_b le produit $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_b^3 \xi$

$$I(G, \vec{z}_1) = \xi \cdot \frac{Rb^5}{5.4} \cdot 2\pi \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_b^3 \xi \frac{2}{5} R_b^2 = \frac{2}{5} m_b R_b^2$$

III.4 Comportement dynamique de la bille

Q28. Par composition des champs de vitesse, déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique traduisant le mouvement de la bille S_2 dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , noté $\{V_{2/0}\}$ au point G.

On recherche le torseur cinématique tel que

$$\{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} \overline{\omega_{2/0}} \\ \overline{V_{G,2/0}} \end{Bmatrix}$$

La composition du vecteur vitesse au point G s'exprime par

$$\overline{V_{G,2/0}} = \overline{V_{G,2/1}} + \overline{V_{G,1/0}}$$

On connaît par ailleurs $\overline{V_{G,2/1}} = R\dot{\theta}\vec{y}_b$ (question Q22)

Il nous reste à déterminer $\overline{V_{G,1/0}}$

Or

$$\overline{V_{G,1/0}} = \overline{V_{O,1/0}} + \overline{GO} \wedge \overline{\omega_{1/0}} = l \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 - R \cdot \vec{x}_b \wedge \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_1 = l \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b$$

Ce qui donne finalement :

$$\overline{V_{G,2/0}} = l \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta}\vec{y}_b$$

Et pour $\overline{\omega_{2/0}}$, on compose les vitesses de la façon suivante :

$$\overline{\omega_{2/0}} = \overline{\omega_{2/1}} + \overline{\omega_{1/0}} = \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right) \vec{z}_1$$

Et finalement :

$$\{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right) \vec{z}_1 \\ l \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta}\vec{y}_b \end{Bmatrix}$$

Q29. Déterminer une expression du moment cinétique de la bille S_2 par rapport le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 au point G, noté $\overline{\sigma_{G,2/0}}$.

Une expression du moment cinétique est donnée par

$$\overline{\sigma_{G,2/0}} = \overline{I_2(G)} \cdot \overline{\Omega_{2/0}} = \frac{2}{3} m_b R_b^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Ce qui fournit :

$$\overline{\sigma_{G,2/0}} = \frac{2}{3} m_b R_b^2 \left[\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right] \vec{z}_1$$

En déduire les éléments de réduction au point G du torseur cinétique de la bille S_2 par rapport le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 , noté $\{J_{2/0}\}$

On en déduit au point G les éléments du torseur cinétique de la bille S_2 :

$$\{J_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} m_b \overline{V_{G,2/0}} \\ \overline{\sigma_{G,2/0}} \end{Bmatrix}$$

En remplaçant cela donne :

$$\{T_{2/0}\}_G = \begin{cases} m_b [l\dot{\phi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\phi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b] \\ \frac{2}{3} m_b R_b^2 \left[\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\phi} \right] \vec{z}_1 \end{cases}$$

Q30. Déterminer une expression du moment dynamique de la bille S₂, par rapport le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 au point G, noté $\overrightarrow{\delta_{G,2/0}}$

Le moment dynamique est obtenu en dérivant le moment cinétique.

$$\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} \Big|_{R_0} = \overline{l_2(G)} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \Big|_{R_0}$$

Or

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \Big|_{R_0} = \left[\frac{R}{R_b} \ddot{\theta} + \ddot{\phi} \right] \vec{z}_1 + \left[\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\phi} \right] \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \Big|_{R_0}$$

Mais comme

$$\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \Big|_{R_0} = \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \Big|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0} + \dot{\phi} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$$

Alors il vient

$$\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \overline{l_2(G)} \cdot \left[\frac{R}{R_b} \ddot{\theta} + \ddot{\phi} \right] \vec{z}_1 = \frac{2}{3} m_b R_b^2 \left[\frac{R}{R_b} \ddot{\theta} + \ddot{\phi} \right] \vec{z}_1$$

III.5 Etude des conditions de roulement de la bille

III.5.1 Estimation du coefficient de frottement

Q31. Montrer que D possède un unique point critique (\hat{a}, \hat{b}) où $\hat{a} = \frac{e - \bar{x}\bar{y}}{m_x - \bar{x}^2}$ et $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$

D est une fonction à deux variables. D admet un point critique si ses deux dérivées partielles sont nulles simultanément. Or :

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1)$$

Les coordonnées du point critique seront obtenues lorsque $\frac{\partial D}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial b} = 0$.

