

## Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2020

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles C

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](https://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Machine de fabrication additive par fusion laser de poudre métallique FormUP 350

Corrigé UPSTI

## I - Positionner le spot laser dans le plan de de travail

**Question I.1** Déterminer l'expression de l'énergie volumique  $E_{vd}$  déposée par un laser en fonction des paramètres du procédé que sont la puissance du laser  $P$ , la vitesse de balayage  $V$ , l'épaisseur de couche  $e$  et la distance  $d$  entre deux segments. En déduire une application numérique en  $J/mm^3$  pour les paramètres nominaux suivants :

- $P = 280 \text{ W}$
- $V = 1 \text{ m/s}$
- $d = 40 \text{ } \mu\text{m}$
- $e = 70 \text{ } \mu\text{m}$ .

Le volume balayé par le spot laser pendant une durée  $dt$  est :  $d.e.(V.dt)$

$$\text{L'énergie volumique déposée est donnée par : } E_{vd} = \frac{\text{Energie reçue}}{\text{Volume balayé}} = \frac{P \cdot dt}{d.e.(V \cdot dt)} \Rightarrow \boxed{E_{vd} = \frac{P}{d.e.V}}$$

Application numérique :

$$E_{vd} = \frac{280}{70 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3} = \frac{280}{2.8} = 100 \Rightarrow \boxed{E_{vd} = 100 \text{ J/mm}^3}$$

**Question I.2** A partir des caractéristiques d'une tête de scanning et en supposant que  $\sin \theta \cong \theta$ , calculer en  $m/s$  la vitesse maximale (ou vitesse « rapide ») que peut atteindre le spot laser selon les axes X ou Y. Quelle vitesse maximale peut atteindre le spot laser par composition de mouvement ?

La relation entre les coordonnées et les positions angulaires des galvanomètres est supposée linéaire. On a donc :  $x = k_x \cdot \theta_x$ . Si on applique cette relation aux courses relatives à  $x \rightarrow \Delta x$  et  $\theta_x \rightarrow \Delta \theta_x$ , on obtient :

$$k_x = \frac{\Delta x}{\Delta \theta_x}$$

La relation  $x = k_x \cdot \theta_x$  permet d'obtenir par dérivation par rapport au temps :  $V = \dot{x} = k_x \cdot \dot{\theta}_x \Rightarrow \boxed{V = \frac{\Delta x}{\Delta \theta_x} \cdot \dot{\theta}_x}$

Application numérique :

D'après le document ressource III, on a :  $\Delta x = 350\text{mm}$ ,  $\Delta\theta_x = 20^\circ \rightarrow \Delta\theta_x = 20^\circ \frac{\pi}{180^\circ} (\text{rad})$  et  $\dot{\theta}_x = 25 \text{ rad.s}^{-1}$ .

$$V = \frac{350 \cdot 10^{-3} \cdot 25}{\frac{2\phi \cdot \pi}{18\phi}} \approx \frac{0,35 \cdot 25}{\frac{3,14}{9}} = \frac{0,35 \cdot 25}{\phi \cdot 35 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{V = 25 \text{ m.s}^{-1}}$$

D'après les éléments du document ressource III, la vitesse maximale est identique suivant les deux axes X et Y. On peut donc écrire que la vitesse maximale obtenue par composition des vitesses est donnée par :

$$V_{\max} = \sqrt{V_{x\max}^2 + V_{y\max}^2} = \sqrt{2 \cdot V^2} \Rightarrow \boxed{V_{\max} = \sqrt{2} \cdot V}$$

Application numérique :

$$V_{\max} \approx \sqrt{2} \cdot 25 \approx 1,414 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{V_{\max} \approx 35 \text{ m.s}^{-1}}$$

**Question I.3** Proposer, à l'aide d'un schéma, une stratégie de changement de sens de parcours des trajectoires dans le mode aller-retour qui permette d'assurer que le laser fusionne la matière à la vitesse constante programmée, et qui minimise le temps perdu quand le laser est éteint. Vous préciserez les portions de trajectoires parcourues à vitesse programmée, à vitesse rapide et les points d'extinction et d'allumage du laser.



**Question I.4** Déterminer l'expression analytique de la résolution du déplacement angulaire des galvanomètres.

La résolution angulaire  $q_\theta$  pour un capteur angulaire numérique de course  $\Delta\theta$  dont l'information est codée sur  $n$  bits est donné par la relation suivante :

$$\boxed{q_\theta = \frac{\Delta\theta}{2^n - 1}}$$

**Question I.5** En déduire l'expression de la résolution du déplacement linéaire dans le plan de travail ainsi qu'une valeur approchée en  $mm$  en supposant que  $2^{10} \cong 10^3$ . Cette résolution vous paraît-elle cohérente avec l'ordre de grandeur du paramètre de distance entre segments ?

La relation entre les coordonnées et les positions angulaires des galvanomètres est supposée linéaire. On a donc :

$$d = k \cdot \theta . \text{ On en déduit que : } \Delta d = k \cdot \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta d}{2^n - 1} = k \frac{\Delta \theta}{2^n - 1} \Rightarrow q_d = k \frac{\Delta \theta}{2^n - 1} \text{ avec : } k = \frac{\Delta d}{\Delta \theta} .$$

$$\text{On en déduit que : } q_d = \frac{\Delta d}{\Delta \theta} \frac{\Delta \theta}{2^n - 1} \Rightarrow \boxed{q_d = \frac{\Delta d}{2^n - 1}}$$

**Application numérique :**

D'après le document ressource III, on a :  $\Delta d = \Delta x = \Delta y = 350mm$  .

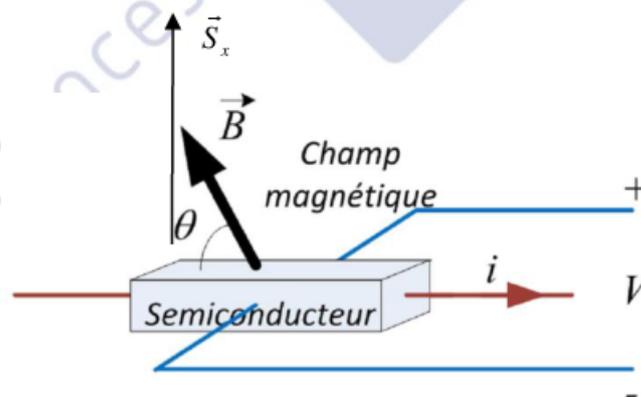
$$q_d = \frac{350}{2^{24} - 1} \approx \frac{350}{2^{24}} = \frac{350}{2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^4} = \frac{(32+3) \cdot 10}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 16} = \frac{(32+3) \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{16} = \left( \frac{32}{16} + \frac{3}{16} \right) \cdot 10^{-5} \approx (2 + 0,25) \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_d = 22,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm/bit}}$$

Si on compare cette valeur à la valeur de  $d = 70\mu m$ , on peut en conclure que cette résolution  $q_d = 22,5 \cdot 10^{-3} \mu m/bit$  est largement suffisante.

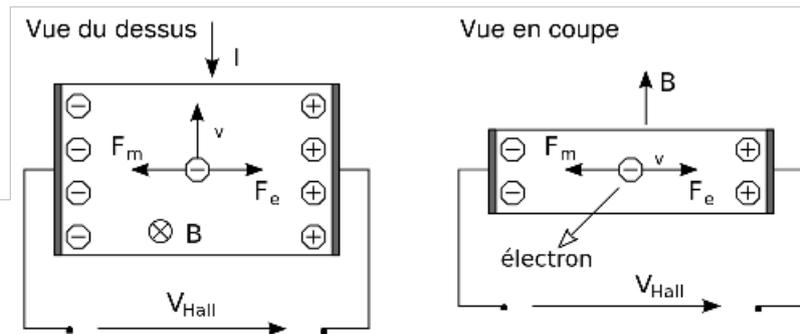
**Question I.6** Expliquer le principe de fonctionnement d'un capteur à effet hall en vous appuyant sur un schéma.

