teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2020

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Étude du train d'atterrissage principal de l'avion A350-900

Corrigé UPSTI

Partie 1 : dimensionnement global du train principal

1.1 Mise en place d'un modèle de statique

Question 1.1 En comparant avec une architecture dans laquelle l'atterrisseur auxiliaire serait situé à l'arrière de l'avion (roue de queue), indiquer deux avantages d'une architecture tricycle du train d'atterrissage.

Avantages d'une architecture tri-cycle :

- bien appropriée à la géométrie "en croix" de l'avion ;
- évite un mécanisme complexe de direction (à comparer à celui d'une voiture).

Comparaison avec une architecture à atterrisseur auxiliaire à l'arrière (comme c'est le cas sur les petits avions) :

- permet une incidence plus importante des ailes à l'atterrissage et au décollage.

Question 1.2 Donner deux intérêts d'avoir plusieurs roues sur un même atterrisseur.

Plusieurs roues permet :

- de mieux répartir la charge ;
- d'avoir de la redondance en cas d'éclatement d'un pneu.

Question 1.3 Déterminer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation de la liaison avion-sol dans laquelle chaque contact roue-sol serait considéré ponctuel.

Si les ponctuelles (*i.e.* sphère-plan) sont considérées *parfaites*, en considérant le graphe de structure figure 1, on obtient par une méthode cinématique :

- les 10 ponctuelles conduisent à $I_c = 50$ inconnues cinématiques,
- le mécanisme présente $\gamma = 9$ boucles,
- la mobilité vaut $m = 3$: deux translations et une rotation car l'avion est en liaison globale de type appui-plan avec le sol.

Cela conduit à un degré d'hyperstaticité de $h = 6\gamma - I_c + m = 54 - 50 + 3 = 7$.

Ce résultat était prévisible car il suffit de 3 ponctuelles pour réaliser une liaison équivalente appui-plan (*cf.* tabouret à 3 pieds) donc sur les 10 ponctuelles, il y en a 7 redondantes.

On obtient le même résultat par une méthode statique :

- les 10 ponctuelles conduisent à $I_s = 10$ inconnues statiques,
- le mécanisme présente $S = 2$ solides dont le bâti,
- la mobilité vaut $m = 3$.

Cela conduit à un degré d'hyperstaticité de $h = I_s - 6(S-1) + m = 10 - 6 + 3 = 7$.

Question 1.4 Démontrer que ce modèle simplifié est isostatique.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

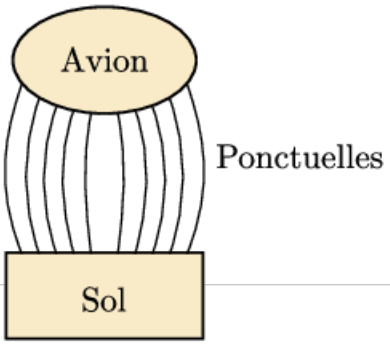

FIGURE 1 – Modèle de la liaison avion-sol

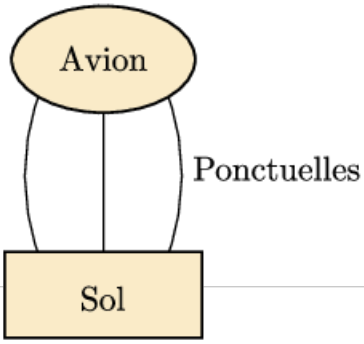

FIGURE 2 – Modèle simplifié

Le modèle simplifié conduit au graphe de structure figure 2 et par une approche cinématique :

- 3 ponctuelles soit $I_c = 15$ inconnues cinématiques,
- le mécanisme présente $\gamma = 2$ boucles,
- la mobilité vaut $m = 3$ sans changement.

Cela conduit à un degré d'hyperstaticité de $h = 6\gamma - I_c + m = 12 - 15 + 3 = 0$. Le modèle simplifié est donc isostatique. Ce résultat était prévisible puisqu'il est analogue au tabouret à 3 pieds.

On retrouve le même résultat par une approche statique :

- 3 ponctuelles soit $I_s = 3$ inconnues statiques,
- le mécanisme présente $S = 2$ solides dont le bâti,
- la mobilité vaut $m = 3$.

Cela conduit à un degré d'hyperstaticité identique de $h = I_s - 6(S-1) + m = 3 - 6 + 3 = 0$.

Question 1.5 Dans le cas d'une aile trapézoïdale à angle droit, donner les deux relations liant la longueur l_{MAC} de la corde MAC, d et les caractéristiques de l'aile précédemment introduites. En déduire la relation $l_{MAC} = \frac{1}{S}\int_0^E c^2(y)dy$ avec S la surface portante de l'aile.

La condition de surface portante identique conduit à $E\dfrac{C_e + C_s}{2} = dl_{MAC}$.

La condition de moment identique suivant $(B, \vec{y})$ conduit à :

$$\overrightarrow{M}_{B,air\to S}\cdot\vec{y} = \overrightarrow{M}_{B,air\to S_{MAC}}\cdot\vec{y} \quad\Leftrightarrow\quad \int_S(\overrightarrow{BM}\wedge p\mathrm{d}S\vec{z})\cdot\vec{y} = \int_{S_{MAC}}(\overrightarrow{BM}\wedge p\mathrm{d}S\vec{z})\cdot\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_S \overrightarrow{BM}\cdot\vec{x}\mathrm{d}S = \int_{S_{MAC}}\overrightarrow{BM}\cdot\vec{x}\mathrm{d}S \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^E\int_0^{c(y)} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^d\int_0^{l_{max}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^E\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{c(y)}\mathrm{d}y = d\frac{l_{MAC}^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_0^E\frac{1}{2}c^2(y)\mathrm{d}y = \frac{Sl_{MAC}}{2} \quad\Leftrightarrow l_{MAC} = \frac{1}{S}\int_0^E\frac{1}{2}c^2(y)\mathrm{d}y$$

Question 1.6 Donner les expressions de $c_1(y)$ et $c_2(y)$ en fonction des données F, C_s, E_{ff} et E. En déduire celle de $c(y)$ en fonction de C_s, E_{ff} et E.

$c_1(y)$ et $c_2(y)$ sont des lois affines du type $c_1(y) = a_1y + b_1$ et $c_2(y) = a_2y + b_2$.

Les conditions aux bords en 0 et E conduisent à :

$$\left|\begin{array}{lcl} c_1(0) = C_e & \Rightarrow & b_1 = C_e \\ c_1(E) = C_e - F & \Rightarrow & a_1 = -F/E \end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left|\begin{array}{lcl} c_2(0) = 0 & \Rightarrow & b_2 = 0 \\ c_2(E) = C_e - F - C_s & \Rightarrow & a_2 = (C_e - F - C_s)/E \end{array}\right.$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

d'où les expressions de $c_1(y)$, $c_2(y)$ et $c(y) = c_1(y) - c_2(y)$:

$$c_1(y) = \frac{-F}{E}y + C_e \qquad c_2(y) = \frac{C_e - F - C_s}{E}y \qquad c(y) = \frac{C_s - C_e}{E}y + C_e$$

Pour exprimer ces relations en fonction de $E_{ff} = C_e/C_s$:

$$c_1(y) = \frac{-F}{E}y + E_{ff}C_s \qquad c_2(y) = \frac{(E_{ff}-1)C_s - F}{E}y \qquad c(y) = (1-E_{ff})\frac{C_s}{E}y + E_{ff}C_s$$

Question 1.7 Déterminer alors l'expression de la longueur l_{MAC} en fonction de C_s et E_{ff}.

En notant $c(y) = ay + b$ pour alléger les notations :

$$l_{max} = \frac{1}{S}\int_0^E c^2(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{S}\int_0^E (ay+b)^2\mathrm{d}y = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{3a}(ay+b)^3\right]_0^E = \frac{1}{3Sa}\left[(aE+b)^3 - b^3\right]$$

En remplaçant les expressions de a et b et en notant que $S = E\frac{C_e+C_s}{2} = (E_{ff}+1)\frac{EC_s}{2}$:

$$l_{max} = \frac{2}{3(1-E_{ff})(1+E_{ff})C_s^2}\left[((1-E_{ff})C_s + E_{ff}C_s)^3 - (E_{ff}C_s)^3\right] = \frac{2C_s(1-E_{ff}^3)}{3(1-E_{ff}^2)}$$

1.2 Positionnement longitudinal des atterrisseurs

Question 1.8 Donner l'expression des efforts N_A et N_P en fonction de la masse M_{TO} de l'avion et des longueurs l_A et l_P.

TMS en P suivant $\vec{y}$: $M_{TO}gl_P - N_A(l_A + l_P) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = \dfrac{M_{TO}gl_P}{l_A + l_P}$

TMS en A suivant $\vec{y}$: $-M_{TO}gl_A + N_P(l_A + l_P) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_P = \dfrac{M_{TO}gl_A}{l_A + l_P}$

Question 1.9 Démontrer qu'il est essentiel d'avoir $l_P \geq 0$ (atterrisseurs principaux situés à l'arrière du centre de gravité G). Cette contrainte est appelée **contrainte 1** par la suite.

Si $l_P < 0$, alors $N_A < 0$ ce qui est impossible pour un contact ponctuel unilatéral donc l'avion bascule.

Question 1.10 Pour chacune de ces deux contraintes, indiquer la position la plus critique ($x_G = X_{AV}$ ou $x_G = X_{AR}$) du centre de gravité G et donner le lien entre $x_A = -\overrightarrow{OA}\cdot\vec{x}$ et $x_P = -\overrightarrow{OP}\cdot\vec{x}$ afin de respecter la contrainte. Ce lien sera exprimé en fonction des données σ_A^{min}, σ_A^{max}, x_{AV} et x_{AR}.

La contrainte 2 conduit à une position critique $x_G = X_{AR}$.

La contrainte 3 conduit à une position critique $x_G = X_{AV}$.