Cela nous amène à un système de 2 équations :

$$\sum_{i=0}^n x_i y_i = \sum_{i=0}^n (\hat{a} x_i^2 + \hat{b} x_i)$$

et

$$\sum_{i=0}^n y_i = \sum_{i=0}^n (\hat{a} x_i + \hat{b})$$

Ce qui nous amène deux équations en remplaçant les grandeurs statistiques par leur symbole :

$$(E1) \quad ne = \hat{a} \cdot n \cdot m_x + \hat{b} n \cdot \bar{x} \quad \text{et} \quad (E2) \quad n\bar{y} = \hat{a} n\bar{x} + \hat{b} n$$

On simplifie par n, ensuite on remplace b par son expression $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$ dans (E1) et cela donne pour \hat{a} :

$$\hat{a} = \frac{e - \bar{x}\bar{y}}{m_x - \bar{x}^2} \quad \text{et aussi} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \quad \text{comme demandé.}$$

Q32. Justifier sans calcul qu'en tout point (a, b) de \mathbb{R}^2 , $H(a, b)$ est une matrice diagonalisable.

Comme $\frac{\partial^2 D}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial a}$ alors $H(a, b)$ est une matrice symétrique, et toute matrice symétrique à coefficients réels n'admet que des valeurs propres réelles, ce qui est une raison suffisante pour dire que ces matrices, comme H , sont diagonalisables. C'est ce que précise le théorème spectral.

Q33. Justifier sans calcul que $\text{Det}(\hat{H}) = \lambda\mu$ et que $\text{Tr}(\hat{H}) = \mu + \lambda$ où Tr désigne la trace.

Le déterminant d'une matrice est toujours donné par le produit de ses valeurs propres. Donc, en particulier, au point critique on a $\text{Det}(\hat{H}) = \lambda\mu$

La trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres.

Si \hat{H} admet deux valeurs propres μ et λ alors il existe une matrice de passage P telle que

$$\hat{H} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$$

Du coup, la trace de \hat{H} peut s'écrire

$$\text{Tr}(\hat{H}) = \text{Tr} \left(P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P \right) = \text{Tr} \left(P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu + \lambda$$

Q34. Déterminer les coefficients de \hat{H}

Calcul des coefficients de \hat{H}

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a \partial a} = \sum_{i=0}^n 2x_i^2 \quad \frac{\partial^2 D}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial a} = \sum_{i=0}^n 2x_i \quad \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial b} = \sum_{i=0}^n 2$$

Ce qui amène à une matrice qui s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 2x_i^2 & \sum_{i=0}^n 2x_i \\ \sum_{i=0}^n 2x_i & \sum_{i=0}^n 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2nm_x & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} m_x & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

Q35. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, montrer que $\bar{x}^2 \leq m_x$

On doit démontrer que $\bar{x}^2 \leq m_x$ c'est à dire qu'il faut montrer que $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz indique que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}$$

On remplace les y_i par 1. La relation se simplifie et donne :

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot 1) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)}$$

Ce qui s'arrange en

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot n} \quad \text{soit encore, en élevant au carré :}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \quad \text{d'où} \quad n^2 \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n^2} \leq n^2 \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}{n} \quad \text{soit alors} \quad \bar{x}^2 \leq m_x$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz ?

Il y aura égalité si et seulement si les deux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont liés.

Or nous avons supposé que $(y_1, \dots, y_n) = (1, 1, \dots, 1)$. Ce qui signifie que l'égalité sera obtenue uniquement lorsque tous les x_i sont égaux. C'est le seul cas envisageable.

Prouver que l'inégalité précédente $\bar{x}^2 \leq m_x$ est stricte.

Comme les mesures n'ont manifestement pas donné des résultats identiques (tous les x_i sont différents), et selon ce qui a été dit précédemment, alors l'inégalité $\bar{x}^2 \leq m_x$ devient stricte.

En déduire que $\det(\hat{H}) > 0$

Le déterminant de \hat{H} est donné par :

$$\det(\hat{H}) = 2n \begin{pmatrix} m_x & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix} = 2n(m_x - \bar{x}^2) \text{ qui est donc notoirement positif.}$$

Q36. Montrer que D atteint son minimum en (\hat{a}, \hat{b})

On vient de démontrer que $\det(\hat{H}) > 0$.

Dans ce cas, les valeurs propres sont de même signe et strictement positives et D passe par un minimum au point critique si la trace est positive.

Ce qui est le cas ici.

