

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2020

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Manipulateur FESTO EXCM-30

Corrigé UPSTI

2 Établissement de la logique de commande

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que la logique de commande respecte bien certaines exigences du cahier des charges.

2.1 Description du processus normal

Question 1

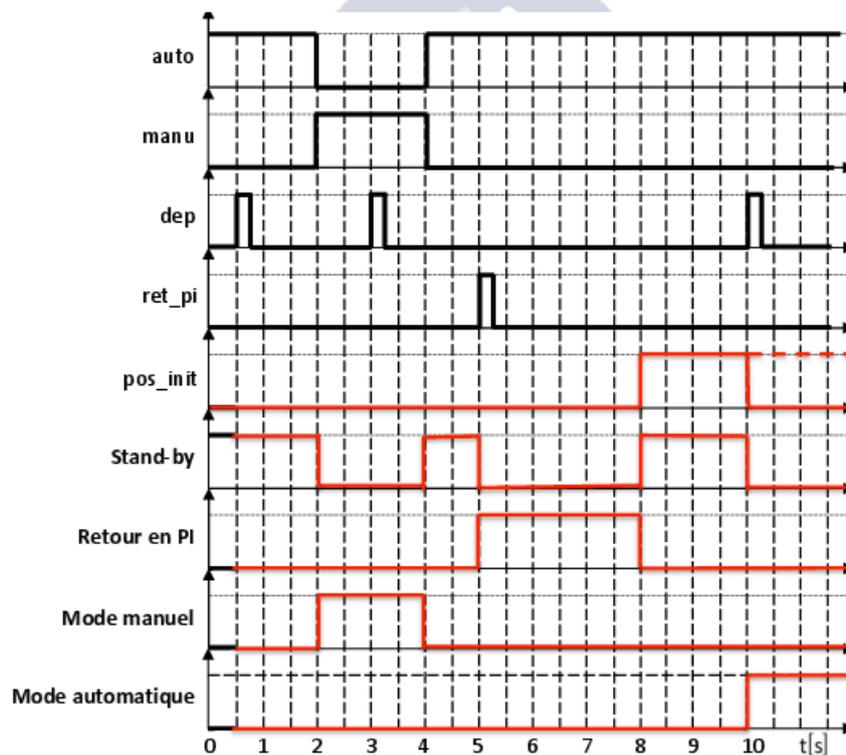


Figure R1 : chronogramme à compléter

Le cahier des charges est respecté grâce à la condition de garde `pos_init`.

2.2 Élaboration des consignes articulaires

2.2.1 Modèle géométrique direct

Question 2 Lorsque le moteur M_1 tourne dans le sens trigonométrique positif, la longueur de la courroie entre les points D et A augmente et on a : $\Delta DC + \Delta BA = R_p \Delta \theta_1$. En utilisant les notations du sujet, on a donc :

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} = R_p \Delta \theta_1.$$

De manière analogue, lorsque le moteur M_2 tourne dans le sens trigonométrique positif, la longueur de la courroie entre les points L et I diminue. On a donc :

$$\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = -R_p \Delta \theta_2.$$

Question 3 On écrit les variations de longueur dans les équations de contrainte géométrique données dans le sujet :

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{x_3} = 0 ; \Delta l_{y_1} + \Delta l_{y_2} = 0 ; \Delta l_{x_1} = \Delta l_{x_2} \text{ et } \Delta l_{x_3} = \Delta l_{x_4}.$$

Question 4 On utilise les résultats de la **question 2** :

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} = R_p \Delta \theta_1 \quad (1)$$

$$\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = -R_p \Delta \theta_2. \quad (2)$$

En additionnant les deux équations ci-dessus (1) + (2), puis en utilisant les équations de la **question 3**, on obtient :

$$R_p(\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2) = \Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} + \Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = 2\Delta l_{x_2}.$$

En soustrayant les équations (1) - (2), puis en utilisant les équations de la **question 3**, on obtient :

$$R_p(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) = \Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} - \Delta l_{x_2} - \Delta l_{y_2} = -2\Delta l_{y_2}.$$