Contrainte 2 : $N_A^{min} = \sigma_A^{min} M_{TO}g = \frac{M_{TO}gl_P}{l_A+l_P}$, sachant que $l_A = x_G - x_A$ et $l_P = x_P - x_G$ ce qui conduit à :

$$(x_P - x_A)\sigma_A^{min} = x_P - x_{AR}$$

Contrainte 3 : on trouve de façon similaire $(x_P - x_A)\sigma_A^{max} = x_P - x_{AV}$

Question 1.11 Compléter le diagramme du document DR1 en indiquant dans chaque case le numéro de la contrainte (de 1 à 7) à laquelle elle se rapporte.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

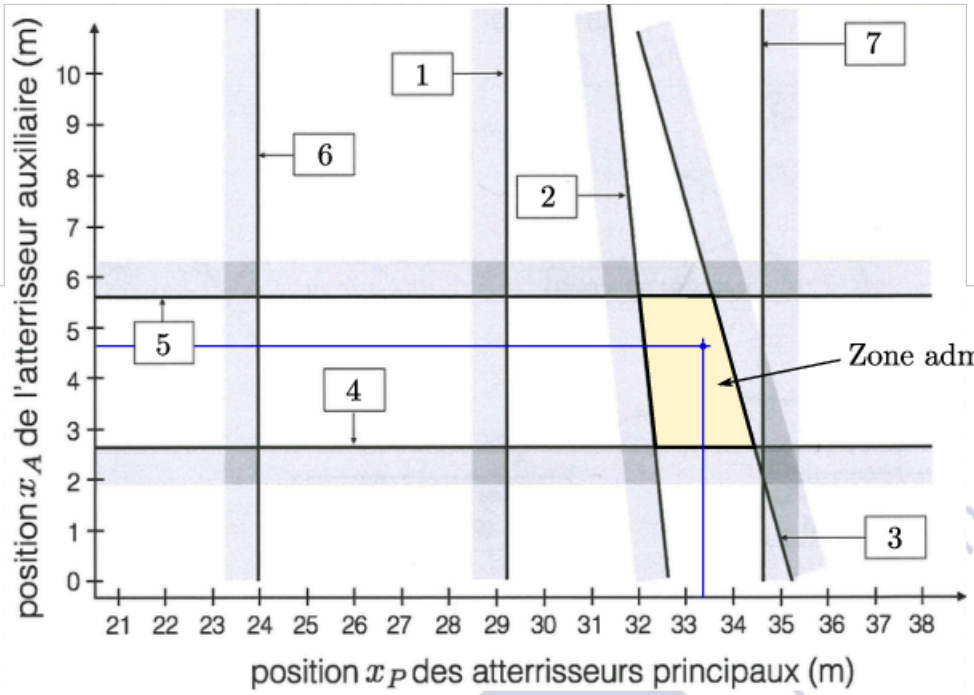

FIGURE 3 – Document réponse DR1

Voir le document réponse DR1 figure 3.

Question 1.12 Représenter sur le diagramme du document DR1 la zone de positionnement longitudinal admissible pour les atterrisseurs. Valider alors la position longitudinale des atterrisseurs choisie dans la conception du modèle A350-900 (voir annexe A).

La zone admissible est celle respectant toutes les contraintes, c'est-à-dire celle dessinée en jaune sur le document réponse DR1 figure 3.

L'annexe A permet d'obtenir $(l_A + l_P) = 28{,}66\,\text{m}$, $x_A = 4{,}63\,\text{m}$ et $x_P = (l_A + l_P) + x_A = 33{,}29\,\text{m}$. Ce point est bien situé dans la zone admissible.

1.3 Dimensionnement d'un atterrisseur principal

Question 1.13 À partir de la modélisation choisie, déterminer en fonction de F_{mot} : (i) l'expression et la valeur de l'accélération γ_a, de l'avion au décollage ; (ii) la nouvelle expression de l'effort N_P, notée N_P^{dyn} ; (iii) l'expression de la surcharge sur le train principal par rapport au cas statique (rapport N_P^{dyn}/N_P^{stat}),

(i) TRD suivant $\vec{x}$: $M_{TO}\gamma_a = 2F_{mot} \quad \Rightarrow \quad \gamma_a = \dfrac{2F_{mot}}{M_{TO}}$

(ii) On utilise le principe de superposition (poids + effets dynamiques + F_{mot}) :

- On a déjà la part du poids seul ;
- Effet dynamique : TMD en $A/\vec{y}$: $hM_{TO}\gamma_a = (l_A + l_P)N_P$;
- F_{mot} : TMD en $A/\vec{y}$: $0 = (l_A + l_P)N_P + 2h_{mot}F_{mot}$.

Superposition : $N_P^{dyn} = \dfrac{M_{TO}gl_A}{l_A + l_P} + \dfrac{hM_{TO}\gamma_a}{l_A + l_P} - \dfrac{2h_{mot}F_{mot}}{l_A + l_P}$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

(iii) Surcharge : $\dfrac{N_P^{dyn}}{N_P^{stat}} = 1 + \dfrac{hM_{TO}\gamma_a - 2h_{mot}F_{mot}}{M_{TO}gl_A}$.

Sachant que $\gamma_a = \dfrac{2F_{mot}}{M_{TO}}$, on en déduit : $\dfrac{N_P^{dyn}}{N_P^{stat}} = 1 + \dfrac{2F_{mot}}{M_{TO}gl_A}(h - h_{mot})$

Question 1.14 En déduire la valeur de la surcharge sur le train principal et la discuter en comparaison avec celle du coefficient de sécurité $C = 1{,}5$ appliqué en pratique (de façon forfaitaire) à toutes les charges statiques calculées. Indiquer deux autres phases de vie dynamiques de l'avion qui sont prises en compte par le coefficient C.

Application numérique : $\dfrac{N_P^{dyn}}{N_P^{stat}} = 1{,}023 < 1{,}5$.

Le coefficient de sécurité couvre les effets dynamiques. La surcharge dynamique étant de 2,5%, elle est même négligeable au regard des 50% de sécurité.

Pour les autres phases prises en compte par le coefficient C, on peut citer la *phase d'impact*, la *phase de freinage* (les spoilers plaquant l'avion au sol dans cette phase) ou encore la *phase de roulage* si la piste n'est pas régulière.

Question 1.15 Après avoir calculé la charge dimensionnante pour un atterrisseur principal (avec application du coefficient de sécurité $C = 1{,}5$), choisir le type de pneumatique le plus adapté parmi la liste proposée dans l'annexe C. Ce choix sera clairement argumenté.

La charge statique vaut $N_P^{stat} = \frac{M_{TO}gl_A}{l_A+l_P} = 2300\,\text{kN}$ et constitue la charge dimensionnante en statique (sans coefficient de sécurité).

Pour chaque pneumatique, $F^{stat} = \frac{N_P^{stat}}{8} = 287\,\text{kN}$ ce qui représente le poids de 28 700 kg.

En dynamique (avec coefficient de sécurité), la charge dimensionnante est alors $N_P^{stat} \times C = 3450\,\text{kN}$.

Pour chaque pneumatique, $F^{dyn} = \frac{N_P^{stat} \times C}{8} = 431\,\text{kN}$ ce qui représente le poids de 43 100 kg.

La référence 52x20.5-23 conviendrait pour un dimensionnement statique avec $C = 1$ et un dimensionnement dynamique avec $C = 1{,}5$.

Partie 2 : étude cinématique du déploiement d'un atterrisseur principal

Question 2.1 Quel est l'intérêt d'un dispositif de rentrée/sortie du train d'atterrissage ?

Le dispositif réduit fortement la prise au vent relatif, et donc réduit la consommation et le bruit.

Question 2.2 Compte tenu des liaisons entre les différentes pièces des contrefiches et des biellettes de verrouillage, définir le plan du mouvement du système de barres (ce plan pourra varier dans le temps). En déduire que les rotules à doigt en A' et B' ont leur deuxième axe de rotation commun, de direction notée $\vec{b}$ sur la figure 9.

Toutes les pivots ont une rotation suivant $\vec{n}$. Les rotules à doigt ont aussi une rotation suivant $\vec{n}$. Aussi, le mouvement est dans le plan de normale $\vec{n}$.

Si les liaisons rotules à doigt n'avaient pas un axe de rotation commun permis suivant $(A'B')$, alors le plan de normale $\vec{n}$ ne pourrait pas tourner par rapport à la jambe donc son mouvement par rapport au bâti serait la rotation suivant $(O, \vec{e}_x)$ de la jambe. Or, vues les contraintes imposées par les points D et D', cette rotation serait impossible donc le mécanisme serait bloqué.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Donc pour permettre un mouvement de déploiement, il faut que les rotules à doigt en A' et B' aient l'axe $\vec{b}$, parallèle à $(A'B')$, de rotation commun.

Question 2.3 Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{BB'}$ dans la base $(\vec{d}_x, \vec{d}_y, \vec{e}_x)$ sachant que la longueur BB' est notée b' et l'angle entre $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{d}_y$ est noté γ.

Il manque de l'information sur l'axe de rotation de l'angle γ (ou le plan contenant B'). Hypothèse : γ rotation autour de $\vec{d}_x$.

Le diagramme de changement de base est alors celui de la figure 4.

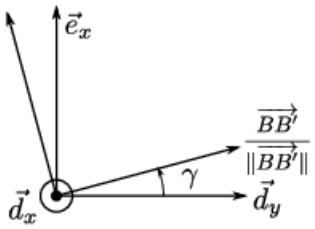

FIGURE 4 – Diagramme de changement de base de l'angle γ

Et le vecteur : $\overrightarrow{BB'} = b'(\cos\gamma\vec{d}_y + \sin\gamma\vec{e}_x)$.

Question 2.4 Montrer, sans détailler tous les calculs, que la longueur $B'D'$ fixe l'angle θ d'ouverture du train.

Le plan de normale $\vec{n}$ contient $(B'D')$ et contient D. La pivot en D est d'axe normal à $\vec{n}$ donc n'apporte aucune mobilité dans le plan de normale $\vec{n}$. Aussi, si la distance $B'D'$ est fixée, alors la distance DB' est fixée.

Or, D est fixe par rapport au bâti, O est fixe par rapport au bâti et B' est fixe par rapport à la jambe, elle même en rotation d'angle θ par rapport au bâti.

La fermeture géométrique $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'O} = \vec{0}$ lie θ et $||\overrightarrow{DB'}||$.