Q37. En déduire la valeur de \hat{a} puis celle de \hat{b}

En remplaçant par les valeurs données dans les expressions de \hat{a} et de \hat{b} on trouve que :

$$\hat{a} = 0,21 \quad \text{et} \quad \hat{b} = 0,006$$

Du coup, l'équation de la droite qui convient le mieux dans sa relation entre l'effort tangentiel et l'effort normal est la droite $y = 0,21x + 0,006$

Peut-on raisonnablement affirmer que l'effort tangentiel est proportionnel à l'effort normal ?

Comme l'effort tangentiel peut aller jusqu'à 0,24 N, la valeur de l'ordonnée à l'origine ne vaut que 0,006/0,24 soit 4% de la pleine échelle. Ce qui est peu. Donc oui on peut dire que l'effort tangentiel est proportionnel à l'effort normal avec une erreur assez limitée de 4% pleine échelle.

Q38. Montrer que $c = e - \bar{x}\bar{y}$

On calcule c au moyen de la formule de c donnée

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i y_i + \bar{x} \bar{y} - \bar{x} y_i - x_i \bar{y})$$

ce qui donne

$$c = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^N (x_i y_i) + n \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \sum_{i=0}^n y_i - \bar{y} \sum_{i=0}^n x_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i y_i) + \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y}$$

Et on trouve bien $c = e - \bar{x}\bar{y}$

Q39. Quel outil du cours de probabilité permet de valider l'hypothèse selon laquelle il existe bien une relation de dépendance affine entre X et Y telle que formulée au début de cette sous partie ?

Pour vérifier qu'il existe bien une relation de dépendance entre les x_i les y_i il faut utiliser le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson $r(x_i, y_i)$ qui s'exprime de la façon suivante :

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Avec $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ qui représentent les écarts types de X et de Y.
 Comme par définition $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (et idem pour Y) alors il vient

$$r(x, y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{e - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(m_x - \bar{x}^2)(m_y - \bar{y}^2)}}$$

En remplaçant par les valeurs données on trouve :

$$r(x, y) = \frac{0,0741 - 0,6 \cdot 0,12}{\sqrt{(0,37 - 0,6^2)(4,9 \cdot 10^{-4})}} = \frac{2,1 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0,01 \cdot 10 \cdot 4,9 \cdot 10^{-6}}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,95$$

Qui est très proche de 1.

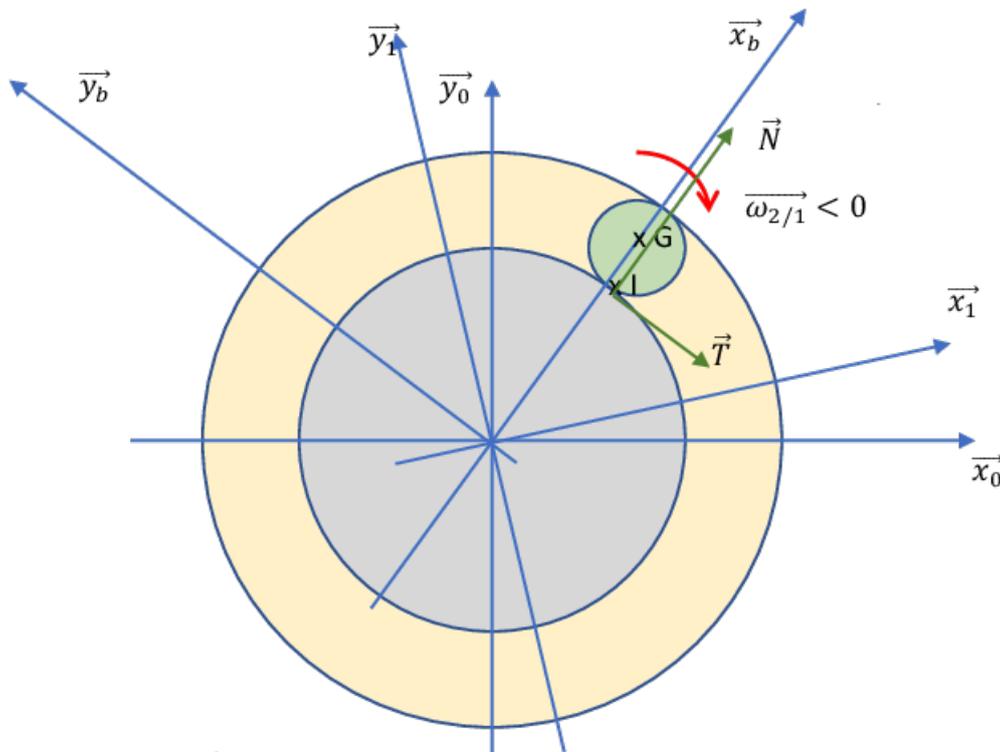
On voit qu'il existe une forte relation linéaire entre X et Y car $r(x, y)$ est très proche de 1.