Ainsi :

$$\Delta l_{x_2} = \frac{R_p}{2}(\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2) \text{ et } \Delta l_{y_2} = -\frac{R_p}{2}(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2).$$

2.2.2 Modèle géométrique inverse

Question 5 On inverse les deux relations précédentes de la **question 4** et on obtient :

$$\Delta \theta_1 = \frac{\Delta l_{x_2} - \Delta l_{y_2}}{R_p} ; \Delta \theta_2 = -\frac{\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2}}{R_p}.$$

Question 6 Pour obtenir un déplacement longitudinal du chariot caractérisé par : $\Delta l_{x_2} > 0$ et $\Delta l_{y_2} = 0$, il faut que les moteurs M_1 et M_2 tournent à la même vitesse mais de sens opposé, avec M_1 dans le sens positif trigonométrique. Dans ce cas, en utilisant les équations de la **question 4**, on obtient bien :

$$\Delta l_{x_2} = \frac{R_p}{2}(2\Delta \theta_1) = R_p \Delta \theta_1 > 0 \text{ et } \Delta l_{y_2} = -\frac{R_p}{2}(\Delta \theta_1 - \Delta \theta_1) = 0.$$

Moteur	Rotation	Sens
M_1	oui	+
M_2	oui	-

2.3 Vérification du programme « Retour en position initiale »

Question 7

Cette question n'est pas très claire. Nous choisissons la trajectoire la plus courte, ce qui nécessite néanmoins de piloter les 2 moteurs M_1 et M_2 à des vitesses différentes.

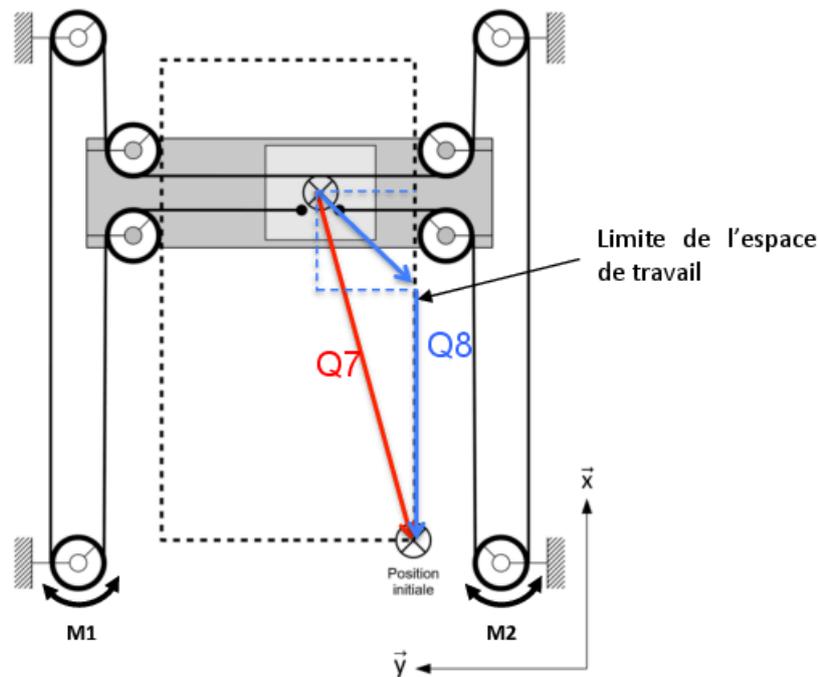


Figure R2 : trajectoires de retour en position initiale

Question 8

Pour la position du chariot de la figure R2, $f_{c_x} \neq f_{c_x0}$ et $f_{c_y} \neq f_{c_y0}$. Donc selon l'algorithme de la figure 6, les opérations sont dans l'ordre les suivantes :