Autre démonstration :

Les deux liaisons en D et D' peuvent être assimilées à une rotule à doigt en D' (comme cela a été fait en A' et B').

Sous cette hypothèse, $OD'B'$ forme un triangle où D' et O sont fixes par rapport au bâti. La longueur $D'B'$ fixe donc le point B' et donc l'angle θ de la jambe par rapport au bâti.

Question 2.5 Montrer, sans détailler tous les calculs, que si $||\overrightarrow{A'C}|| = f + e$ alors l'angle θ est fixé.

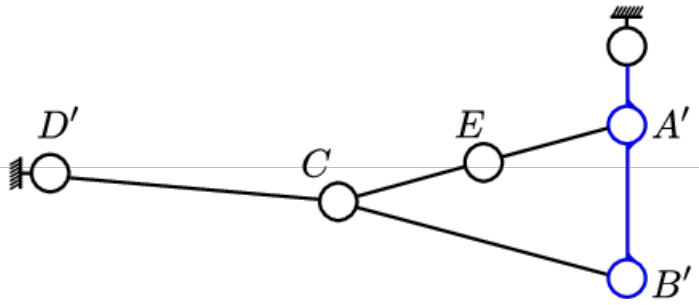

FIGURE 5 – Schéma cinématique explicatif – question 2.5

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Dans la situation où $||\overrightarrow{A'C}|| = f + e$, les trois points C, E et A' sont alignés (la genouillère est tendue, ce qui permet de verrouiller le déploiement du train).

La figure 5 montre une position quelconque mais assurant l'alignement des points C, E et A' (en réalité, dans la position verrouillée, les points D', C et B' sont aussi alignés mais ce n'est pas une hypothèse de l'énoncé à ce stade).

Dans le plan de normale $\vec{n}$, $A'CB'$ est un triangle où $A'B' = \text{Cste}$ et $CB' = \text{Cste}$. Si $A'C$ est fixe, l'orientation de $B'C$ est fixée donc la distance $B'D'$ est fixée, et donc θ est fixé.

Question 2.6 En pratique, proposer une solution technique sous forme schématique permettant de limiter la variation d'angle entre les biellettes $A'E$ et EC.

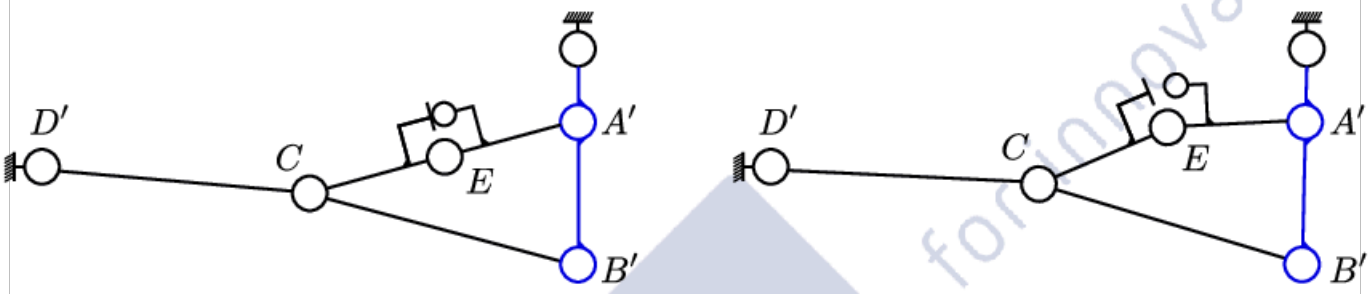

FIGURE 6 – Solution technique – question 2.6

La variation d'angle entre les biellettes $A'E$ et EC peut être limitée par une **butée** (bloquant *a priori* la course à l'état tendu), modélisée sur le schéma cinématique de la figure 6 par une sphère-plan (ou ponctuelle) unilatérale.

Question 2.7 En supposant les points B et B' (respectivement A et A', et D et D') confondus, définir grâce à différents triangles la relation entre l'angle d'ouverture du train et la longueur BD. On notera B_p, la projection de B dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On pourra calculer les longueurs BB_p et OB_p pour commencer.

L'énoncé suppose B et B' confondus mais ne précise pas en quel point... De même pour A et A', et D et D'. On suppose qu'ils sont respectivement confondus en B, A et D pour simplifier les calculs.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad ||\overrightarrow{DB}|| = ||b\vec{d}_x - d\vec{e}_1||$. Sachant que $\vec{d}_x = \cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z$ et $\vec{e}_1 = \cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y$, on en déduit la relation demandée :

$$BD^2 = (d\cos\alpha)^2 + (b\cos\theta - d\sin\alpha)^2 + (b\sin\theta)^2 = d^2 + b^2 - 2bd\cos\theta\sin\alpha$$

Remarque : BB_p et OB_p sont des projections de $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. De même pour D_p si bien que le calcul de la norme de $\overrightarrow{DB}$ en utilisant "différents triangles" passant par B_p et D_p revient à la fermeture géométrique dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Question 2.8 Donner le degré de mobilité du système lorsque les biellettes de verrouillage sont libres et lorsqu'elles sont bloquées. Dans les deux cas, donner les torseurs cinématiques de la liaison équivalente entre la jambe et le châssis de l'avion.

Si les biellettes sont libres, le mouvement de déploiement est libre et la mobilité vaut $m = 1$. Dans ce cas, le mouvement de la jambe s'écrit :

$$\left\{\mathcal{V}_{\text{jambe/chassis}}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\vec{e}_x \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Si les biellettes sont bloquées (tendues), le mouvement de déploiement est bloqué et la mobilité vaut $m = 0$. Dans ce cas, le mouvement de la jambe s'écrit :

$$\left\{\mathcal{V}_{\text{jambe/chassis}}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \vec{0}\end{array}\right\}$$

Question 2.9 On suppose que toute la masse du train est concentrée au niveau du bogie (masse M_t donnée), et que le train n'est soumis qu'à son propre poids. Donner une expression du temps d'ouverture (celui-ci doit être en pratique inférieur à 15 s) et détailler les éléments principaux menant à celle-ci. La relation entre la longueur des ressorts de raideur k et l'angle d'ouverture est supposée connue et notée $l = l(\theta)$.

En supposant que le mouvement de déploiement du train n'est entrainé que par son propre poids et que les dispositifs hydrauliques ne fournissent ni ne dissipent aucune énergie, on peut caractériser le mouvement à l'aide du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P_{int} + P_{ext/R_g}$$

On admet que l'avion (à vitesse quasi constante durant la phase d'approche) peut être assimilé à un référentiel galiléen.

En supposant que la masse est concentrée au niveau du bogie et en notant L la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse, l'énergie cinétique s'écrit : $E_c = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$.

Les puissances extérieures s'écrivent : $P_{ext/R_g} = P_{fuselage/R_g} + P_{poids/R_g}$ où les liaisons avec le fuselage sont supposées parfaites et fixes donc $P_{fuselage/R_g} = 0$. La puissance du poids peut s'écrire sous la forme de la dérivée d'une énergie potentielle : $P_{poids/R_g} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$ où $E_p = -LM_tg\sin\theta$.

Les puissances intérieures s'écrivent : $P_{int} = P_{liaisons} + P_{ressorts} + P_{verins}$ où les liaisons sont supposées parfaites ($P_{liaisons} = 0$) et les actions des vérins hydrauliques supposés nulles ($P_{verins} = 0$). La puissance des ressorts peut s'écrire sous la forme de la dérivée d'une énergie de déformation : $P_{ressorts} = \frac{\mathrm{d}E_d}{\mathrm{d}t}$ où $E_d = \frac{1}{2}kl(\theta)^2$.

L'équation du théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + LM_tg\sin\theta - \frac{1}{2}kl(\theta)^2\right) = 0$$

Ne connaissant pas la loi $l(\theta)$, il n'est pas possible d'aller plus loin et d'intégrer cette équation différentielle.

En supposant que l'angle $\theta = 0$ correspond à la situation initiale immobile, où le train est à l'horizontale, l'intégration de l'équation conduit à l'expression de $\theta(t)$.

En supposant que la situation déployée finale correspond à $\theta = 90°$, le *temps d'ouverture* t_o est le temps satisfaisant à l'équation :

$$\theta(t_o) = 90°$$

Partie 3 : dimensionnement des éléments d'un atterrisseur principal

3.1 Étude du verrouillage

Question 3.1 La distance c est égale à c_0 lorsque le ressort de raideur k est déchargé. Écrire l'équation exprimant la longueur c en fonction de la composante verticale (notée u) du déplacement du point E par

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

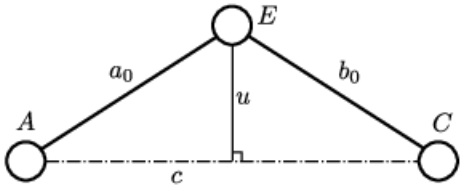

FIGURE 7 – question 3.1

rapport à sa position initiale. Exprimer l'énergie potentielle associée au ressort de raideur k en fonction de c puis u.

Sans précision de l'énoncé, on suppose que u mesure le déplacement à partir de la situation où A, E et C sont alignés (u est alors l'ordonnée de E).

Sachant que u est la hauteur d'un triangle (figure 7), on trouve en utilisant deux fois Pythagore :

$$c = \sqrt{a_0^2 - u^2} + \sqrt{b_0^2 - u^2}$$

L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_p = \frac{1}{2}k(c - c_0)^2 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{a_0^2 - u^2} + \sqrt{b_0^2 - u^2} - c_0\right]^2$$

Question 3.2 À partir des symétries du système, proposer une forme de l'évolution de cette énergie potentielle en fonction de u. Les minima locaux de celle-ci correspondent aux positions d'équilibre métastables (une petite perturbation de la solution autour d'une position d'équilibre entraîne un retour à la position d'équilibre initiale).

Si $c_0 < c$, l'évolution de l'énergie potentielle prend l'allure de la figure de gauche tandis que si $c_0 > c$, l'évolution de l'énergie potentielle prend l'allure de la figure de droite.