Un capteur à effet Hall délivre une tension  $V$  proportionnelle à l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}$  mesuré dans sa direction de sensibilité  $\vec{S}_x$  et à l'intensité  $i$  du courant d'alimentation.



$$V = K_{\text{mat}} \left| \vec{i} \times \vec{B} \right| = K_{\text{mat}} i B \sin(\theta)$$

Rappel du principe physique :

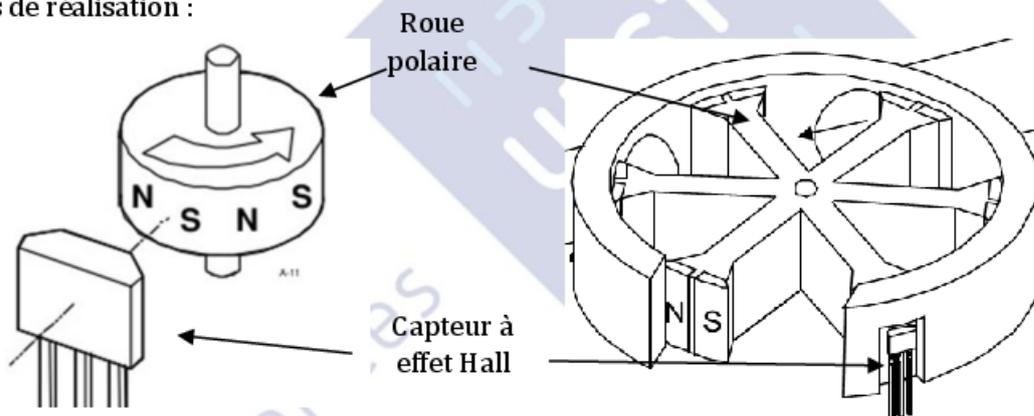


La trajectoire des électrons dans le semi-conducteur est déviée par la présence du champ magnétique qui crée une force de Lorentz. Les électrons s'accumulent sur les armatures. Il y a création d'un champ électrique dont la présence modère l'effet des forces de Lorentz. Le système atteint un équilibre et produit une tension constante entre les armatures appelée tension de Hall.

Utilisation pour un capteur numérique relatif de position angulaire :

On utilise deux capteurs décalés angulairement qui génèrent des signaux périodiques causés par le champ magnétique variable d'une roue polaire en rotation. Le comptage des périodes permet d'obtenir une image de la position angulaire. La combinaison des deux signaux permet de connaître le sens de rotation.

Exemples de réalisation :



Document Melexis..

**Question I.7** Proposer une représentation graphique des topologies de réseaux en ligne et en étoile, et expliciter les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles.

Réseau en ligne : Cas d'un réseau linéaire.

Avantage : Faible coût de déploiement.



Inconvénient : Si un nœud est en panne, c'est l'ensemble du réseau qui ne fonctionne plus

**Réseau en ligne :** Cas d'un réseau en bus

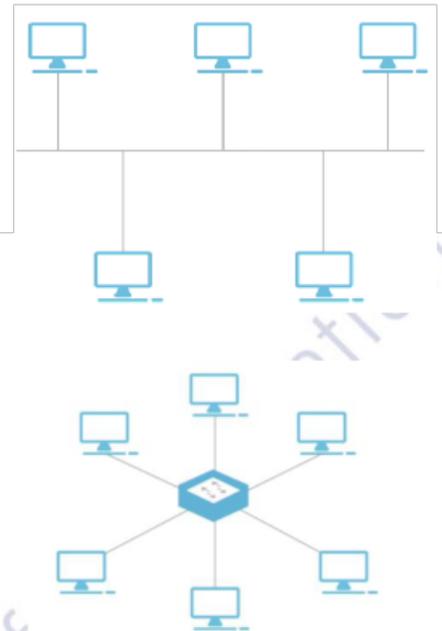
**Avantages :** Faible coût. Si un nœud est défaillant, le réseau est en fonction.

**Inconvénients :** Seul un nœud ou un ordinateur peut envoyer un signal à la fois. Si le support est en panne, c'est l'ensemble du réseau qui ne fonctionne plus.

**Réseau en étoile :**

**Avantages :** Très souple à mettre en œuvre. Si une branche est défaillante, le reste du réseau fonctionne.

**Inconvénient :** Si le périphérique central est en panne, l'ensemble du réseau ne fonctionne plus.



**Question I.8** Ethernet est un protocole de réseau local de type série, synchrone et full-duplex. Expliquer chacun de ces trois termes.

**Liaison série :** Les données sont transmises séquentiellement, les unes après les autres, sur un fil unique.

**Synchrone :** L'émetteur et le récepteur sont cadencés à la même fréquence d'horloge. L'horloge de réception et d'émission doivent émettre le même signal d'horloge (pour la synchronisation).

**Full-duplex :** Pour un canal de communication full-duplex, les données circulent de manière bidirectionnelle et simultanément.

**Question I.9** Calculer le pourcentage d'utilisation de la bande passante, c'est-à-dire le rapport entre la taille de données utiles et la taille minimale d'une trame lorsque la commande numérique communique individuellement avec le variateur d'un actionneur d'une tête de scanning.

La consigne est codée sur 24 bits soit 3 octets. Le pourcentage d'utilisation de la bande passante est donné par :

$$\frac{3}{84} \approx \frac{3}{3.28} = \frac{1}{28} = \frac{100}{28.100} = \frac{25}{7.100} = \frac{3,6}{100} \text{ soit } \boxed{3,6 \%}$$

**Question I.10** Calculer le pourcentage d'utilisation de la bande passante en intégrant dans le calcul la quantité de données qui auraient pu être transmises pendant la durée de réaction du nœud.

La quantité de données que l'on peut transmettre pendant le temps de réaction :

$$10 \mu s \cdot 100 \text{ Mbit/s} \approx 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ bits} = 10^3 \text{ bits} \text{ soit } 125 \text{ octets.}$$

La quantité totale de données de la trame et celle qui correspond au temps de réaction est :  $2.84 + 125 = 293 \text{ octets}$ .

La quantité de données utiles échangées entre le nœud et le variateur est :  $3 + 3 = 6$  octets :

Le pourcentage d'utilisation de la bande passante est donné par :  $\frac{6}{293} \approx \frac{6}{300} = \frac{2}{100} \Rightarrow \boxed{2\%}$

**Question I.11** Calculer le pourcentage d'utilisation de la bande passante avec la technologie Ethercat lorsque la commande numérique communique avec les trois variateurs des deux têtes de scanning.

La quantité de données correspondant à une trame est : 293 octets.

La quantité de données utiles échangées entre le nœud et les 3 variateurs est :  $3 \cdot 6 = 18$  octets :

Le pourcentage d'utilisation de la bande passante est donné par :  $\frac{18}{293} \approx \frac{3 \cdot 6}{300} = \frac{6}{100} \Rightarrow \boxed{6\%}$

## II - Déplacer le plateau de fabrication selon l'axe Z

**Question II.1** Décrire comment sont technologiquement réalisées les liaisons pivots entre les vis et le bâti.

Chaque guidage en rotation des vis par rapport bâti est réalisé par un roulement à billes à contacts obliques à deux rangées de billes (INA ZKLF 2068-2RS-PE). Ce roulement est équivalent à un montage de roulements à contacts obliques montés en O. Il permet d'obtenir une bonne précision de guidage pour un faible encombrement.