- M_2 est actionné dans le sens trigonométrique positif, M_1 est à l'arrêt : $\Delta\theta_1 = 0 \implies \Delta l_{x_2} = \Delta l_{y_2}$ et $\Delta\theta_2 > 0 \implies \Delta l_{x_2} < 0$. Le chariot se déplace donc le long de la diagonale tracée sur la figure R2 jusqu'à atteindre $f_{c_y} = f_{c_y0}$;
- $f_{c_y} = f_{c_y0}$ et $f_{c_x} \neq f_{c_x0}$: M_1 est actionné dans le sens trigonométrique négatif et M_2 dans le sens trigonométrique positif, à la même vitesse $\Delta\theta_2 = -\Delta\theta_1$ alors $\Delta l_{x_2} = -R_p \Delta\theta_2$ et $\Delta y_2 = 0$. Le chariot se déplace selon la direction $-\vec{x}$ (voir le tracé sur la figure R2) jusqu'à atteindre $f_{c_x} = f_{c_x0}$.

3 Commande des axes du manipulateur

Objectif

L'objectif de cette partie est d'établir un modèle de connaissance du manipulateur en vue d'élaborer des lois de commande.

3.1 Modèle de la partie mécanique du manipulateur

3.1.1 Détermination de la raideur équivalente de la courroie

a) Calculs préliminaires

Question 9

- **Pour le cas 2**, on isole le système constitué du ressort 2 de raideur k_2 et de la masse ponctuelle m . Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :
 - ◊ le poids ;
 - ◊ les actions de liaison ;
 - ◊ l'action du ressort 1 sur le ressort 2 ;
 - ◊ la force \vec{F} .

On écrit le TRS en projection suivant l'axe \vec{x} .

$$F(t) - k_1 x_1(t) = 0.$$

Par une démarche similaire et en isolant la masse ponctuelle m , on obtient :

$$F(t) - k_2(x(t) - x_1(t)) = 0.$$

On a donc : $F(t) = kx(t) = k_1 x_1(t) = k_2(x(t) - x_1(t))$, et :

$$x(t) = \frac{F(t)}{k} ; x_1(t) = \frac{F(t)}{k_1} ; x(t) - x_1(t) = \frac{F(t)}{k_2}.$$

On obtient donc $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, en supposant $F(t) \neq 0$. Ainsi la raideur du ressort équivalent est :

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

- **Pour le cas 3**, on isole la masse ponctuelle m . Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :
 - ◊ le poids ;
 - ◊ les actions de liaison ;
 - ◊ l'action du ressort 1 sur m ;
 - ◊ l'action du ressort 2 sur m ;
 - ◊ la force \vec{F} .

On écrit le TRS en projection suivant l'axe \vec{x} .

$$F - k_1 x(t) - k_2 x(t) = 0 \Rightarrow F = (k_1 + k_2)x(t).$$

Ainsi la raideur du ressort équivalent est :

$$k = k_1 + k_2.$$

b) Détermination du modèle équivalent

Question 10 On isole la poulie PR. Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- l'action mécanique de la liaison pivot ;
- l'action du ressort de raideur kc_2 ;
- l'action du ressort de raideur kc_3 .

On néglige l'inertie de la poulie et on applique le TMD en H en projection suivant la direction \vec{z} :

$$(-R_p \vec{y} \wedge F_{2 \rightarrow PR} \vec{x} + R_p \vec{y} \wedge F_{3 \rightarrow PR} \vec{x}) \cdot \vec{z} = 0 \implies F_{2 \rightarrow PR} = F_{3 \rightarrow PR}.$$

Ce qui correspond au cas 2, lorsque l'effort de rappel des deux ressorts est le même (par analogie A du cas 2 $\rightarrow H$ de la figure 8 du sujet). Les ressorts de raideur kc_2 et kc_3 sont donc en série.

Question 11 Les ressorts kc_2 et kc_3 sont en série. Le ressort kc_1 est en parallèle avec la mise en série des 2 autres ressorts. On obtient donc la raideur équivalente du système poulies-courroie :

$$K_{eq} = kc_1 + \frac{kc_2 \cdot kc_3}{kc_2 + kc_3}.$$

3.1.2 Modèle de connaissance de la partie mécanique du manipulateur

- Objectif

L'objectif de cette partie est de justifier le modèle proposé.