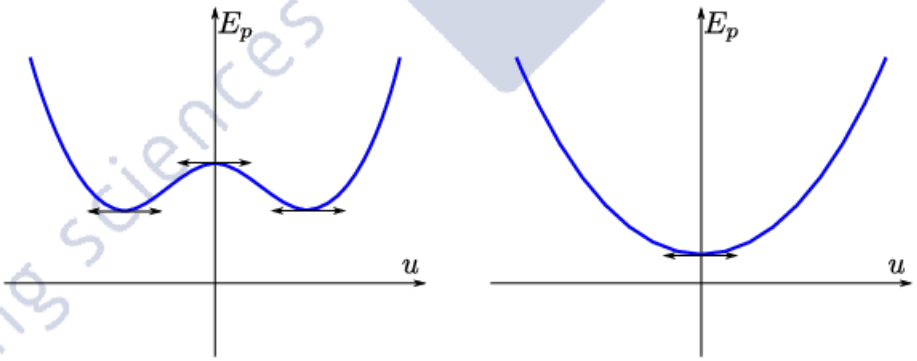

FIGURE 8 – Évolution de l'énergie potentielle ($c_0 < c$ à gauche et $c_0 > c$ à droite) – question 3.2

Question 3.3 La raideur k_{add} est désormais prise en compte. Quel est son rôle vis-à-vis du verrouillage ?

k_{add} permet de maintenir le système verrouillé et/ou d'avoir un minimum d'énergie (stabilité) en position verrouillée dans le cas où $c_0 < c$.

Question 3.4 Peut-on parler d'arc-boutement dans le cas présent ?

NON car il n'y a pas de phénomène de frottement. On peut par contre parler de mécanisme à genouillère.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

3.2 Analyse des efforts transmis

Question 3.5 Montrer que les roues avant et arrière d'un même bogie subissent les mêmes efforts normaux dans la configuration avion au sol. Considérer les deux cas : (i) frein libre ; (ii) frein serré.

(i) frein libre Le TMD appliqué à chacune des roues suivant l'axe de la roue conduit à un effort tangentiel nul suivant $\vec{e}_x$ au point de contact I_i (on suppose l'effort tangentiel aussi nul suivant $\vec{e}_y$, *cf.* figure 12). Donc l'effort en chaque point de contact I_i est normal au sol.

Le TMD appliqué à chaque disque suivant l'axe de la roue conduit à $\vec{M}_{C_i,\text{barre couple}\to\text{disque}} \cdot \vec{e}_y + 0 + 0 = 0$ donc il n'y a pas d'effort dans les barres de reprise de couple.

Le TMD appliqué au {bogie + roues + disques + barres} en F suivant $\vec{e}_y$ conduit à l'équation :

$$0 + N_1(\overrightarrow{FI_1} \cdot \vec{e}_x) + N_2(\overrightarrow{FI_2} \cdot \vec{e}_x) + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = N_2$$

(ii) frein serré Les disques de frein sont solidaires des roues. On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique par rapport à la jambe :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P_{int} + P_{ext}$$

L'inertie des pièces du train est négligée donc $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0$. Les liaisons sont parfaites et le frein est bloqué (pas de glissement) donc $P_{int} = 0$. Le TEC se réduit donc à $P_{ext} = 0$.

Sachant que les pivots avec la jambe sont parfaites, la puissance extérieure s'écrit :

$$P_{ext} = (N_1\vec{e}_z + T_1\vec{e}_x) \cdot \vec{V}_{I_1,\text{roue/jambe}} + (N_2\vec{e}_z + T_2\vec{e}_x) \cdot \vec{V}_{I_2,\text{roue/jambe}} + 0 + 0 + 0 = 0$$

Sachant que la géométrie en parallélogramme conduit à une translation circulaire, on en déduit que $\vec{V}_{I_1,\text{roue/jambe}} = \vec{V}_{C_1,\text{bogie/jambe}} \,//\, \vec{e}_z$ dans la configuration de la figure 12 (sol horizontal).

Par symétrie, $\vec{V}_{I_2,\text{roue/jambe}} = -\vec{V}_{I_1,\text{roue/jambe}}$ et le TEC conduit à $N_1 - N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2$

Question 3.6 En proposant un modèle de frottement de Coulomb, écrire le torseur des actions mécaniques transmissibles par le sol sur la roue au point de contact roue/sol (en I_1 ou en I_2).

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{sol}\to\text{roue 1}}\right\} = \begin{Bmatrix} T_{1x} & 0 \\ T_{1y} & 0 \\ N_1 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}^{I_1} \quad \text{avec } \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} \leq fN_1 \text{ (égalité s'il y a glissement).}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{sol}\to\text{roue 2}}\right\} = \begin{Bmatrix} T_{2x} & 0 \\ T_{2y} & 0 \\ N_2 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}^{I_2} \quad \text{avec } \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} \leq fN_2 \text{ (égalité s'il y a glissement).}$$

Question 3.7 Faire un graphe de liaisons du système {jambe, contrefiches, biellettes de verrouillage} en position verrouillée. La jambe est alors supposée verticale. On y fera apparaitre les actions mécaniques issues du bogie qui seront modélisées par le torseur en F (F étant à l'intersection de l'axe de la jambe et de l'axe de la liaison pivot entre le bogie et la jambe, *cf.* annexe D) :

$$\begin{Bmatrix} F_{Tx}\vec{e}_x + F_{Ty}\vec{e}_y + F_N\vec{e}_z \\ N\vec{e}_x \end{Bmatrix}_F$$

Ces actions sont supposées connues et imposées par la dynamique de l'avion, son poids et les lois de frottement.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

L'énoncé pousse à considérer {caisson + tige + compas}={jambe}. Le graphe des liaisons est alors celui de la figure 9.

Remarque : Sauf erreur, le solide appelé "croisillon" n'a pas de dénomination dans le sujet. Par ailleurs, sachant qu'en C il y a deux liaisons superposées, il est possible de choisir une autre configuration pour le graphe de ces deux liaisons (en plaçant une des deux pivots entre la biellette 1 et la contreficheche basse).

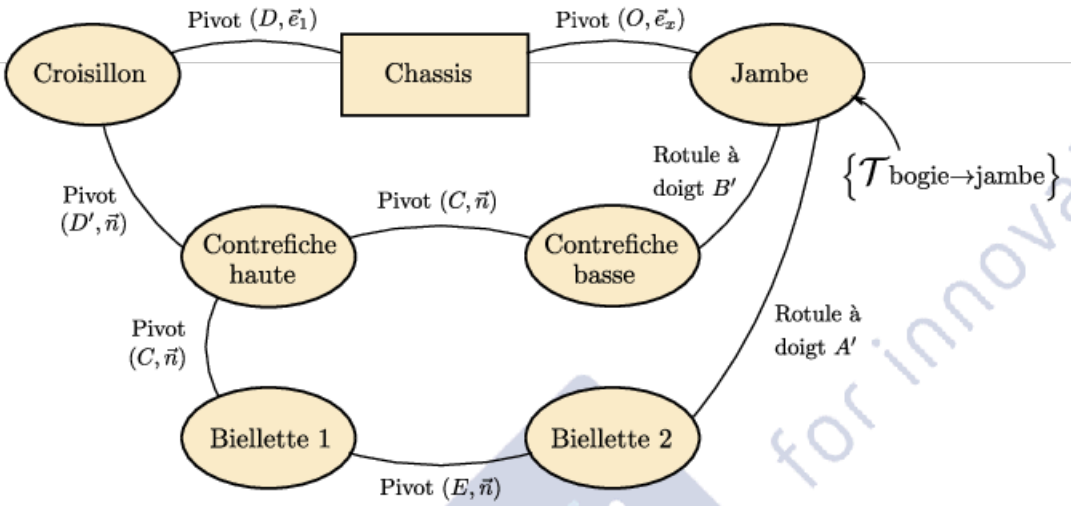

FIGURE 9 – Graphe des liaisons – question 3.7

Question 3.8 Par des considérations simples, montrer qu'il n'est pas possible de déterminer toutes les actions mécaniques.

Calcul du degré d'hyperstaticité h par une approche cinématique :

$I_c = \underbrace{6 \times 1}_{\text{pivots}} + \underbrace{2 \times 2}_{\text{rotules à doigt}} = 10$ inconnues.

$\gamma = 2$ boucles.

$m = 1$ mobilité en situation tendue (le mouvement de déverrouillage).

On en déduit $h = 6\gamma - I_c + m = 12 - 10 + 1 = 3$.

Le modèle est hyperstatique donc il n'est pas possible de déterminer toutes les inconnues statiques.

Par une approche statique :

$I_s = \underbrace{6 \times 5}_{\text{pivots}} + \underbrace{2 \times 4}_{\text{rotules à doigt}} = 38$ inconnues.

$S = 7$ solides dont le bâti.

$m = 1$ mobilité en situation tendue (le mouvement de déverrouillage).

On en déduit $h = Is - 6(S-1) + m = 38 - 36 + 1 = 3$ ce qui confirme le résultat précédent.

Question 3.9 Justifier l'alignement des deux pièces composant chaque contreficheche (avant, arrière) en supposant un modèle en deux dimensions dans le plan du mouvement.

Étude dans le cas plan, en négligeant les efforts des biellettes de verrouillage (figure 10) :

- {1+2} est soumis à deux forces donc $\vec{F}'_B \,//\, (D'B')$;
- {2} est soumis à deux forces donc $\vec{F}'_B \,//\, (CB')$.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

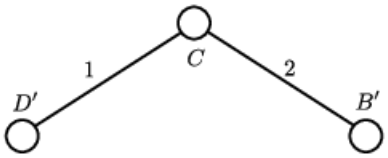

FIGURE 10 – Isolements des contrefiches – question 3.9

On en déduit que $\vec{F'}_B = \vec{0}$ si (CB') n'est pas parallèle à $(D'B')$: les deux pièces doivent être alignées pour pouvoir transmettre un effort.

Question 3.10 Écrire rigoureusement la procédure permettant de déterminer tout ou partie des efforts dans chacune des pièces (jambe et contrefiches). On supposera que le système de contrefiches ne peut transmettre qu'un effort suivant son axe.