**Question II.2** Donner le degré d'hyperstatisme de cette modélisation.

Le mécanisme comporte  $n = 4$  classes d'équivalence cinématiques (en comptant le bâti) et  $l = 8$  liaisons. Le nombre cyclomatique  $\gamma = l - (n - 1)$  est :  $\gamma = 8 - (4 - 1) = 8 - 3 = 5$  cycles indépendants.

Le modèle, cinématique du mécanisme, est constitué de : 2 pivots, 2 hélicoïdales et 4 linéaires annulaires. Le nombre d'inconnues cinématiques est :

$$N_c = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 2 + 2 + 16 = 20 \text{ inconnues cinématiques.}$$

Le mécanisme comporte  $m_u = 1$  mobilité fonctionnelle (2 mouvements pilotés synchrones) et  $m_i = 0$  mobilité interne. Le degré de mobilité est par conséquent :  $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$  mobilité.

Le degré d'hyperstatisme est donné par :  $h = 6 \cdot \gamma - N_c + m$  soit  $h = 6 \cdot 5 - 20 + 1 = 30 - 20 + 1$  d'où :  $h = 11$ . Le modèle associé au mécanisme est hyperstatique.

On peut retrouver cette valeur en comptant les inconnues d'actions mécaniques sans frottement dans les liaisons :

$$N_s = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 10 + 10 + 8 = 28 \text{ inconnues d'actions mécaniques.}$$

Le degré d'hyperstatisme est donné par :  $h = N_s - 6 \cdot (n - 1) + m$  soit  $h = 28 - 6 \cdot (4 - 1) + 1 = 29 - 6 \cdot 3 = 29 - 18$  d'où :  $h = 11$ . Le modèle associé au mécanisme est hyperstatique.

**Question II.3** Quel peut être l'avantage de ce degré d'hyperstatisme ?

Ce degré d'hyperstatisme correspond à une surabondance de guidages qui permet de répartir les efforts à transmettre et permet d'obtenir un système plus rigide et plus précis.

**Question II.4** Par quelle liaison faudrait-il remplacer la liaison pivot entre une vis et le bâti pour réduire au maximum l'hyperstatisme sans modifier la mobilité ?

Pour réduire au maximum l'hyperstatisme sans modifier la mobilité, il faudrait remplacer cette liaison par une liaison sphère-plan de normale dirigée par  $\vec{z}$ .

**Question II.5** Par des observations sur le document ressource V, indiquer comment les contraintes géométriques liées à l'hyperstatisme sont prises en compte au niveau des liaisons pivots.

La mise en position de l'assemblage entre le roulement et le bâti est réalisée par un contact plan sur plan. Elle permet de laisser libre deux degrés de liberté en translation suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  au moment de l'assemblage. Ces degrés de liberté sont ensuite supprimés par adhérence (fixation par vis).

**Choix d'une résolution d'un codeur.****Question II.6** Proposer une valeur pour la résolution du codeur adaptée à la précision demandée.

L'erreur de positionnement sur l'axe numérique Z est noté  $\Delta z$ .

Le système vis-écrou a pour relation d'entrée sortie cinématique :  $V_z = \frac{p \cdot \dot{\theta}_z}{2\pi} \Rightarrow \Delta z = \frac{p \cdot \Delta \theta_z}{2\pi}$

Le système vis-écrou est précédé par un réducteur poulie courroie qui a pour relation d'entrée sortie cinématique :  $\dot{\theta}_z = \frac{Z_m \cdot \dot{\theta}_m}{Z_v} \Rightarrow \Delta \theta_z = \frac{Z_m \cdot \Delta \theta_m}{Z_v}$

On en déduit que :  $\Delta z = \frac{p \cdot \Delta \theta_z}{2\pi} = \frac{p \cdot Z_m \cdot \Delta \theta_m}{2\pi \cdot Z_v} \Rightarrow \Delta \theta_m = \frac{2\pi \cdot Z_v \cdot \Delta z}{p \cdot Z_m}$

**Application numérique :**

On a :  $\Delta z = 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ ,  $p = 5 \text{ mm/tr}$ ,  $Z_v = 48 \text{ dents}$  et  $Z_m = 24 \text{ dents}$ .

$$\Delta \theta_m = \frac{2\pi \cdot 48 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 24} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ rad} \Rightarrow \Delta \theta_m \approx 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

**Déformation des vis.****Question II.7** Comment justifier cette hypothèse ?

Le système vis-écrou est hyperstatique. Le système d'équation issu de la statique comporte une indétermination sur les composantes axiales des résultantes pour les liaisons pivot.

Compte-tenu de cette indétermination, on formule l'hypothèse la plus défavorable en supposant que l'intégralité de la charge axiale est supportée par une seule des deux vis.

**Question II.8** Calculer l'allongement de la vis lors d'une course complète et pour  $m_p = 200$  kg.

Pour calculer l'allongement de la vis, on considère que la vis est soumise à une sollicitation de traction pure.

L'effort normal est supposé égal au poids de la poudre et de l'ensemble mobile. Il est donné par :  
 $N = (m_p + m_{em}) \cdot g$ .

La contrainte normale est :  $\sigma = \frac{N}{S} = \frac{4 \cdot (m_p + m_{em}) \cdot g}{\pi \cdot D_{uv}^2}$

La loi de Hooke donne la déformation en extension :  $\sigma = E_v \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E_v} = \frac{4 \cdot (m_p + m_{em}) \cdot g}{\pi \cdot D_{uv}^2 \cdot E_v}$

Cette déformation étant uniforme le long de la vis, on obtient l'allongement de la vis par intégration :

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_{uv} \Rightarrow \Delta L = \frac{4 \cdot (m_p + m_{em}) \cdot g \cdot L_{uv}}{\pi \cdot D_{uv}^2 \cdot E_v}$$

**Application numérique :**

On a :  $m_p = 200$  kg ,  $m_{em} = 100$  kg ,  $g = 9,81$  N / kg ,  $L_{uv} = 500$  mm ,  $D_{uv} = 30$  mm et  $E_v = 200$  GPa .

$$\Delta L = \frac{4 \cdot (200+100) \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 30^2 \cdot 200 \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 300 \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 900 \cdot 2 \cdot 10^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{10 \cdot 9,81}{\pi \cdot 3 \cdot 10^3} \approx \frac{9,81}{3,14 \cdot 3 \cdot 10^2} = \frac{3,27 \cdot 10^{-2}}{3,14}$$

$$\Rightarrow \Delta L \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

**Question II.9** De même pour  $m_p = 500$  kg.**Application numérique :**

On a :  $m_p = 500$  kg ,  $m_{em} = 100$  kg ,  $g = 9,81$  N / kg ,  $L_{uv} = 500$  mm ,  $D_{uv} = 30$  mm et  $E_v = 200$  GPa .

$$\Delta L = \frac{4 \cdot (500+100) \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 30^2 \cdot 200 \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 600 \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 900 \cdot 2 \cdot 10^3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9,81 \cdot 500}{\pi \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 9,81}{\pi \cdot 3 \cdot 10^3} \approx \frac{2 \cdot 9,81}{3,14 \cdot 3 \cdot 10^2} = \frac{2 \cdot 3,27 \cdot 10^{-2}}{3,14}$$

$$\Rightarrow \Delta L \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

**Question II.10** Conclure quant à la pertinence d'utiliser des codeurs placés au niveau des axes moteurs.

Si on place le codeur à l'entrée de la chaîne cinématique, on augmente la précision de mesure de déplacement par la présence d'un réducteur dans la chaîne cinématique.