Question 12 On déplace le point de prélèvement de la grandeur $T_c(p)$ vers la droite au point $V_x(p)$. Il faut donc multiplier le bloc de retour R_p par $f_2 + M_t p$. La fonction de transfert du schéma-blocs interne est : $\frac{V_x(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{eq}}{p(f_2 + M_t p) + K_{eq}}$. On obtient pour le schéma-blocs global :

$$H(p) = \frac{R_p K_{eq}}{[p(f_2 + M_t p) + K_{eq}](f_1 + J_R p) + R_p^2 K_{eq}(f_2 + M_t p)}.$$

b_0	$R_p K_{eq}$
a_0	$K_{eq}(f_1 + R_p^2 f_2)$
a_1	$f_2 f_1 + K_{eq}(J_R + R_p^2 M_t)$
a_2	$J_R f_2 + M_t f_1$
a_3	$M_t J_R$

Question 13 La fonction de transfert $H(p)$ possède 3 pôles : un pôle réel ($p_1 = -20$) et deux pôles complexes conjugués ($p_{2,3} = -116 \pm 380i$). La partie réelle des deux pôles complexes conjugués est environ 6 fois plus petite que celle du pôle réel. p_1 est donc le pôle dominant, on peut alors approcher la fonction de transfert $H(p)$ par :

$$H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \tau_a p}$$

avec $\tau_a = -\frac{1}{p_1} = 0,05$ s.

Question 14 Si on considère K_{eq} très grand devant les autres coefficients, on peut approcher $H(p)$ par :

$$H_a(p) = \frac{R_p K_{eq}}{K_{eq}(f_1 + R_p^2 f_2) + K_{eq}(J_R + R_p^2 M_t)p} \implies H_a(p) = \frac{\frac{R_p}{f_1 + R_p^2 f_2}}{1 + \frac{J_R + R_p^2 M_t}{f_1 + R_p^2 f_2} p}$$

On retrouve bien un premier ordre dont les coefficients caractéristiques sont indépendants de K_{eq} .

3.2 Étude de la commande

Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer les réglages de la structure de commande de la motorisation des axes du manipulateur.

3.2.3 Précision de la mise en position de l'axe

Question 15 Le codeur incrémental possède 500 fentes (association d'une fente transparente et une fente opaque). La mesure de position se fait sur chaque front montant et front descendant des deux voies A et B : Il y a donc $2 \times 2 \times 500 = 2000$ points de mesure par tour. Le gain K_{pos} est donc :

$$K_{pos} = \frac{2000}{2\pi} \approx 318 \text{ pt/rad}.$$

Question 16 La valeur de K_a est telle que $\varepsilon_\Theta(p) = 0$, lorsque $X(p) = X_C(p)$ (voir figure 14 du sujet). Le gain K_a de l'adaptateur, nécessaire à un bon réglage de l'asservissement de position, est donc :

$$K_a = \frac{K_{pos}}{R_p} = \frac{2000 \times 5 \cdot 10^{-3}}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \approx 1,6 \text{ rad/m}.$$

Question 17 La précision Δx de positionnement en millimètres de la traverse par rapport au bâti est :

$$\Delta x = R_p \times \frac{2\pi}{2000} \approx 0,015 \text{ mm}.$$

Si l'asservissement en position est précis vis-à-vis d'une consigne en échelon, la précision de positionnement de la traverse étant inférieure à 0,05 mm, l'exigence Id 1.1.1 du cahier des charges est vérifiée.

3.2.4 Réglage de la boucle tachymétrique

Question 18 La fonction de transfert en boucle fermée du schéma-blocs de la figure 16 du sujet est :

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_C(p)} = \frac{K_m K_{vit}}{1 + \tau_m p + K_m K_{vit}}.$$

L'erreur statique est donc ($\Omega_C(p) = 1 \cdot u(t)$, avec $u(t)$ la fonction échelon unitaire) :

$$\varepsilon_{\Omega\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_c(t) - \omega_m(t)) = 1 - \frac{K_m K_{vit}}{1 + K_m K_{vit}} = \frac{1}{1 + K_m K_{vit}} \neq 0,$$

ce qui ne vérifie pas l'exigence Id 1.1.2.1 du cahier des charges : l'erreur statique de vitesse pour une entrée en échelon de la boucle tachymétrique doit être nulle.