Hypothèses : chaque contrefiche ne transmet qu'un effort suivant son axe donc il n'y a qu'une inconnue d'effort par contrefiche (2 au total).

La liaison pivot entre le chassis et la jambe conduit à 5 inconnues statiques.

Le PFS appliqué à la jambe conduit à 6 équations pour 7 inconnues donc ce système ne pourra être résolu que partiellement.

Question 3.11 Sous quelle hypothèse peut-on déterminer toutes les actions mécaniques ? Est-il raisonnable de supposer que les efforts dans les deux contrefiches sont égaux ?

Si les jeux dans les liaisons sont supérieurs aux tolérances de position des pièces, alors l'hyperstatisme ne conduit pas à des efforts internes présents même en l'absence de chargement extérieur. En supposant par ailleurs les efforts dans les contrefiches égaux, cela permet de déterminer toutes les actions mécaniques.

S'il n'y a pas de freinage, par symétrie de la géométrie (hypothèse de l'énoncé) et de la répartition de masse, et en admettant que l'effort du sol sur la roue est vertical et dans le plan de symétrie (probable), il est raisonnable de considérer les deux efforts dans les contrefiches égaux (voire nuls si la jambe est verticale).

S'il y a freinage par contre, l'effort du sol sur la roue n'est plus dans le plan de symétrie donc les efforts dans les contrefiches seront évidement différents. Si le freinage est prépondérant et que la raideur des contrefiches est identique, ils seront probablement égaux en norme et opposés en signe car le calcul à une unique contrefiche conduit à ce résultat pour chacune d'elle).

Question 3.12 Dans les conditions de chargement précisées, la jambe est-elle sollicitée en torsion ?

NON, car $\vec{F}$ est sur l'axe de la jambe et le moment suivant $\vec{e}_z$ est nul.

Partie 4 : étude de certains effets dynamiques sur un atterrisseur principal à l'atterrissage

Question 4.1 Montrer que l'atterrisseur ne peut pas fonctionner sans la fonction ressort assurée par la compression de l'azote.

Si la vitesse verticale devient nulle, l'amortisseur seul a une force nulle donc l'avion va descendre jusqu'à ce que l'atterrisseur soit en butée.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 4.2 Exprimer E_{abs} en fonction de la déflexion totale du pneu Δ_{pneu}, et des données η_{abs}, η_{pneu}, k_{pneu}, M_{LD} et v_v.

Les quantités utilisées dans cette questions ne sont pas définies et n'ont rien d'évident. On supposera pour la suite que l'énergie théorique "absorbée" par un pneu correspond à l'énergie potentielle du ressort à la course maximale (dite déflexion totale) et s'exprime sous la forme $E_{pneu} = \frac{1}{2}k_{pneu}\Delta_{pneu}^2$.

L'énergie cinétique verticale de l'avion s'écrit $E_{cv} = \frac{1}{2}M_{LD}v_v^2$, à absorber par les deux trains d'atterrissages arrières. Sachant qu'il y a 2 absorbeurs et 8 roues, en tenant compte des efficacités :

$$E_c = 2\eta_{abs}E_{abs} + 8\eta_{pneu}E_{pneu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}M_{LD}v_v^2 = 2\eta_{abs}E_{abs} + 8\eta_{pneu}\frac{1}{2}k_{pneu}\Delta_{pneu}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E_{abs} = \frac{1}{4\eta_{abs}}(M_{LD}v_v^2 - 8\eta_{pneu}k_{pneu}\Delta_{pneu}^2)$$

Caractérisation par essai de chute libre

Question 4.3 Déterminer (en le démontrant) la liaison équivalente pour le guidage du chariot, et indiquer son degré d'hyperstatisme. Argumenter le choix d'une telle conception.

Liaison équivalente :

Les deux pivot-glissants de gauche autorisent une rotation autour de leur axe (incompatible avec les pivots-glissants de droite) et une translation verticale (compatible avec les pivots glissant de droite). Ainsi, seule la translation est compatible avec l'ensemble des liaisons donc la liaison équivalente est une glissière de direction verticale.

Autre démonstration (par des calculs) On pose un point A appartenant à l'axe des pivots de gauche et un point B appartenant à l'axe des pivots de droite tels que $\overrightarrow{AB} = L\vec{e}_x$. La verticale ascendante est suivant $\vec{e}_z$.

$$\left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_1}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}\vec{e}_z \\ V\vec{e}_z\end{array}\right\} \text{ et } \left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_3}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_4}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\dot{\theta}'\vec{e}_z \\ V'\vec{e}_z\end{array}\right\}$$

La fermeture cinématique conduit à $\left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_1}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_3}\right\}$. En réduisant en A :

$$\vec{V}_A^{\mathcal{L}_3} = \vec{V}_B^{\mathcal{L}_3} + \vec{\Omega}^{\mathcal{L}_3} \wedge \overrightarrow{BA} = V'\vec{e}_z + \dot{\theta}'\vec{e}_z \wedge (-L\vec{e}_x) = V'\vec{e}_z - L\dot{\theta}'\vec{e}_y$$

On en déduit le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\theta} = \dot{\theta}' \\ V = V' \\ 0 = -L\dot{\theta}'\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\mathcal{V}^{\mathcal{L}_i}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{0} \\ V\vec{e}_z\end{array}\right\}$$

Le torseur de la liaison équivalent est donc celui d'une glissière de direction verticale.

Calcul du degré d'hyperstaticité h :

$I_c = 4 \times 2 = 8$ inconnues.

$\gamma = 3$ boucles.

$m = 1$ mobilités.

On en déduit $h = 6\gamma - I_c + m = 18 - 8 + 1 = 11$.

Le modèle est fortement hyperstatique.

Choix d'une telle conception :

- le choix d'une solution surcontrainte permet d'augmenter la rigidité du train d'atterrissage ;

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

- deux pivots-glissant par contact cylindre-cylindre sont plus faciles à réaliser qu'une glissière ;
- l'association de deux pivots-glissants coaxiales permet d'augmenter la longueur du guidage et ainsi d'éviter l'arcboutement.

Question 4.4 Déterminer l'expression de la force d'impact F sur le train principal en fonction de la masse M_{LD} de l'avion à l'atterrissage, du moment d'inertie I_y de l'avion autour de l'axe $(G, \vec{y})$ et des données dimensionnelles. En déduire la masse réduite m_r du chariot à considérer pour simuler l'atterrissage réel. On pourra faire l'approximation des petits angles.

Lors de l'impact, la vitesse verticale au niveau de la roue passe brutalement de v_v à 0, ce qui conduit à une discontinuité sur la vitesse verticale du point G et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. La discontinuité de vitesse se traduit par une accélération infinie et donc une force F infinie. Cette force ne peut donc pas être calculée.

Pour déterminer tout de même la masse réduite, il faut utiliser la notion de *percussion* : $F\Delta t$. La force F est infinie, durant un temps d'impact Δt infiniment court, mais la percussion $F\Delta t$ est quant à elle finie.

Les conditions cinématiques avant impact sont une vitesse verticale $-v_v = \text{cste}$ et une vitesse angulaire $\dot{\theta} = 0 = \text{cste}$.

Les conditions cinématiques juste après impact sont une vitesse V (à déterminer) et une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (à déterminer).

La condition de contact de la roue sur la piste après impact impose une vitesse verticale nulle au niveau de la roue, ce qui se traduit facilement sous hypothèse de petits angles par la condition $V + l_P\dot{\theta} = 0$.

Par ailleurs, le TRD appliqué à l'avion s'écrit sous forme de percussion (en multipliant par un temps Δt d'impact) en fonction du saut de vitesse $(V - (-v_v))$ et de la percussion : $M_{LD}(V + v_v) = F\Delta t$.

Le TMD en G appliqué à l'avion s'écrit de même sous forme de percussion, en fonction du saut de vitesse angulaire $(\dot{\theta} - 0)$ et de la percussion : $I_y(\dot{\theta} - 0) = l_p F\Delta t$.

En combinant la condition de contact et le TMD, on obtient la vitesse du centre de gravité de l'avion après impact :

$$I_y \frac{V}{L_P} = l_P F\Delta t \quad \Rightarrow \quad V = \frac{-l_P^2}{I_y} F\Delta t$$

En remplaçant V dans l'expression du TRD, on en déduit l'expression de la percussion :

$$M_{LD}\left(\frac{-l_P^2}{I_y}F\Delta t + v_v\right) = F\Delta t \quad \Rightarrow \quad M_{LD}v_v = F\Delta t\left(1 + \frac{M_{LD}l_P^2}{I_y}\right) \quad \Rightarrow \quad F\Delta t = \frac{M_{LD}}{1 + \frac{M_{LD}l_P^2}{I_y}}v_v$$

Dans le cadre du simulateur, la vitesse passe de v_v à 0 donc le saut de vitesse vaut v_v. Sachant qu'il n'y a qu'un seul train arrière, il faut diviser par deux la percussion obtenue sur l'avion donc le TRD appliqué à la masse m_r s'écrit :$m_r v_v = \frac{1}{2}F\Delta t$, d'où la masse réduite :

$$m_r = \frac{M_{LD}}{2\left(1 + \frac{M_{LD}l_P^2}{I_y}\right)}$$

Question 4.5 Déterminer alors, en fonction de V_v, M_{LD} et m_r, l'expression de la hauteur de lâcher h_{test} à considérer pour reproduire l'énergie cinétique à l'impact.

L'énergie potentielle initiale du banc doit être égale à l'énergie cinétique due à la vitesse verticale de l'avion répartie sur les deux trains d'atterrissage :

$$E_{pbanc} = E_{cbanc} = \frac{1}{2}E_{cavion} \quad \Leftrightarrow \quad m_r g h = \frac{1}{4}M_{LD}v_v^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_{lest} = \frac{M_{LD}v_v^2}{4m_r g}$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 4.6 Représenter graphiquement sur la courbe du document DR2 l'énergie totale E_{tot} absorbée par le système pendant toute sa phase de compression, ainsi que les parts E_{stock} et E_{diss} de cette énergie qui sont respectivement stockée dans le ressort à gaz et dissipée dans l'amortisseur.

Ces énergies seront indiquées en noir (pour E_{tot}), rouge (pour E_{stock}) et bleu (pour E_{diss}) sur le document DR2.