**Question II.11** Quelles autres sources d'erreur peuvent affecter la mesure par codeur sur les arbres moteurs.

On a calculé, à la question II.9, l'erreur maximale liée à la déformation en extension sous charge de la vis.

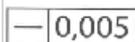
Les autres éléments déformables de la chaîne cinématique, tel que la courroie, les guidages, peuvent également conduire à une erreur de mesure sur les arbres moteur.

La souplesse de la chaîne cinématique va également produire des vibrations.

Il faut également ajouter le bruit de mesure qui intervient sur les composants de la chaîne d'acquisition.

### III - Etaler le lit de poudre

**Question III.1** Expliciter les spécifications géométriques suivantes :



**Type de spécification :** Forme : Rectitude.

**Éléments non idéaux :**

**Élément(s) tolérancé(s) :** Unique : ligne nominalement rectiligne.

**Éléments idéaux :**

**Zone de tolérance :** Simple : Surface plane comprise entre deux droites parallèles distantes de  $0,005 \text{ mm}$ .



**Type de spécification :** Forme : Circularité.

**Éléments non idéaux :**

**Élément(s) tolérancé(s) :** Unique : ligne nominalement circulaire.

**Éléments idéaux :**

**Zone de tolérance :** Simple : Surface plane comprise entre deux cercles concentriques, dont les rayons diffèrent de  $0,005 \text{ mm}$ .



**Type de spécification :** Position : Coaxialité.

**Eléments non idéaux :**

**Elément(s) tolérancé(s) :** Unique : ligne nominale rectiligne axe réel d'une surface nominale cylindrique.

**Elément(s) de référence :** Multiple : Deux surfaces nominale cylindriques A et B.

**Eléments idéaux :**

**Référence spécifiée :** Simple : Droite axe commun des deux cylindres tangents aux surface A et B et minimisant le critère Min-Max.

**Zone de tolérance :** Simple : Volume compris dans un cylindre de diamètre 0,01mm.

**Contraintes :** Position : La zone de tolérance a pour axe la référence spécifiée.

**Question III.2** A l'aide de la modélisation proposée dans le **document ressource VIII**, calculer les actions mécaniques de liaison au niveau des deux supports A et B.

On isole la poutre  $[AB]$ . Elle est soumise à :

- Bâti  $\rightarrow$  poutre en A : modélisée par une force  $\{A, \vec{F}_A\}$  avec  $\vec{F}_A = X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}$  car la liaison est une articulation en A sans frottements.
- Bâti  $\rightarrow$  poutre en B : modélisée par une force  $\{B, \vec{F}_B\}$  avec  $\vec{F}_B = Y_B \vec{y}$  car la liaison est un appui simple\* en B sans frottements.
- Poudre  $\rightarrow$  poutre : modélisée par une densité linéique d'effort  $\dot{p} = -p \vec{y}$  supposée uniforme entre A et B. Cette charge répartie est équivalente à une force  $\{C, \vec{F}_C\}$  avec  $\vec{F}_C = -p.L \vec{y}$  où C désigne le milieu de  $[AB]$ .

Le poids propre de la poutre est négligé.

\* : La modélisation adoptée diffère de celle proposée sur le document ressource VIII pour ne pas conduire à une indétermination sur les résultantes dans la direction  $\vec{x}$ . Un modèle basé sur deux appuis simples permet également de lever cette indétermination.

On applique le principe fondamental de la statique à la poutre en équilibre statique par rapport au bâti supposé lié à un référentiel galiléen. On obtient :

$$\begin{cases} X_A = 0 & (1) & \text{Equation de résultante suivant } \vec{x} . \\ Y_A + Y_B - p.L = 0 & (2) & \text{Equation de résultante suivant } \vec{y} . \\ L.Y_B - (L/2).(p.L) = 0 & (3) & \text{Equation de moment en A suivant } \vec{z} . \end{cases}$$

$$\text{Résolution : (1)} \Rightarrow \boxed{X_A = 0}$$

$$(3) \Rightarrow \mathcal{L}.Y_B - (\mathcal{L}/2).(p.L) = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = \frac{p.L}{2}}$$

$$(3) \rightarrow (2) \Rightarrow Y_A = p.L - Y_B = p.L - \frac{p.L}{2} \Rightarrow \boxed{Y_A = \frac{p.L}{2}}$$

**Question III.3** En déduire l'expression du torseur de cohésion  $\{T_{coh}\}$  le long de la poutre.

Soit  $G(x) \in [AB]$  tel que :  $AG(x) = x \hat{x}$  avec  $x \in [0, L]$ .

On isole la partie  $[GB]$  de la poutre. Elle est soumise à :

- Bâti  $\rightarrow [GB]$  en B : modélisée par une force  $\{B, \bar{F}_B\}$  avec  $\bar{F}_B = \frac{p.L}{2} \bar{y}$  Cf. question précédente.
- Poudre  $\rightarrow [GB]$  : modélisée par une densité linéique d'effort  $\dot{p} = -p\dot{y}$  supposée uniforme entre G et B. Cette charge répartie est équivalente à une force  $\{M, \bar{F}_M\}$  avec  $\bar{F}_M = -p.(L-x)\bar{y}$  où M désigne le milieu de  $[GB]$ .

$$\text{On a : } \{T_{coh}\} = \{T_{ext \rightarrow [GB]}\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ -p.(L-x) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{(x, \bar{y}, \bar{z})} \\ M \end{matrix} + \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{p.L}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{(x, \bar{y}, \bar{z})} \\ B \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \{T_{coh}\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ -p.(L-x) & 0 \\ 0 & -p \frac{(L-x)^2}{2} \end{matrix} \right\}_{(x, y, z)} \\ G(x) \end{matrix} + \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{p.L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{p.L}{2}(L-x) \end{matrix} \right\}_{(x, y, z)} \\ G(x) \end{matrix} \Rightarrow \{T_{coh}\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ -p.\left(\frac{L}{2}-x\right) & 0 \\ 0 & \frac{px}{2}.(L-x) \end{matrix} \right\}_{(x, y, z)} \\ G(x) \end{matrix}$$

La poutre est soumise à une sollicitation de flexion simple.

**Question III.4** Calculer l'équation de la déformée  $y(x)$ .

Si on note  $y(x)$  la composante suivant  $\vec{y}$  du déplacement du point  $G(x) \in [AB]$ , on peut écrire :

$$E.I_{Gz} \cdot y''(x) = M_{fk}(x) \Rightarrow y''(x) = \frac{p}{2.E.I_{Gz}} (Lx - x^2) = K \cdot (Lx - x^2) \text{ car le moment quadratique par rapport à}$$

l'axe de rotation  $I_{Gz}$  de la section est constant le long de la poutre.

Remarque :  $I_{Gz} = \frac{\pi \cdot (2.r)^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$  et  $E$  désigne le module d'Young du matériau.

Par intégration, on obtient :  $y'(x) = K \cdot \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C1 \Rightarrow y(x) = K \cdot \left( \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C1 \cdot x + C2$ .