Remarque : On peut mentionner que la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte est nulle. Ainsi l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire est $\frac{1}{1 + K_{bo}}$, ce qui donne ici : $\varepsilon_{\Omega\infty} = \frac{1}{1 + K_m K_{vit}} \neq 0$.

Question 19 Le correcteur $C_{\Omega}(p)$ est un correcteur proportionnel-intégral qui permet d'obtenir une fonction de transfert en boucle ouverte corrigée de classe 1 lorsque celui-ci est placé dans la chaîne directe de l'asservissement (ce qui est le cas ici). Ainsi l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire devient nulle ce qui valide l'exigence Id 1.1.2.1 vis-à-vis de la précision.

Question 20 D'après le cahier des charges, la réponse indicielle de la boucle de vitesse doit avoir une erreur statique nulle et un temps de réponse $t_{5\%} \leq 30$ ms. Les gains $K_{cor\Omega} = \{4, 2, 1\}$ correspondent.

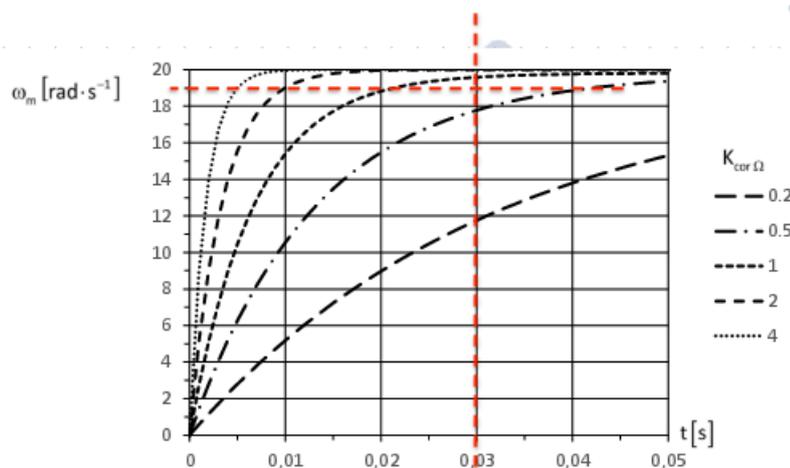


Figure R3 : réponse de la boucle tachymétrique à un échelon de vitesse de 20 rad/s en fonction du gain $K_{cor\Omega}$ du correcteur $C_{\Omega}(p)$

3.2.5 Réglage de la boucle de position

Question 21 À partir de la figure R4, on remarque que :

- la valeur de la phase de la fonction de transfert varie de -90° aux BF à -180° aux HF ;
- la courbe de gain en dB possède une pente à -20 dB/dec aux BF et à -40 dB/dec aux HF.

Ceci est caractéristique d'une fonction de transfert du second ordre de classe 1 :

$$H_{bo-\Theta}(p) = \frac{K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo}p)}$$

On identifie graphiquement les paramètres :

- pour $\phi(\omega = 1/\tau_{bo}) = -135^\circ$, on identifie $1/\tau_{bo} = 200$ rad/s donc $\tau_{bo} = 0,005$ s ;
- aux BF, par exemple $\omega_1 = 10$ rad/s $\ll 200$ rad/s, on a $20 \log \frac{K_{bo}}{\omega_1 \sqrt{1 + \tau_{bo}^2 \omega_1^2}} \approx 20 \log \frac{K}{\omega_1} = 40$ dB \implies

$$K = 10 \times 10^2 \text{ s}^{-1} \text{ donc } K_{bo} = 1000 \text{ s}^{-1}.$$