La figure du document réponse DR2 est donnée figure 11. L'énergie totale est la somme des énergies dissipée et stockée ; elle est représentée sous forme de hachures noires.

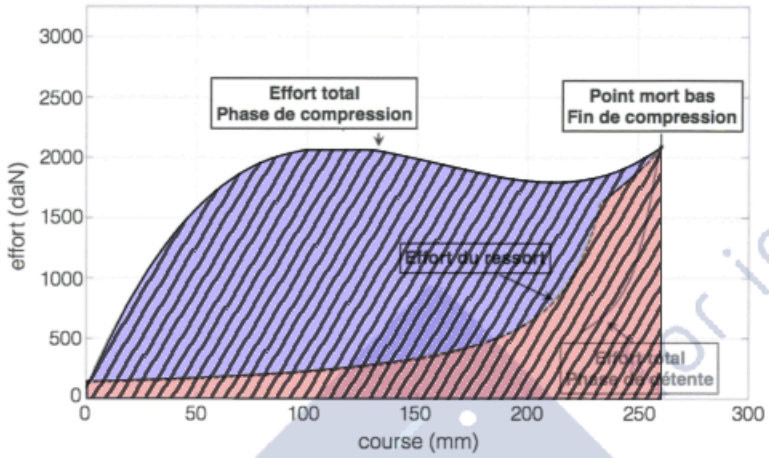

FIGURE 11 – Énergies stockée (rouge), dissipée (bleu) et totale (hachures noires) – question 4.6

Question 4.7 Justifier que pendant la phase de compression, la première zone de montée en effort est directement influencée par l'effort d'amortissement, alors que la deuxième zone de montée est influencée par le ressort.

Lors de la première phase, la vitesse est très importante tandis que le ressort est détendu. L'action prépondérante est donc celle de l'amortisseur : $c_a\dot{x} \gg k_a x$.

Lors de la deuxième phase, la vitesse s'annule tandis que le ressort est comprimé. L'action prépondérante est donc celle du ressort : $c_a\dot{x} \ll k_a x$.

Question 4.8 Indiquer un paramètre du système absorbeur sur lequel on peut jouer pour vérifier cette contrainte.

Il est relativement aisé de jouer sur le coefficient de dissipation c_a de l'amortisseur, en modifiant le diamètre de l'orifice de laminage. Augmenter le diamètre de l'orifice va diminuer c_a et donc réduire la charge maximale lors de l'impact, et donc le facteur de charge.

Il faudra néanmoins veiller à ne pas arriver en butée car un amortissement plus faible conduit à une amplitude de l'amortisseur plus grande pour un même impact d'atterrissage.

Question 4.9 Discuter de la forme de la courbe de l'effort donnée dans le document DR2 pour la phase de détente.

Phase de détente : le ressort pousse et l'amortisseur freine. L'énergie stockée par le ressort lors de l'impact est progressivement dissipée. Il s'agit du lâcher d'un système masse-ressort-amortisseur.

L'effort du ressort s'oppose à celui de l'amortisseur donc F_{tot} chute très vite, sous l'effet cumulé de la détente du ressort, de la diminution de la vitesse, et du fait que ces deux forces se compensent en grande partie.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Autre approche : F_{tot} correspond (par application du PFD) à $M_{LD}\dot{v}_v$ et l'accélération devient très faible une fois l'impact absorbé.

4.1 Analyse de l'effet dynamique de mise en rotation (spin-up)

Modélisation

Question 4.10 Donner l'expression de l'inertie I_r de la roue (jante + pneu) en fonction des données.

Pneu : sans information particulière de l'énoncé, il faut ici proposer ses hypothèses de modélisation. Un pneu est constitué [1] d'une armature d'acier (et de diverses fibres) noyée dans l'élastomère en périphérie, d'une bande de roulement (épaisseur de la gomme destinée à absorber l'usure) elle aussi en périphérie, et de flans latéraux permettant de gonfler le pneu sous pression (les pneus ne sont évidement pas pleins). La majeure partie de la masse étant située en périphérie, on assimile la répartition de masse à un anneau sans épaisseur, i.e. un cercle de masse m_{pneu} et de rayon r_{pneu} (figure 12 à gauche).

$$I_r^{pneu} = \int_{cercle} (x^2+z^2)dm = \int_{cercle} r_{pneu}^2 dm = r_{pneu}^2 m_{pneu}$$

Jante : modélisée par un disque (figure 12 à droite).

$$I_r^{jante} = \int_{disque} (x^2+z^2)dm = \int_{disque} r^2 \times \underbrace{\rho r dr d\theta}_{dm} = \frac{2\pi\rho r_{jante}^4}{4} = \frac{r_{jante}^2}{2} m_{jante} \qquad \text{car } \rho = \frac{m_{jante}}{\pi r_{jante}^2}$$

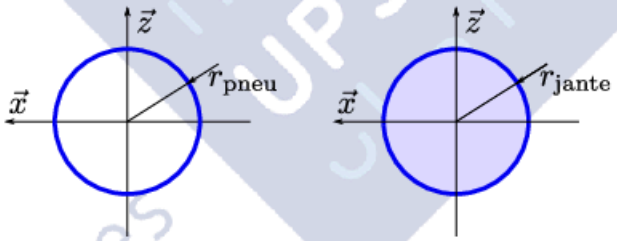

FIGURE 12 – Modèle de répartition de masse pour le pneu (à gauche) et la jante (à droite)

Question 4.11 Montrer qu'en première approximation, on a $\kappa = \dfrac{v_{LD} - \dot{\delta} - \dot{\theta} r_{pneu}}{v_{LD}}$.

En toute rigueur : $\left| \begin{array}{l} v_{axe} = v_{LD} - \dot{\delta} \\ v_{pneu} = r_{pneu}\dot{\theta} \end{array} \right. \Rightarrow \kappa = \dfrac{v_{LD} - \dot{\delta} - r_{pneu}\dot{\theta}}{v_{LD} - \dot{\delta}}$

Comme le suggère l'énoncé, il est possible en première approximation de considérer v_{axe} comme la vitesse de l'avion et d'intégrer $\dot{\delta}$ à la vitesse du pneu :

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} v_{axe} = v_{LD} \\ v_{pneu} = r_{pneu}\dot{\theta} + \dot{\delta} \end{array} \right. \Rightarrow K = \frac{v_{LD} - \dot{\delta} - r_{pneu}\dot{\theta}}{v_{LD}}$$

Question 4.12 Écrire l'équation du mouvement de rotation de la roue, et en déduire le lien entre $\dot{\kappa}$, $\ddot{\delta}$, μ et les données. En modélisant la flexion de l'axe par une raideur équivalente k_f, indiquer la forme de l'autre

1. « Comment sont fabriqués les pneus d'avion » https ://www.youtube.com/watch ?v=IozxHQ_Luqc

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

équation portant sur δ qui pilote l'évolution du système. La résolution de ces équations (couplées) n'est pas demandée.

En se plaçant dans le référentiel de l'avion (galiléen car l'avion est à vitesse constante) et en appliquant le TMD suivant $(O_r, \vec{y})$:

$$\left\{\mathcal{V}_{\text{roue/avion}}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\vec{y} \\ -\dot{\delta}\vec{x} \end{array}\right\}_{O_r} \qquad \left\{\mathcal{C}_{\text{roue/avion}}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_r\dot{\delta}\vec{x} \\ I_r\dot{\theta}\vec{y} + \vec{0} \end{array}\right\}_{O_r} \text{(car } O_r \text{ est CdM)}$$

$$\left\{\mathcal{D}_{\text{roue/avion}}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -m_r\ddot{\delta}\vec{x} \\ I_r\ddot{\theta}\vec{y} + \vec{0} \end{array}\right\}_{O_r} \text{(car } O_r \text{ est CdM)} \qquad \text{avec } m_r = m_{jante} + m_{pneu}$$

Le TMD appliqué à la roue s'écrit alors : $I_r\ddot{\theta} = F_h r_{pneu} + 0$ et $F_h = \mu F_v$.

En utilisant la relation de l'énoncé question 4.11 :

$$v_{LD}\dot{\kappa} = 0 - \ddot{\delta} - \ddot{\theta} r_{pneu} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{-1}{r_{pneu}}(\ddot{\delta} + v_{LD}\dot{\kappa})$$

On en déduit une première relation : $I_r(\ddot{\delta} + v_{LD}\dot{\kappa}) = -r_{pneu}^2 \mu F_v$.

Le TRD appliqué à la roue suivant $\vec{x}$ conduit à une deuxième relation : $-m_r\ddot{\delta} = -\mu F_v + \underbrace{k_f\delta}_{ressort}$.

Influence d'une mise en rotation initiale

Question 4.13 Commenter les résultats et conclure sur l'intérêt d'une mise en rotation initiale. Proposer un dispositif qui permettrait d'assurer cette mise en rotation.

Si $\dot{\theta}_{init} = 0$, c'est-à-dire s'il y a 100% de glissement ($\kappa = 1$), le volume d'usure normalisé est de 6500.

Si $\dot{\theta}_{init} = 129\,\text{rad/s}$, c'est-à-dire s'il y a 0% de glissement ($\kappa = 0$), le volume d'usure normalisé est pratiquement nul.

La mise en rotation permet moins d'usure.

Il faudrait comparer d'un point de vue rendement écologique et financier le gain sur pneumatique et le coût en carburant du surpoids dû à 10 moteurs embarqués.

Dispositifs :

- des moteurs électriques dans les roues, mais cette solution est très lourde ;
- des turbines à air dans les roues (entrainées par de l'air sous pression), solution plus légère au niveau des roues mais il faut un compresseur dans l'avion ;
- des ailettes sur les jantes qui utilisent le vent relatif pour mettre en rotation les roues : pas de motorisation embarquée donc solution très légère mais occupe un certain encombrement (sachant que l'espace disponible est très réduit dans les soutes) et s'avère moins précis sur la vitesse de rotation atteinte.

Question 4.14 Proposer deux protocoles permettant d'analyser expérimentalement le phénomène de *spin-up* avec le test de chute libre vu précédemment. Indiquer l'origine possible des écarts qui seraient observés avec la prédiction du modèle.