Les conditions aux limites en déplacement permettent d'écrire pour les appuis en A et B :  $y(0) = y(L) = 0$

Par symétrie du problème, on peut également écrire que :  $y'(L/2) = 0$

On en déduit que :  $y(0) = 0 \Rightarrow C2 = 0$  et que :

$$y'(L/2) = 0 \Rightarrow K \cdot \left( \frac{L \cdot L^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{L^3}{3 \cdot 2^3} \right) + C1 = 0 \Rightarrow C1 = -\frac{K \cdot L^3}{2^3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{K \cdot L^3}{2^3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{K \cdot L^3}{12}$$

D'où :  $y(x) = K \cdot \left( \frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{K \cdot L^3}{12} x = -\frac{K \cdot x}{12} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$

Or :  $K = \frac{p}{2.E.I_{Gz}}$ , avec  $I_{Gz} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ , d'où :  $\frac{K}{12} = \frac{4 \cdot p}{12 \cdot 2 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{p}{6 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4}$

Ce qui donne finalement :  $y(x) = -\frac{p \cdot x}{6 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$

**Question III.5** En déduire l'expression de la flèche maximale  $\delta$ .

Si on pose :  $\delta = |y(x)|_{\max}$ , cette valeur est obtenue, par symétrie du problème pour  $x = L/2$ . D'où :

$$\delta = \frac{p}{6 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} \cdot \frac{L}{2} \left( \left( \frac{L}{2} \right)^3 - 2L \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 + L^3 \right) = \frac{p \cdot L^4}{12 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{p \cdot L^4}{12 \cdot 8 \cdot E \cdot \pi \cdot r^4} (1 - 4 + 8) \Rightarrow \delta = \frac{5 \cdot p}{96 \cdot \pi \cdot E} \left( \frac{L}{r} \right)^4$$

**Question III.6** En déduire l'expression du diamètre du rouleau de lissage et sa valeur pour garantir un écart de rectitude de  $1 \mu\text{m}$ .

On souhaite  $\delta \leq \delta_{\max} \Rightarrow \frac{5 \cdot p}{96 \cdot \pi \cdot E} \left( \frac{L^4}{r^4} \right) \leq \delta_{\max} \Rightarrow r^4 \geq \frac{5 \cdot p}{96 \cdot \pi \cdot E \cdot \delta_{\max}} L^4 \Rightarrow r \geq \left( \frac{5 \cdot p}{96 \cdot \pi \cdot E \cdot \delta_{\max}} \right)^{1/4} L$

**Application numérique :**

On a :  $\delta_{\max} = 1 \mu\text{m} = 1.10^{-3} \text{ mm}$ ,  $p = 1000 \text{ N/m} = 1 \text{ N/mm}$ ,  $L = 500 \text{ mm}$  et  $E = 200 \text{ GPa} = 200.10^3 \text{ MPa}$ .

$$r \geq \left( \frac{5.1}{96.\pi.200.10^3.1.10^{-3}} \right)^{1/4} .500 = \left( \frac{5}{3.2^4.\pi.400} \right)^{1/4} .500 = \left( \frac{1}{3.\pi.80} \right)^{1/4} \frac{500}{2} \approx \left( \frac{1}{10.80} \right)^{1/4} .250$$

$$r \geq \left( \frac{1}{800} \right)^{1/4} .250 = \frac{250}{\sqrt{20.\sqrt{2}}} = \frac{250}{\sqrt{28}} = \frac{250}{\sqrt{25+3}} = \frac{250}{5\sqrt{1+\frac{3}{25}}} \approx 50 \left( 1 - \frac{3}{2.25} \right) \approx 50 - \frac{3.50}{2.25} \text{ D'où : } \boxed{r \geq 47 \text{ mm}}$$

**Question III.7** Déterminer l'expression de la masse  $m$  du rouleau comme le produit de trois fonctions  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$  telles que :

- $F_1$  : fonction des données matériau ( $\rho$ ,  $E$ )
- $F_2$  : fonction de la géométrie ( $L$ )
- $F_3$  : fonction du chargement et de la déformation ( $p$ ,  $\delta$ )

On a :  $m = \rho\pi r^2 L$ . Or, on a montré que :  $r^4 = \frac{5.p}{96.\pi.E.\delta} L^4 \Rightarrow r^2 = \sqrt{\frac{5.p}{96.\pi.E.\delta}} L^2 \Rightarrow m = \rho.\pi \sqrt{\frac{5.p}{96.\pi.E.\delta}} L^3$ .

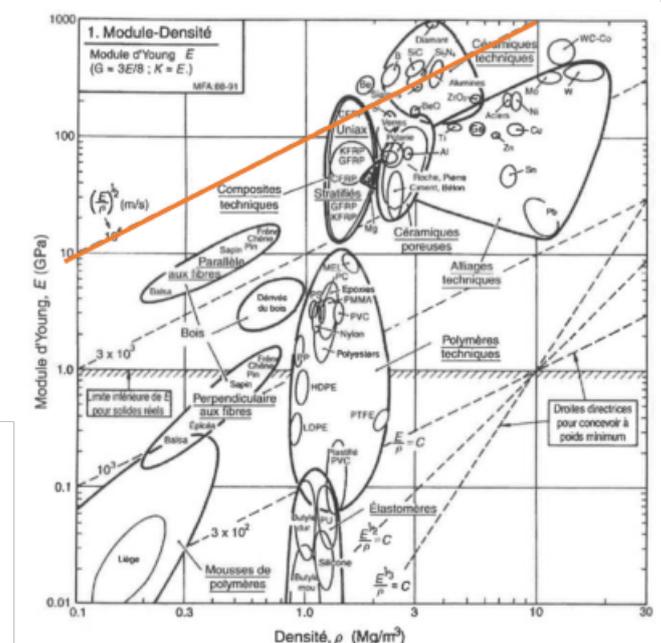
$$\text{D'où : } m = \underbrace{\left( \frac{\rho}{\sqrt{E}} \right)}_{F_1(\rho, E)} \cdot \underbrace{\left( \sqrt{\frac{5.\pi}{96}} L^3 \right)}_{F_2(L)} \cdot \underbrace{\left( \sqrt{\frac{p}{\delta}} \right)}_{F_3(p, \delta)}$$

**Question III.8** Parmi les matériaux retenus dans le diagramme (**document ressource IX**), sélectionner, en expliquant la méthode utilisée, les deux familles de matériaux les plus performantes. Le matériau retenu par le constructeur est un acier faiblement allié. Selon quel critère supplémentaire a-t-il fait ce choix ?

On remarque que :  $F_1(\rho, E) = 1/I_p$ . Si l'on souhaite minimiser la masse, il faut que l'indice de performance  $I_p$  du matériau soit maximum.

Les deux familles de matériaux les plus performants seraient les matériaux composites et les céramiques techniques.

Finalement, le matériau choisi par le constructeur est un acier faiblement allié, le critère supplémentaire de sélection est probablement la réduction du coût du matériau et du coût de fabrication.



**Question III.9** Expliquer le principe de la trempe superficielle.

La trempe superficielle d'un acier est un procédé qui a pour but d'obtenir l'austénitisation de la couche superficielle d'une pièce (de 1 à 20 mm), uniquement pour les surfaces souhaitées.

Ce chauffage peut être obtenu soit :

- Par induction.
- Par combustion d'un gaz (chalumeau).
- Par un plasma (torche plasma).
- Par un faisceau d'électrons.
- Par un faisceau laser.

Ces procédés de chauffage permettent une montée rapide en température et un maintien très court de la température de la couche superficielle en contrôlant son épaisseur.

L'arrêt du chauffage est immédiatement suivi d'un refroidissement rapide (trempe) pour transformer l'austénite en martensite ce qui va permettre d'obtenir la dureté après traitement. La dureté de la martensite est fonction de la teneur en carbone de l'acier.