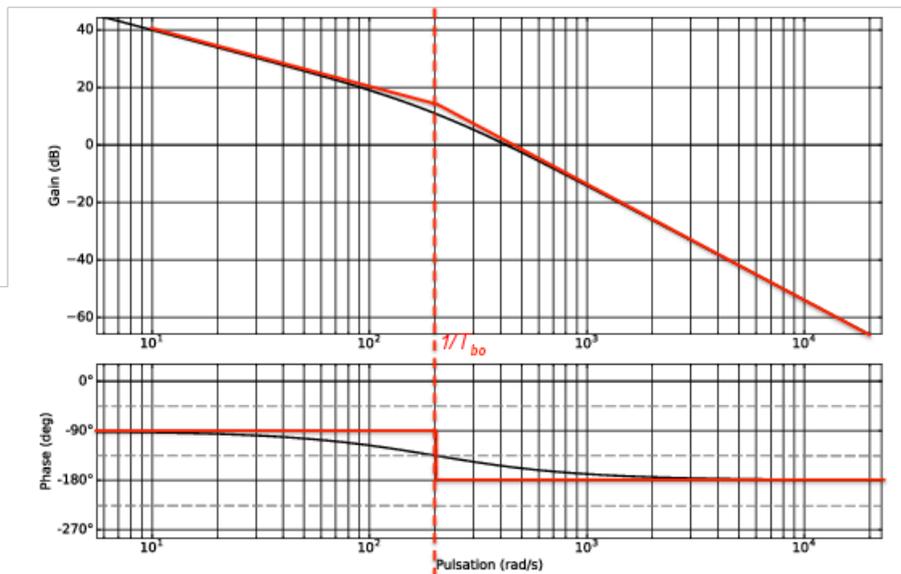


Figure R4 : diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la boude de position $H_{bo_o}(j\omega)$

La fonction de transfert en boucle fermée (non corrigée) correspondante est :

$$H_{bf_o}(p) = \frac{K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo}p) + K_{bo}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{bo}}p + \frac{\tau_{bo}}{K_{bo}}p^2} = \frac{1}{1 + 10^{-3}p + 5 \cdot 10^{-6}p^2}$$

La fonction de transfert $H_{bf_o}(p)$ est de gain unitaire.

Sa pulsation propre $\omega_{bf} = \sqrt{\frac{K_{bo}}{\tau_{bo}}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}}} \approx \frac{1}{2,2 \times 10^{-3}} \approx 450$ rad/s.

Concernant son coefficient d'amortissement : $\frac{2\xi_{bf}}{\omega_{bf}} = \frac{1}{K_{bo}} \Rightarrow \xi_{bf} = \frac{1}{2\sqrt{K_{bo}\tau_{bo}}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx \frac{1}{4,4} \approx 0,2$.

Question 22 La fonction de transfert en boucle fermée corrigée est :

$$H_{bf_cor}(p) = \frac{K_{cor}K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo}p) + K_{cor}K_{bo}}$$

$H_{bf_cor}(p)$ est une fonction de transfert du second ordre standard. On identifie alors ses paramètres caractéristiques :

$$K_{bf} = 1 ; \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{cor}K_{bo}}{\tau_{bo}}} ; \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{cor}K_{bo}\tau_{bo}}}$$

Pour satisfaire l'exigence Id 1.1.1 de non-dépassement du cahier des charges, il faut que :

$$\xi \geq 1.$$

On en déduit donc que :

$$K_{cor}^{max} = \frac{1}{4K_{bo}\tau_{bo}} = 0,05.$$

Question 23 La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée est :

$$H_{bo_cor}(p) = \frac{K_{cor}K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo}p)} = K_{cor} \cdot H_{bo_o}(p),$$

avec $K_{cor} = K_{cor}^{max} = 0,05$. Le diagramme de Bode de $H_{bo_cor}(p)$ est de la même allure que le diagramme de la figure R4 du document-réponses (fonction de transfert non corrigée $H_{bo_o}(p)$). Il faut translater la courbe en gain de $20 \log K_{cor} \approx -26$ dB (vers le bas) et ne pas modifier le diagramme en phase.