Protocoles expérimentaux :

- faire le test sur tapis roulant... (peu judicieux) ;
- mettre les roues en rotation à 129 rad/s et laisser tomber l'ensemble sur un sol fixe.

Origine des écarts :

- après impact, la voilure porte toujours sur l'avion tandis que ce n'est pas le cas sur le banc.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

4.2 Étude de l'effet shimmy

Modélisation

Question 4.15 En indiquant les théorèmes utilisés, donner l'expression de la matrice A (taille 4x4) en fonction des données. L'expression des autres matrices n'est pas demandée.

Le référentiel lié à l'avion est considéré galiléen car il est supposé à vitesse constante.

Le TRD appliqué au {bogie + 2 roues} suivant $\vec{y}$ conduit à la première équation. Le TMD appliqué au {bogie + 2 roues} suivant $(H, \vec{z})$ conduit à la deuxième équation. Les troisième et quatrième équations correspondent à la transformation d'un système de 2 équations différentielles du second ordre sous la forme d'un système de 4 équations différentielles du premier ordre.

Les éléments d'inertie du bogie ne sont pas indiqués mais il est peu probable qu'ils soient négligeables devant ceux de la roue. Ils seront notés par la suite m_b et I_b.

Le TRD appliqué au {bogie + 2 roues} suivant $\vec{y}$ s'écrit : $(m_b + 2m_r)\ddot{y} = -k_y y - c_y \dot{y} + \underbrace{F_{sol\to roue1} + F_{sol\to roue2}}_{\text{dépend de } \phi_1 \text{ et } \phi_2}$.

Le TMD appliqué au {bogie + 2 roues} suivant $(H, \vec{z})$ s'écrit :

$$\vec{\delta}_{H,\{bogie+2roues\}/R_g} \cdot \vec{z} = -k_\psi \psi - c_\psi \dot{\psi} + \underbrace{\vec{M}_{H,sol\to roue1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{H,sol\to roue2} \cdot \vec{z}}_{\text{dépend de } \phi_1 \text{ et } \phi_2}$$

Sachant que θ_{roue} est négligeable, l'ensemble {bogie + 2 roues} peut être considéré comme un solide rigide pour I_{tot}.

I_r est l'inertie suivant $\vec{y}_1$ d'une roue (*cf.* Q4.10) et l'invariance de la répartition de la masse par rotation autour de $(O_r, \vec{y}_1)$ conduit à $I_z = I_r/2$.

Le théorème de Huygens permet de calculer l'inertie d'une roue en H : $I_{H\,roue} = I_r/2 + m_r e^2$.

On en déduit $I_{H\,tot} = I_b + 2\left(\frac{I_r}{2} + m_r e^2\right)$.

D'où le TMD : $(I_b + I_r + 2m_r e^2)\ddot{\psi} = -k_\psi \psi - c_\psi \dot{\psi} + \underbrace{\vec{M}_{H,sol\to roue1} \cdot \vec{z} + \vec{M}_{H,sol\to roue2} \cdot \vec{z}}_{\text{dépend de } \phi_1 \text{ et } \phi_2}$.

D'où le système d'équations :

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{y} = \frac{-c_y}{m_b+2m_r}\dot{y} - \frac{k_y}{m_b+2m_r} y + \ldots \\ \ddot{\psi} = \frac{-c_\psi}{I_b+I_r+2m_r e^2}\dot{\psi} - \frac{k_\psi}{I_b+I_r+2m_r e^2}\psi + \ldots \\ \dot{y} = \dot{y} \\ \dot{\psi} = \dot{\psi} \end{array}\right.$$

On en déduit la forme de la matrice A :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-c_y}{m_b+2m_r} & 0 & \frac{-k_y}{m_b+2m_r} & 0 \\ 0 & \frac{-c_\psi}{I_b+I_r+2m_r e^2} & 0 & \frac{-k_\psi}{I_b+I_r+2m_r e^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ y \\ \psi \end{pmatrix} + \ldots$$

Analyse de stabilité

Question 4.16 Donner, en fonction des matrices A, B, C, D introduites précédement, les expressions des fonctions de transfert $H_{bogie}(p)$ et $H_{pneus}(p)$. En déduire l'expression de la FTBO.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

En passant la relation temporelle $\dot{\vec{W}}(t) = C\vec{X}(t) + D\vec{W}(t)$ dans le domaine de Laplace :

$$(p\mathbb{I} - D)W(p) = CX(p) \qquad \Rightarrow \qquad W(p) = \underbrace{(p\mathbb{I} - D)^{-1}C}_{H_{bogie}(p)} X(p)$$

De même en passant la relation temporelle $\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) + B\vec{W}(t)$ dans le domaine de Laplace :

$$(p\mathbb{I} - A)X(p) = BW(p) \qquad \Rightarrow \qquad X(p) = \underbrace{(p\mathbb{I} - A)^{-1}B}_{H_{pneus}(p)} W(p)$$

La FTBO s'écrit alors : $FTBO(p) = -H_{bogie}(p)H_{pneus}(p) = -(p\mathbb{I} - D)^{-1}C(p\mathbb{I} - A)^{-1}B$

Question 4.17 Conclure sur la stabilité du système et la criticité du phénomène de shimmy pour le bogie d'un atterrisseur principal.

Le point -1 reste bien à gauche de la courbe en parcourant les ω croissants donc le système est stable. Le phénomène de shimmy n'est donc pas critique.

Partie 5 : analyse du système de freinage

5.1 Dimensionnement du système de freinage

Question 5.1 Exprimer le couple de freinage C_f sur un disque du rotor en fonction de p_f, f_d et des données géométriques.

$C_f = 2\int_S \vec{M}_{O,d\vec{T}}$ où O est sur l'axe.

On en déduit $C_f = 2\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} r\, f_d p_f \times \underbrace{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}S} = 4\pi f_d p_f \frac{R_e^3 - R_i^3}{3}$

Question 5.2 En déduire le lien entre le nombre N_d de disques du rotor, la pression p_f, la décélération γ_f de l'avion au cours du freinage, le coefficient f_d, et les grandeurs géométriques r_r, R_i et R_e.

En appliquant le TRD suivant $\vec{x}$ à l'avion : $M_{LD}\gamma_f = 8F_f$.

En appliquant le TMD suivant $(O, \vec{y})$ à une roue : $r_r F_f = N_d C_f$ (en négligeant l'inertie de la roue).

On déduit de ces deux expressions (en substituant F_f) :

$$\frac{1}{8} r_r M_{LD}\gamma_f = N_d \times 4\pi f_d p_f \frac{R_e^3 - R_i^3}{3}$$

5.2 Qualification du système sur le banc ADAMSON 400

Question 5.3 Donner la démarche pour fixer le nombre n_d de disques à utiliser et la vitesse de rotation initiale ω_d, du banc, en faisant les hypothèses qui semblent raisonnables. Le calcul de ces grandeurs n'est pas demandé, mais on donnera leur expression en fonction de grandeurs connues.

On a déjà démontré en question 4.10 que pour un disque :

$$I_d = m_d \frac{r_d^2}{2} = \frac{1}{2}\pi r_d^4 h_d \rho_d \quad \text{et} \quad E_{c\,disque} = \frac{1}{2} I_d \omega_d^2$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

L'énergie à dissiper est celle de l'avion ($\frac{1}{2}M_{LD}V_{LD}^2$), répartie sur les 8 freins, soit $E_{c\,frein} = \frac{1}{16}M_{LD}V_{LD}^2$.

Il faut donc vérifier $n_d E_{cdisque} = E_{c\,frein}$. Cette unique contrainte scalaire doit permettre de déterminer deux paramètres n_d et ω_d.

Démarche : fixer ω_d à la vitesse de rotation de la roue correspondant à celle de l'atterrissage et en déduire une valeur approchée de n_d qui sera probablement une valeur non entière. Prendre la valeur entière immédiatement supérieure pour n_d puis ajuster ω_d pour satisfaire la contrainte.

Question 5.4 Après avoir rappelé les équations du moteur à courant continu, déterminer l'expression de la constante de temps mécanique qu'il faut considérer en vue de satisfaire la contrainte de rapidité précédente.

Équations de la machine à courant continu :

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + e \qquad J_v\frac{d\omega_{mot}}{dt} = C_{mot} \qquad C_{mot} = k_c i \qquad e = k_e\omega_{mot}$$

La fonction de transfert issue de ces équations est du 2ème ordre, avec 2 constantes de temps (électrique et mécanique) très différentes. La constante de temps mécanique correspond au pôle dominant (facilement approchée en considérant $L = 0$) et la fonction de transfert prend alors la forme d'un premier ordre :

$$K_{mot}(p) = \frac{K_{mot}}{1 + \tau_{meca}p} \qquad \text{avec : } \tau_{meca} = \frac{RJ_v}{k_c k_e}$$

En supposant que le moteur est commandé par un échelon de tension, que l'intensité n'est pas limitée (ce qui, pour un système à forte inertie, a peu de chances d'être vérifié) et que le cahier des charges de 14 s s'applique au temps de réponse à 5%, alors il faut vérifier :

$$t_{5\%} = 3\tau_{meca} = \frac{3RJ_v}{k_c k_e} < 14\,\text{s} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{meca} = \frac{RJ_v}{k_c k_e} < 4{,}66\,\text{s}$$

5.3 Régulation de freinage avec asservissement en glissement

Question 5.5 Proposer un dispositif permettant de mesurer la vitesse v_{avion} à partir des roues de l'avion. Comment adapter ce dispositif pour obtenir un freinage automatique ?

Sur les avions comme sur les voitures, lorsque le freinage arrive à la limite du glissement, la relation cinématique de roulement sans glissement n'est plus garantie et il n'est pas simple de mesurer la vitesse réelle du véhicule pour en déduire (par mesure de la vitesse de rotation des roues) la vitesse de glissement. Dans tous les cas il faut trouver un moyen d'estimer cette vitesse.

Sur les voitures, les quatres vitesses de roues sont mesurées et comme elles dérapent rarement en même temps, la vitesse la plus élevée des 4 roues est retenue comme estimation de la vitesse du véhicule.