Le refroidissement rapide peut être obtenu :

- Par convection vers l'intérieur de la pièce qui n'a pas été chauffée (puit thermique).
- Par l'action éventuelle d'un milieu refroidissant extérieur : gaz, eau, huile...

**Question III.10** Pour chacun des ordonnancements des opérations usinage « ébauche », « usinage finition » et « traitement thermique » proposés dans le document réponse, justifier la faisabilité ou non de chacune des propositions au regard de trois critères :

- Respect des tolérances géométriques
- Dureté de la pièce à usiner
- Surépaisseur d'usinage et profondeur de trempe

Proposition 1 : Trempe superficielle - Ébauche - Finition

FAISABILITE : NON

L'effet de la trempe superficielle, augmentation de la dureté, est supprimé par l'usinage en ébauche car l'épaisseur de la trempe superficielle n'est que de 2 mm. D'autre part, la dureté en surface (53 HRC) est incompatible avec le matériau de l'outil d'ébauche car il ne peut usiner que des aciers dont la dureté est supérieure à 38 HRC.

Proposition 2 : Ébauche - Trempe superficielle - Finition

FAISABILITE : OUI

L'opération de finition permet d'obtenir les tolérances géométriques souhaitées après les déformations éventuelles à l'issue du traitement thermique de la pièce. L'outil peut être engagé d'un minimum de 0,07 mm. Cette valeur doit être ajoutée à la valeur de la profondeur du traitement souhaitée. D'autre part, le matériau de l'outil est compatible avec la dureté du matériau de la pièce en surface (53 HRC < 60 HRC valeur maximale admissible par l'outil).

Proposition 3 : Ébauche - Finition - Trempe superficielle

FAISABILITE : NON

Il n'y a plus de problème d'usinage lié à la dureté de la pièce. Le traitement thermique peut induire des déformations qui ne pourront pas être corrigé par une opération de finition.

**Question III.11** À l'aide du torseur des petits déplacements, exprimer le déplacement  $DM_{thi}$  du point théorique  $M_{thi}$ .

En appliquant la relation de champ de moment du torseur de petit déplacement  $\{T_{pd}\}$  entre les points  $O_i$  et  $M_{thi}$ , on obtient :  $DM_{thi} = \dot{D}(M_{thi}) = \dot{D}(O_i)$  car la résultante de ce torseur est égale au vecteur nul.

On a donc :  $DM_{thi} = u \dot{x} + v \dot{y}$

**Question III.12** En déduire l'expression des écarts optimisés résiduels  $e_i$  définis par le schéma du document ressource XI, telle que  $e_i = f(u, v, \xi_i, \theta_i)$ .

D'après ce schéma, on a :  $e_i = \xi_i - DM_{thi} \cdot n_i = \xi_i - (u \dot{x} + v \dot{y}) \cdot (\cos \theta_i \dot{x} + \sin \theta_i \dot{y})$

On obtient :  $e_i = \xi_i - (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)$

**Question III.13** Établir les expressions analytiques de  $u$  et  $v$  en résolvant le système linéaire et en tenant compte de la spécificité des valeurs de  $\cos \theta_i$  et  $\sin \theta_i$  données dans le document ressource XI.

Le système d'équations est de la forme :  $\begin{cases} A.u + B.v = C \\ B.u + D.v = E \end{cases}$  avec :

$$A = \sum_1^4 (\cos \theta_i)^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2 \quad B = \sum_1^4 \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \quad C = \sum_1^4 \xi_i \cdot \cos \theta_i = \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 - \xi_3 + 0 \cdot \xi_4 = \xi_1 - \xi_3$$

$$D = \sum_1^4 (\sin \theta_i)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2 \quad E = \sum_1^4 \xi_i \cdot \sin \theta_i = 0 \cdot \xi_1 + \xi_2 + 0 \cdot \xi_3 - \xi_4 = \xi_2 - \xi_4$$

On a donc :  $\begin{cases} 2.u + 0.v = \xi_1 - \xi_3 \\ 0.u + 2.v = \xi_2 - \xi_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\xi_1 - \xi_3}{2} \\ v = \frac{\xi_2 - \xi_4}{2} \end{cases}$

**Question III.14** Calculer les valeurs numériques de  $u$  et  $v$  à partir des valeurs de  $\xi_i$  données dans le document ressource XI.

On a :  $\begin{cases} u = \frac{\xi_1 - \xi_3}{2} = \frac{10 - (-4)}{2} = \frac{14}{2} \\ v = \frac{\xi_2 - \xi_4}{2} = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 7 \mu m \\ v = 3 \mu m \end{cases}$

**Question III.15** Exprimer le défaut de circularité à partir des écarts optimisés  $e_i$  et proposer une application numérique. La tolérance est-elle respectée ?

$$e_i = \xi_i - (u \cdot \cos \theta_i + v \cdot \sin \theta_i)$$

$$e_1 = 10 - (7.1 + 3.0) = 10 - 7 = 3 \mu m$$

$$e_2 = 8 - (7.0 + 3.1) = 8 - 3 = 5 \mu m$$

$$e_3 = -4 - (7 \cdot (-1) + 3.0) = -4 + 7 = 3 \mu m$$

$$e_4 = 2 - (7.0 + 3 \cdot (-1)) = 2 + 3 = 5 \mu m$$

Le défaut de circularité est donné par :  $d_f = \text{Max}_i(e_i) - \text{Min}_i(e_i)$ .

On en déduit que :  $d_f = 5 - 3 \Rightarrow d_f = 2 \mu m$

La tolérance est respectée car le défaut de forme n'excède pas  $5 \mu m$ .

**Question III.16** A l'aide d'une représentation graphique à main levée sur le document réponse, proposer une solution de réglage de la tension de la courroie à l'aide du tendeur situé entre l'ensemble {moteur + réducteur} et le bâti, et visible sur le **document ressource VII**.

Les solutions proposées sont présentées à la suite de la page 16.

**Question III.17** Représenter sur le Dessin Réponse une solution constructive pour la réalisation des fonctions suivantes :