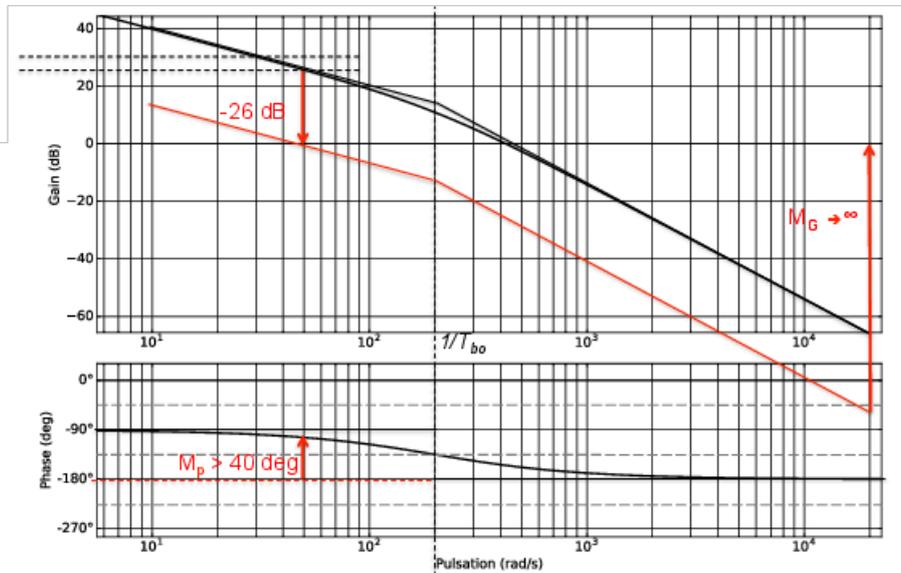


Figure R4 : diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée de la boude de position $H_{bo_o}(j\omega)$

Question 24 Pour justifier la stabilité en boucle fermée du modèle proposé, on utilise le critère du Revers (graphique) sur la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée : la marge de gain est infinie (car la phase -180° n'est jamais atteinte) et la marge de phase est bien supérieure $\geq 40^\circ$ (voir les tracés sur la figure précédente R4 : $M_\varphi \approx 80^\circ$). Donc le système est stable en boucle fermée et vérifie l'exigence de stabilité du cahier des charges.

Question 25 Le gain de la fonction de transfert en boucle fermée est unitaire, donc l'erreur statique sera nulle pour la réponse indicielle en position. De plus, nous avons dimensionné le correcteur de la boucle de position de manière à vérifier sa stabilité et le non-dépassement de la réponse temporelle.

4 Compatibilité de l'axe Z embarqué avec le manipulateur

- Objectif -

L'objectif de cette partie est de s'assurer de la compatibilité de l'ensemble {axe Z ; visseuse} avec le manipulateur, du point de vue des actions mécaniques.

4.2 Détermination de l'action mécanique exercée par l'axe Z sur le chariot 2

Question 26 Le solide 5 est un solide de révolution autour de l'axe (G_5, \vec{z}) . Il possède donc une matrice d'inertie de la forme :

$$I(G_5, 5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{G_5, B_5} .$$

Question 27 Pour calculer le moment dynamique $\vec{\delta}(O_2, 5/0)$, on utilise la formule de changement de point

en passant par le centre de gravité G_5 du solide 5 :

$$\vec{\delta}(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = \left(\vec{\delta}(G_5, 5/0) + \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge m_5 \vec{a}(G_5, 5/0) \right) \cdot \vec{y}.$$

- $\vec{\delta}(G_5, 5/0) \cdot \vec{y} = \frac{d}{dt} \left([I_{G_5, 5} \cdot \vec{\Omega}(5/0)] \cdot \vec{y} \right)_{\mathcal{B}_0}$ car G_5 est le centre de gravité du solide 5 et \vec{y} est fixe dans la base \mathcal{B}_0 . $\vec{\Omega}(5/0) = \omega_z \vec{z}$ donc :

$$\vec{\delta}(G_5, 5/0) \cdot \vec{y} = 0;$$

- $\vec{a}(G_5, 5/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z}$ donc :

$$\left(\overrightarrow{O_2 G_5} \wedge m_5 \vec{a}(G_5, 5/0) \right) \cdot \vec{y} = \left[(x_5 \vec{x} + z_5 \vec{z}) \wedge m_5 \left(\frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z} \right) \right] \cdot \vec{y} = m_5 \left(z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Ainsi :

$$\vec{\delta}(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = m_5 \left(z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Question 28

On cherche l'inconnue de liaison $M_{32} = -M_{23}$ dans la liaison encastrement entre les solides 2 et 3. Le système étudié est une chaîne ouverte de solides 0-1-2-3-4-5. Il faut isoler $\{3,4,5\}$ et appliquer le TMD au point O_2 en projection suivant \vec{y} . Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- la pesanteur sur 3, 4 et 5 (actions connues) ;
- l'action mécanique de liaison entre 2 et 3 (recherchée).