Au regard des résultats expérimentaux obtenus, pensez-vous cette raisonnable ? Justifiez la réponse.

Cependant, la « signicativité » de cette relation n'est pas établie car le nombre d'échantillons est faible (une vingtaine) et il existe des zones assez vastes sans relevé.

III.5.2 Condition de roulement sans glissement

Q40. En appliquant le modèle de frottement sans glissement de Coulomb, à la limite du glissement et en supposant $\overline{\omega_{2/1}} < 0$, déterminer les éléments de réduction au point G du torseur d'actions mécaniques transmissibles par le bâti S_1 sur la bille S_2 au niveau du contact ponctuel au point I en fonction de f, N et R_b .



A la limite du glissement on a $T = f \cdot N$

De plus, l'action de S_1 sur S_2 peut s'établir au point de contact I sous la forme suivante :

$$\{J_{1 \rightarrow 2}\}_I = \begin{Bmatrix} N\vec{x}_b - T\vec{y}_b \\ \overline{\omega_{2/1}} \end{Bmatrix}$$

Si on déplace le torseur au point G, l'expression devient :

$$\{\mathcal{J}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x}_b - T\vec{y}_b \\ \vec{GI} \wedge [N\vec{x}_b - T\vec{y}_b] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x}_b - T\vec{y}_b \\ -R_b\vec{x}_b \wedge [N\vec{x}_b - T\vec{y}_b] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x}_b - T\vec{y}_b \\ -R_bT\vec{z}_b \end{array} \right\}$$

D'où finalement

$$\{\mathcal{J}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} N(\vec{x}_b - f\vec{y}_b) \\ -R_bT\vec{z}_b \end{array} \right\}$$

Q41. En précisant clairement votre démarche, déterminer une expression de l'effort normal de contact minimal N tel que le contact de la bille S₂ sur l'induit S₁ soit réellement sans glissement.

Le torseur de Coulomb est la somme des actions mécaniques qui s'exercent sur 2, qui sont au nombre de trois.

- Une action due à la pesanteur
- Une action due au couple d'induction
- Une action due à l'effort d'attraction du rail

Cela donne :

$$\{\mathcal{J}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_{ind}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{c} F_{fer}\vec{x}_b \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{c} -gm.\cos(\varphi + \theta)\vec{x}_b \\ -gm.\sin(\varphi + \theta)\vec{y}_b \\ -R_bT\vec{z}_b \end{array} \right\}_G$$

En projetant la résultante du torseur sur \vec{x}_b on récupère la composante N :

Cela donne pour résultat :

$$N = F_{fer} - gm.\cos(\varphi + \theta)$$

Q42. Justifier que la fonction g soit paire et π -périodique.

On voit que la force d'attraction entre la bille et le rail ferromagnétique dépend de l'angle β entre l'axe magnétique de la bille et la direction du rail.

La bille se présente comme un aimant, elle se colle le plus fortement lorsque son pôle magnétique est perpendiculaire à la surface du rail, que ce pôle soit Nord ou Sud, cela ne dépend pas de la polarité \rightarrow fonction paire.

De plus, comme l'effort Ffer qui s'exerce entre la bille et le rail est une relation qui dépend du carré de l'induction B, alors sa période est deux fois plus petite celle de β et devient égale à π .

Q43. Déterminer la valeur exacte de c et des valeurs approchées de a et b telles que pour tout réel β on ait $g(\beta) = a + b.\cos(c\beta)$

Par lecture et identification sur la courbe fournie on peut établir :

Pour c :

c = 2 à cause de la période qui vaut π

Pour β :

Lorsque $\beta = 0$ alors Ffer = 0,16 = a + b

Et lorsque $\beta = \pi/2$ alors Ffer = 0,36 = a - b

Cela donne pour finir **a = 0,26** et **b = - 0,1**

III.6 Puissance mécanique extraite

Q44. Déterminer une expression de l'énergie cinétique de la bille S₂ en fonction de m, R, R_b, l, φ , $\dot{\varphi}$, θ et $\dot{\theta}$.