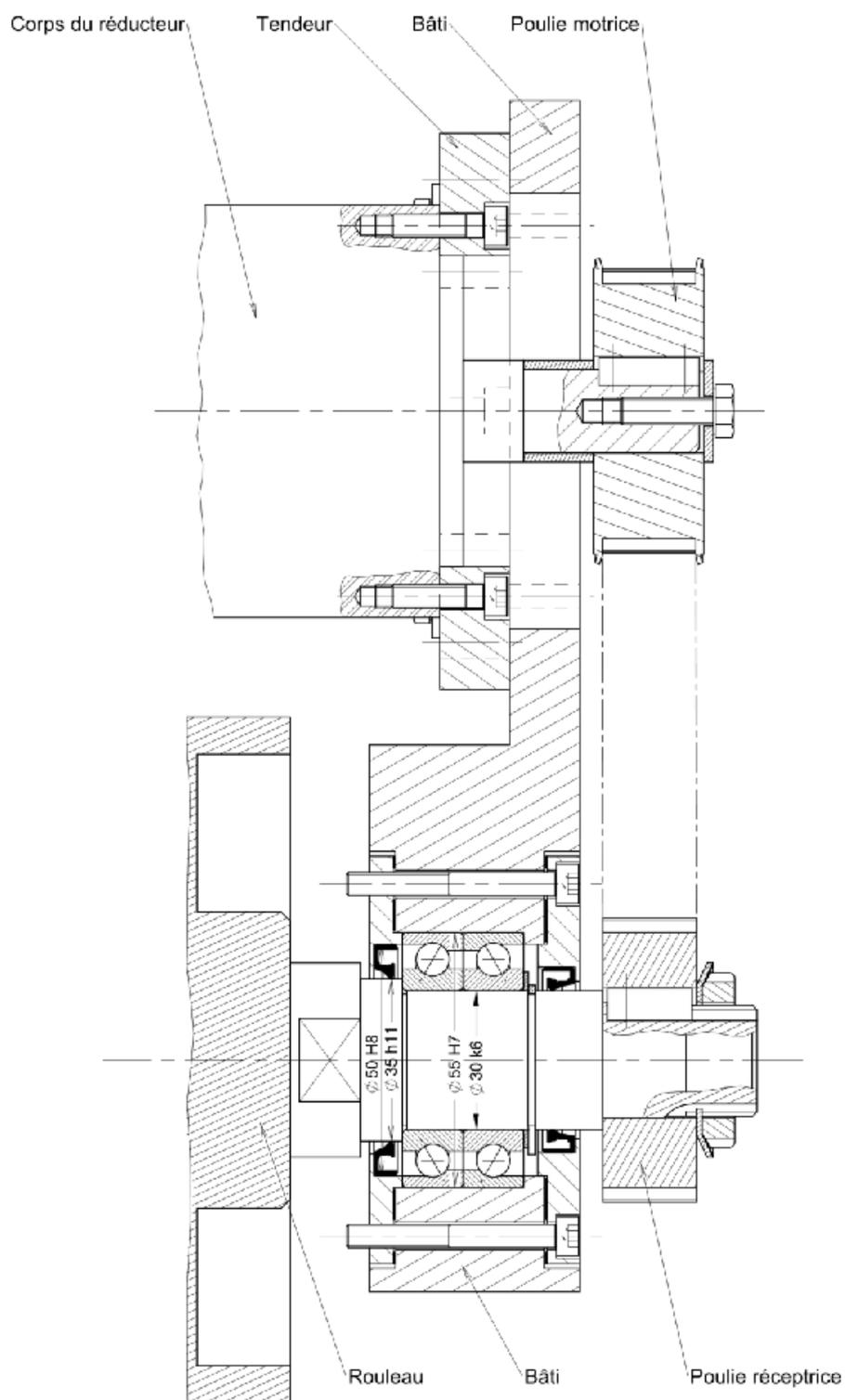
- Liaison pivot entre le rouleau de lissage et le bâti du chariot au moyen de deux liaisons rotules, chacune étant réalisée par une paire de roulements dont les caractéristiques sont présentées dans le **document ressource XII** ;
- Étanchéité dynamique de la liaison au moyen de joints à lèvres dont les caractéristiques sont présentées dans le document ressource XII ;
- Entraînement par obstacle du rouleau de lissage au moyen d'un système poulies courroie crantée relié avec l'arbre moteur en sortie du réducteur.

Les ajustements seront précisés et une attention toute particulière sera portée sur la montabilité de la solution proposée ainsi qu'à la qualité graphique.

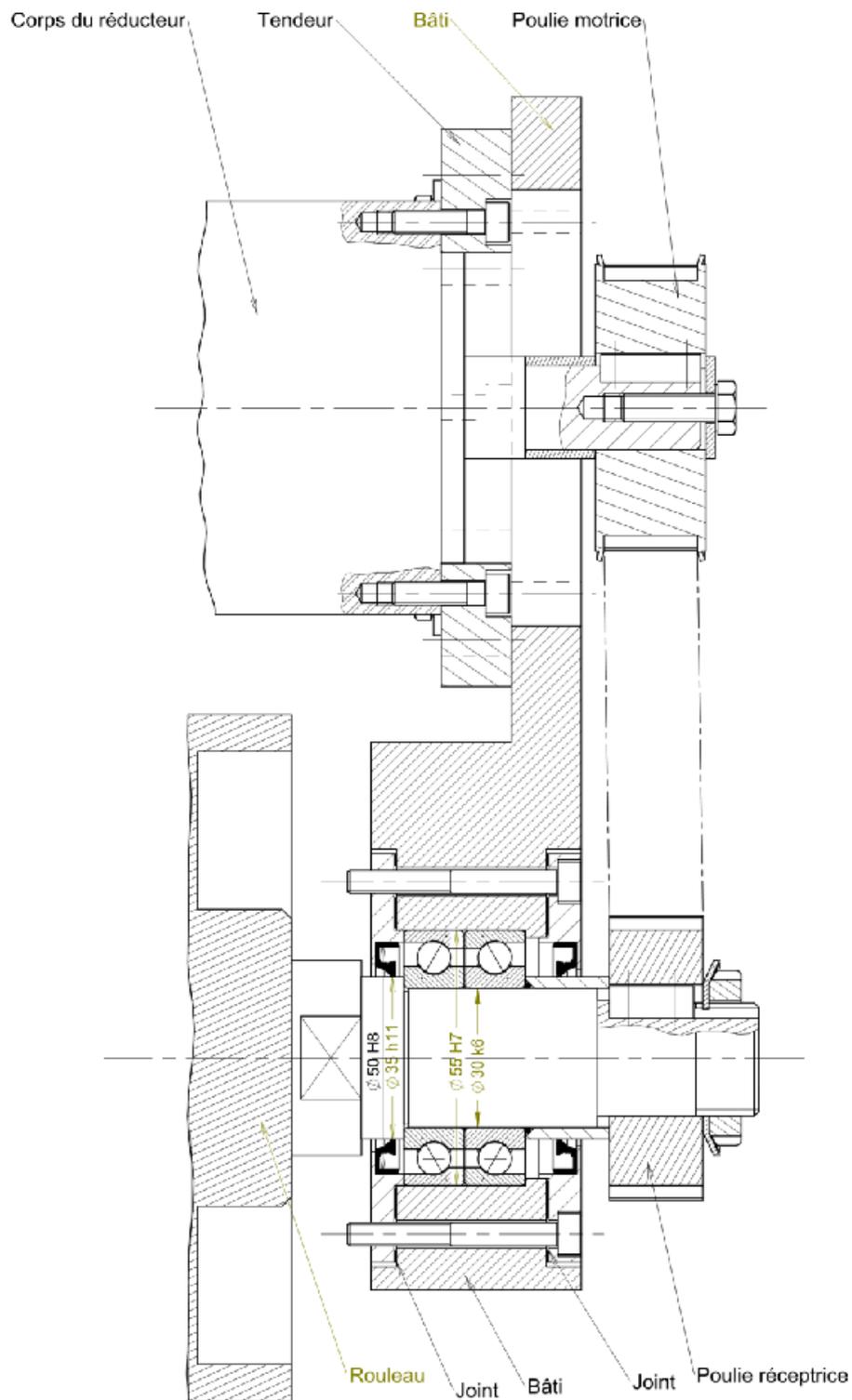
On suppose que le montage est identique de chaque côté du rouleau de lissage, ainsi seule la liaison côté droit sera représentée. Enfin on fait l'hypothèse que le rouleau est démontable en le tirant vers la gauche du système.

Les solutions proposées sont présentées à la suite de la page 16.