On obtient :

$$\left(\vec{\delta}(O_2, 3/0) + \vec{\delta}(O_2, 4/0) + \underbrace{\vec{\delta}(O_2, 5/0)}_{\text{terme déterminé}} \right) \cdot \vec{y} = M_{23} + \left(\overrightarrow{O_2 G_3} \wedge -m_3 g \vec{z} + \overrightarrow{O_2 G_4} \wedge -m_4 g \vec{z} + \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge -m_5 g \vec{z} \right) \cdot \vec{y}.$$

- Calcul des moments de l'action de pesanteur : $(\overrightarrow{O_2 G_i} \wedge -m_i g \vec{z}) \cdot \vec{y} = m_i g x_i$ pour $i \in \{3, 4, 5\}$;
- Calcul moments dynamiques $\vec{\delta}(O_2, 3/0) + \vec{\delta}(O_2, 4/0)$ (par analogie avec $\vec{\delta}(O_2, 5/0)$) :

$$\diamond \vec{\delta}(O_2, 3/0) \cdot \vec{y} = \left(\underbrace{\vec{\delta}(G_3, 3/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_2 G_3} \wedge m_3 \vec{a}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{y} = m_3 z_3 \frac{dv_x}{dt};$$

$$\diamond \vec{\delta}(O_2, 4/0) \cdot \vec{y} = \left(\underbrace{\vec{\delta}(G_4, 4/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_2 G_4} \wedge m_4 \vec{a}(G_4, 4/0) \right) \cdot \vec{y} = m_4 \left(z_4 \frac{dv_x}{dt} - x_4 \frac{dv_z}{dt} \right);$$

Pour les calculs, on a utilisé : $\vec{a}(G_3, 3/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x}$ et $\vec{a}(G_4, 4/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z}$.

Ainsi :

$$M_{32} = g(x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5) - m_3 z_3 \frac{dv_x}{dt} - m_4 \left(z_4 \frac{dv_x}{dt} - x_4 \frac{dv_z}{dt} \right) - m_5 \left(z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Question 29 Graphiquement sur la figure 19 du sujet, on trouve $|M_{32}|_{max} \approx 2 \text{ N} \cdot \text{m}$ pour le couple d'accélération $(\dot{v}_x, \dot{v}_z) = (-10, 10) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Question 30 Pour calculer Z_{32} , on isole $\{3,4,5\}$ et on applique le TRD en projection suivant \vec{z} : $Z_{32} = (m_3 + m_4 + m_5) \cdot g + (m_4 + m_5) \frac{dv_z}{dt} < (m_3 + m_4 + m_5) \left(g + \frac{dv_z}{dt} \right) = 20 \text{ N}$.

Pour calculer la valeur du facteur de charge, on utilise les valeurs numériques suivantes :

$$|M_{32}| = 2 \text{ N} \cdot \text{m} ; |Z_{32}| = 20 \text{ N} ; N_{32} = L_{32} = 0 ; Z_{32 \text{ max}} = 100 \text{ N} ; M_{32 \text{ max}} = 67 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

On obtient :

$$f_v = \frac{20}{100} + \frac{2}{67} \approx 0,23 < 1.$$

Les valeurs des efforts de liaison dans les guidages sont bien inférieures aux valeurs maximales des efforts que peut subir le chariot sous chargements extérieurs : $|M_{32}| < M_{32 \text{ max}} ; |L_{32}| < L_{32 \text{ max}}$ et $f_v < 1$.

FIN du corrigé