Si on note T_{2/R_0} l'énergie cinétique de la bille S2, alors une expression de son énergie cinétique est donnée par :

$$T_{2/R_0} = \frac{1}{2} {}_G \{T_{2/R_0}\} \otimes_G \{V_{2/R_0}\}$$

Ce qui s'écrit encore

$$T_{2/R_0} = \frac{1}{2} {}_G \left\{ \begin{array}{l} m_b [l\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b] \\ \frac{2}{3} m_b R_b^2 \left[\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right] \vec{z}_1 \end{array} \right\} \otimes_G \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right) \vec{z}_1 \\ l\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b \end{array} \right\}$$

$$T_{2/R_0} = \frac{1}{2} \left[m_b [l\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b] \right] \cdot [l\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} m_b R_b^2 \left[\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right] \vec{z}_1 \right] \cdot \left[\left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right) \vec{z}_1 \right]$$

Cela s'arrange, un peu, et devient, par projection :

$$T_{2/R_0} = \frac{1}{2} m_b [l^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + 2lR\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin \varphi] + \frac{1}{2} m_b \frac{2}{3} R_b^2 \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)^2$$

Q45. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la bille S_2 en supposant que $E_p = 0$ lorsque G est confondu avec le point B défini tel que $\vec{BO}_0 = (R + l) \cdot \vec{y}_0$.

L'énergie potentielle de la bille est donnée par

$$E_p = \Delta y_0 \cdot m_b \cdot g$$

Où Δy_0 représente la variation d'altitude de la bille par rapport à son point B le plus bas lorsque le bras est parfaitement vertical.

$$\Delta y_0 = \vec{BO}_0 \cdot \vec{y}_0 - \vec{GO}_0 \cdot \vec{y}_0$$

Ce qui donne par projection sur \vec{y}_0

$$\Delta y_0 = R + l - l \cos \varphi + R \sin (\theta + \varphi)$$

D'où

$$E_p = [R + l - l \cos \varphi + R \sin (\theta + \varphi)] \cdot m_b \cdot g$$

On vérifie que cette énergie vaut bien 0 lorsque le bras et la bille sont simultanément en position basse, c'est à dire lorsque $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$

Q46. Déterminer une expression de la puissance dissipée au niveau contact ponctuel entre la bille S_2 et le bâti S_1 .

La puissance transmise au point de contact est donnée par :

$$\mathcal{P}_{S_1 \rightarrow S_2} = \{T_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{V_{2/1}\}$$

Soit

$$\mathcal{P}_{S_1 \rightarrow S_2} = {}_G \left\{ \begin{array}{l} N(\vec{x}_b - f\vec{y}_b) \\ -R_b T \vec{z}_b \end{array} \right\} \otimes_G \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right) \vec{z}_1 \\ l\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_1 + R\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_b + R\dot{\theta} \cdot \vec{y}_b \end{array} \right\}$$

D'où

$$\mathcal{P}_{S_1 \rightarrow S_2} = N(l\dot{\varphi} \cos \theta - fl\dot{\varphi} - fR(\dot{\varphi} + \dot{\theta})) - R_b T \left(\frac{R}{R_b} \dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)$$

Q47. Expliquer comment établir l'équation différentielle vérifiée par θ . Préciser si elle est linéaire et sinon comment trouver une solution approchée.

L'ordonnancement des questions précédentes suggère de recourir au théorème de l'énergie mécanique. Celui-ci précise que la dérivée de l'énergie mécanique E_m d'un système est égal à la puissance des forces extérieures non conservatives qui s'exercent sur ce système.

$$\text{Or } E_m = E_p + T_{2/R_0}$$

On peut donc écrire que $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{non\ conservative}$

A priori, les forces non conservatives sont uniquement dues au frottement et ont été implicitement calculées à la question Q46 précédente.

L'action du couple d'induction $\overrightarrow{C_{ind}}$ est réputée conservative, donc elle n'intervient pas dans ce théorème.

Si on applique ce théorème on obtient une équation différentielle **notoirement non linéaire** car on y retrouve des termes qui dépendent

- de $\dot{\theta}^2$.
- de l'angle φ et de ses dérivées $\dot{\varphi}$ et $\dot{\varphi}^2$
- de fonctions trigonométriques cos et sin

Hypothèse envisageable :

On peut considérer le générateur toroïdal comme un système qui possède une entrée φ imposée par le sportif (et plus exactement son bras) et une sortie θ qui en dépend selon l'équation différentielle précédente.

Il existe peut-être un moyen de résoudre partiellement cette équation différentielle en supposant constante l'énergie cinétique – sa dérivée sera nulle – et des variations faibles pour θ , ce qui permettra de remplacer les fonctions cos et sin par des expressions simples.

Il est alors plus facile d'analyser ce système dont les modèles de comportement sont connus lorsque l'entrée est par exemple un échelon $\varphi(t) = u(t) \cdot \varphi_0$ ou encore avec un régime forcé de type sinusoïdal.

Remarque : il n'est pas fait état des pertes fer ni des pertes électriques de récupération, sans doute sont-elles négligeables.