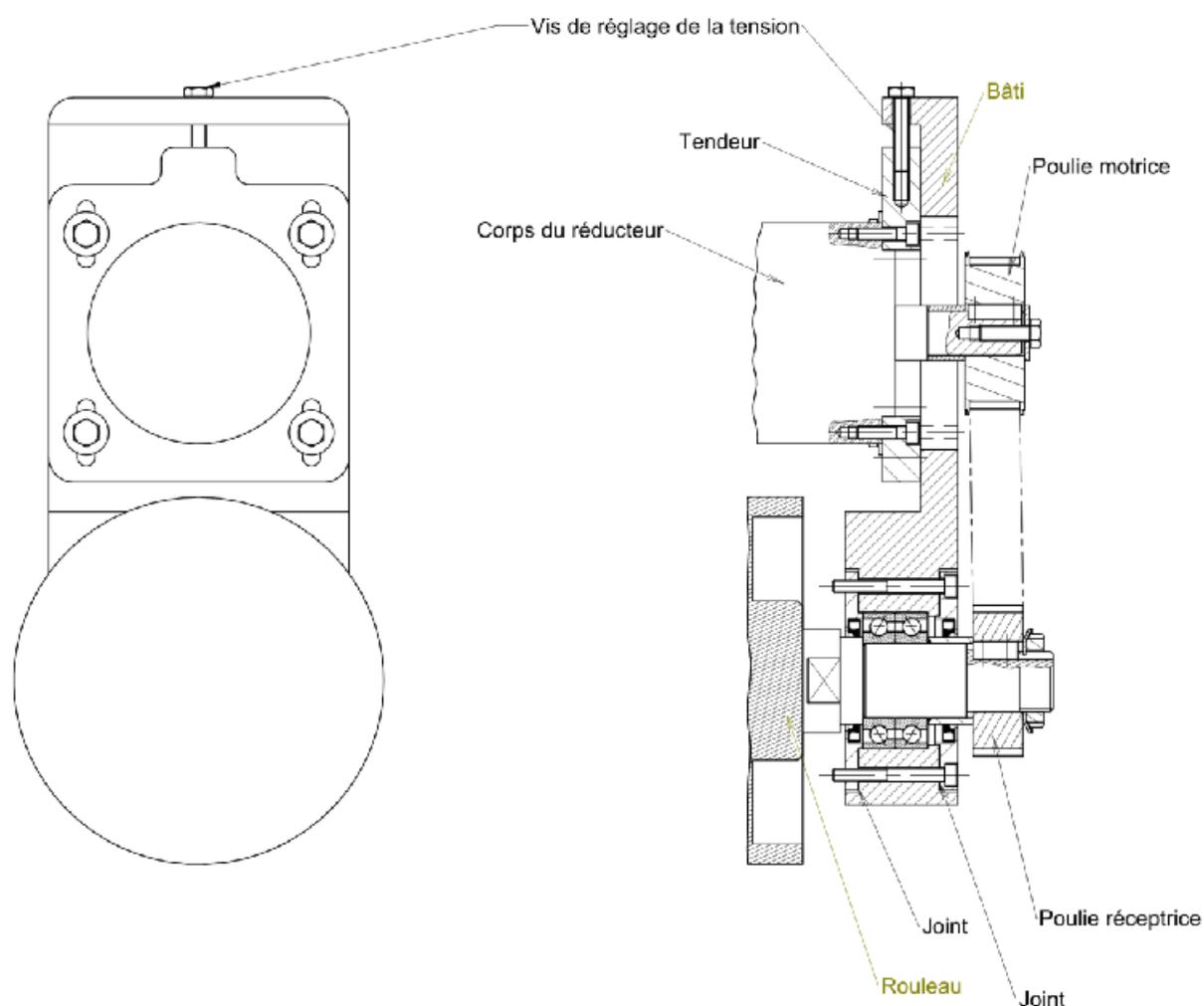
## Dispositif d'entraînement du rouleau de mise en couche Echelle 1 : 1



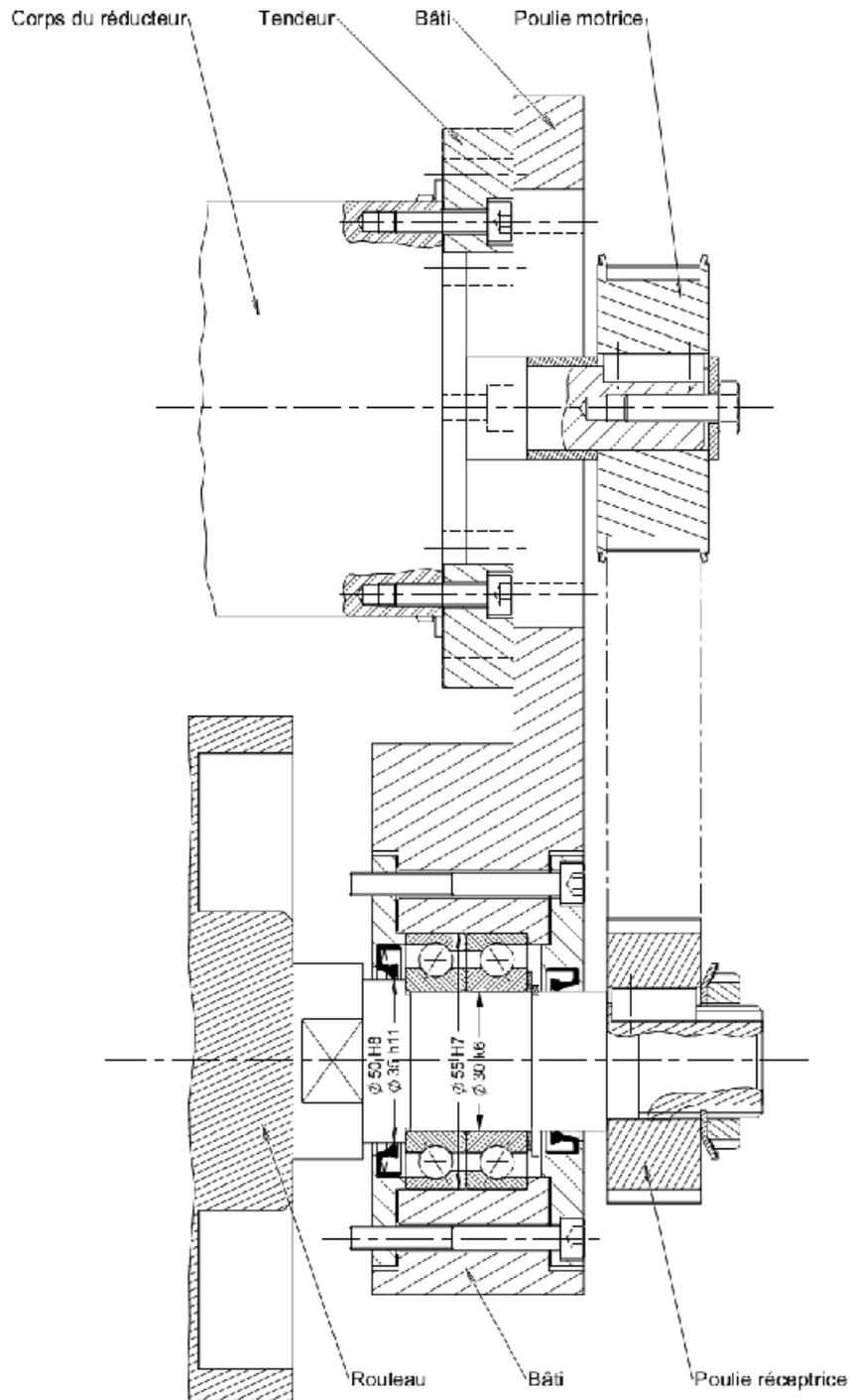
## Dispositif d'entraînement du rouleau de mise en couche Echelle 1 : 1



## Dispositif d'entraînement du rouleau de mise en couche Echelle 1 : 2



## Dispositif d'entraînement du rouleau de mise en couche Echelle 1 : 1



Produit d'éducation SOLIDWORKS – A titre éducatif uniquement.

## PERSPECTIVES ASSEMBLAGE ET REGLAGE