Sur les avions, une stratégie similaire peut être mise en oeuvre. Les temps d'atterrissage étant courts, l'estimation est complétée par une centrale inertielle qui, par intégration des accélérations, permet d'avoir une estimation de la vitesse de l'avion. Les roues avant non freinées peuvent aussi mesurer la vitesse lorsqu'elles sont au sol.

Question 5.6 Préciser l'expression de la fonction de transfert $H_2(p)$ autour du point de fonctionnement.

En passant dans le domaine de Laplace l'équation temporelle $\kappa_1(t) + \tau\dot{\kappa}_1(t) = K f_{f1}(t)$, on obtient la fonction de transfert $H_2(p)$:

$$(1 + \tau p)\kappa_1(p) = K F_{f1}(p) \quad \Rightarrow \quad H_2(p) = \frac{\kappa_1(p)}{F_{f1}(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 5.7 Tracer, en le justifiant, le diagramme de Bode (tracé asymptotique) de la FTBO sur le document réponse DR3.

$$FTBO(p) = C(p)H_1(p)H_2(p)M(p) = \frac{100}{(1+0{,}1p+0{,}01p^2)(1+0{,}05p)(1+10p)}$$

La pulsation propre du second ordre vaut donc 10 rad/s et l'amortissement 0,5 (très faible résonance). Les deux pulsations de cassure des premiers ordres valent $\frac{1}{0{,}05} = 20$ rad/s et $\frac{1}{10} = 0{,}1$ rad/s. Le gain statique à basse fréquence vaut $20 \log 100 = 40$ dB.

On en déduit le diagramme de Bode asymptotique de la figure 13.

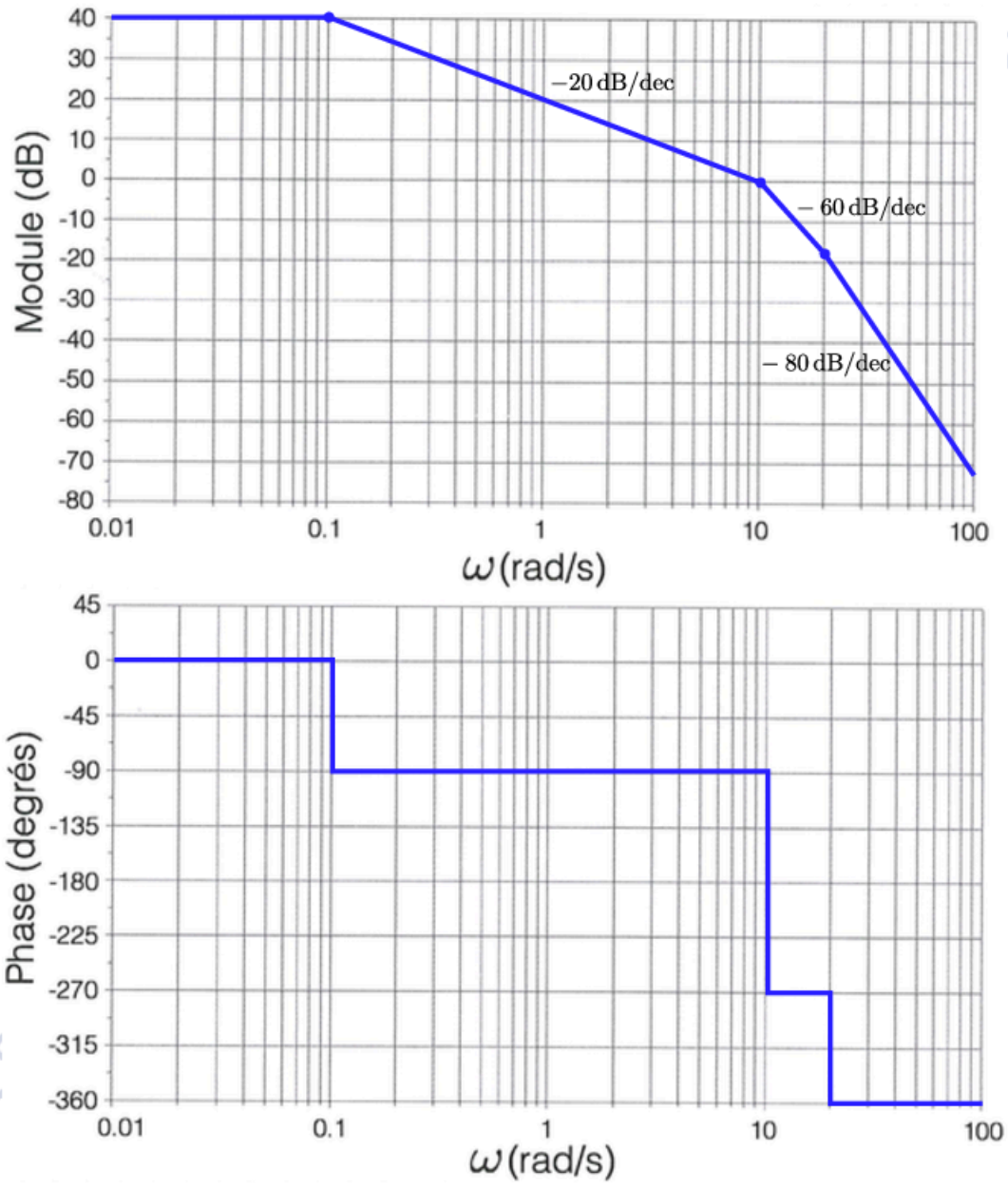

FIGURE 13 – diagramme de Bode asymptotique – question 5.7

Question 5.8 Calculer la valeur que doit prendre l'argument de $C(p)$ afin d'assurer la marge de phase imposée par le cahier des charges à la pulsation de coupure souhaitée.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Le cahier des charges spécifie une marge de phase de 60° à la pulsation de coupure de $\omega_c = 1\,\text{rad/s}$.

Or il y a une décade entre 0,1 et 1, et entre 1 et 10, donc en admettant que $0{,}1 \ll 1 \ll 10$, l'argument de la FTBO vaut $-90\,°$.

Pour respecter le cahier des charges, il faut donc que le correcteur apporte environ $\arg(C(p)) = -30\,°$.

Il est possible de faire un calcul un peu plus précis même sans calculatrice :

$$\arg(FTBO(j\omega_c) = -\arg(1+0,1j-0,01) - \arg(1+0,05j) - \arg(1+10j) \simeq \arctan(0,1) - \arctan(10) - \arctan(0,05)$$

$$\arg(FTBO(j\omega_c) \simeq -0,1 - (\frac{\pi}{2} - 0,1) - 0,05 = -\frac{\pi}{2} - 0,05$$

Donc pour assurer une marge de phase de $60\,° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$, il faut une phase après correction à $-\pi + \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$, donc il faut que le correcteur apporte environ $\arg(C(p)) = -\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 0,05\,\text{rad} = -\frac{\pi}{6} + 0,05\,\text{rad} = -27°$.

Question 5.9 Calculer la valeur minimale que l'on peut conférer à la constante T_i de l'action intégrale du régulateur. En prenant cette valeur, déterminer le gain K_r, du régulateur permettant de satisfaire la pulsation de coupure et la marge de phase souhaitées.

$\arg(C(p)) = \arctan\left(\frac{T_i\omega}{1}\right) - 90\,° = -30\,° \quad \Rightarrow \quad T_i\omega = \tan 60\,° = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad T_i = \sqrt{3}$

Sans correction, en confondant le diagramme de gain réel avec l'asymptote au voisinage de la pulsation de coupure visée à $1\,\text{rad/s}$ (car $0{,}1 \ll 1 \ll 10$), on trouve $G_{dB}(1\,\text{rad/s}) = 40\,\text{dB} - 20\,\text{dB} = 20\,\text{dB}$.

Le correcteur apporte à la pulsation de coupure visée $\|C(1\,\text{rad/s})\|_{dB} = \left\|K_r\left|1 + \frac{1}{j\sqrt{3}}\right|\right\|_{dB} = \left\|\frac{K_r}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{3} + j\right|\right\|_{dB} = 20\log\frac{K_r}{\sqrt{3}}\sqrt{3+1} = 20\log\frac{2K_r}{\sqrt{3}}$.

Pour assurer un gain nul à la pulsation de coupure visée :

$$\|FTBO(1\,\text{rad/s})\|_{dB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20\,\text{dB} + 20\log\frac{2K_r}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20\log\frac{2K_r}{\sqrt{3}} = -20\,\text{dB}$$

D'où : $K_r = \frac{\sqrt{3}}{2}10^{\frac{-20}{20}} = \frac{0{,}85}{10} = 0{,}085$.

Question 5.10 Déterminer alors la marge de gain et conclure sur les marges de stabilité obtenues.

En admettant que $0{,}1 \ll 1 \ll 10$, $\varphi = -180\,°$ est atteint en $\omega = \omega_0 = 10\,\text{rad/s}$. À cette pulsation,

$$\|FTBO(\omega_0)\|_{dB} = 20\log\left(\frac{100}{1 \times |1 + 0{,}5j| \times |1 + 100j|}0{,}05\left|1 + \frac{\sqrt{3}}{10j}\right|\right)$$

En admettant $|1 + 0{,}5j| \simeq 1$, $|1 + 100j| \simeq 100$ et $\left|1 + \frac{\sqrt{3}}{10j}\right| \simeq 1$, l'expression se simplifie :

$$\|FTBO(\omega_0)\|_{dB} = 20\log 0{,}05 = -26\,\text{dB}$$

La marge de gain vaut donc $MG = 26\,\text{dB}$. Cette valeur est suffisamment importante pour ne pas être inquiet des approximations faites.

Question 5.11 En examinant les diagrammes de Bode fournis sur le document réponse DRA, compléter ces diagrammes par leurs tracés asymptotiques (une tolérance sera admise pour les brisures, mais il est demandé une très bonne concordance pour les comportements en basse fréquence et haute fréquence).

Les tracés sont proposés sur le document réponse figure 14.

Question 5.12 À partir des diagrammes précédents, proposer les valeurs numériques pour les différents paramètres associés à cette fonction de transfert.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

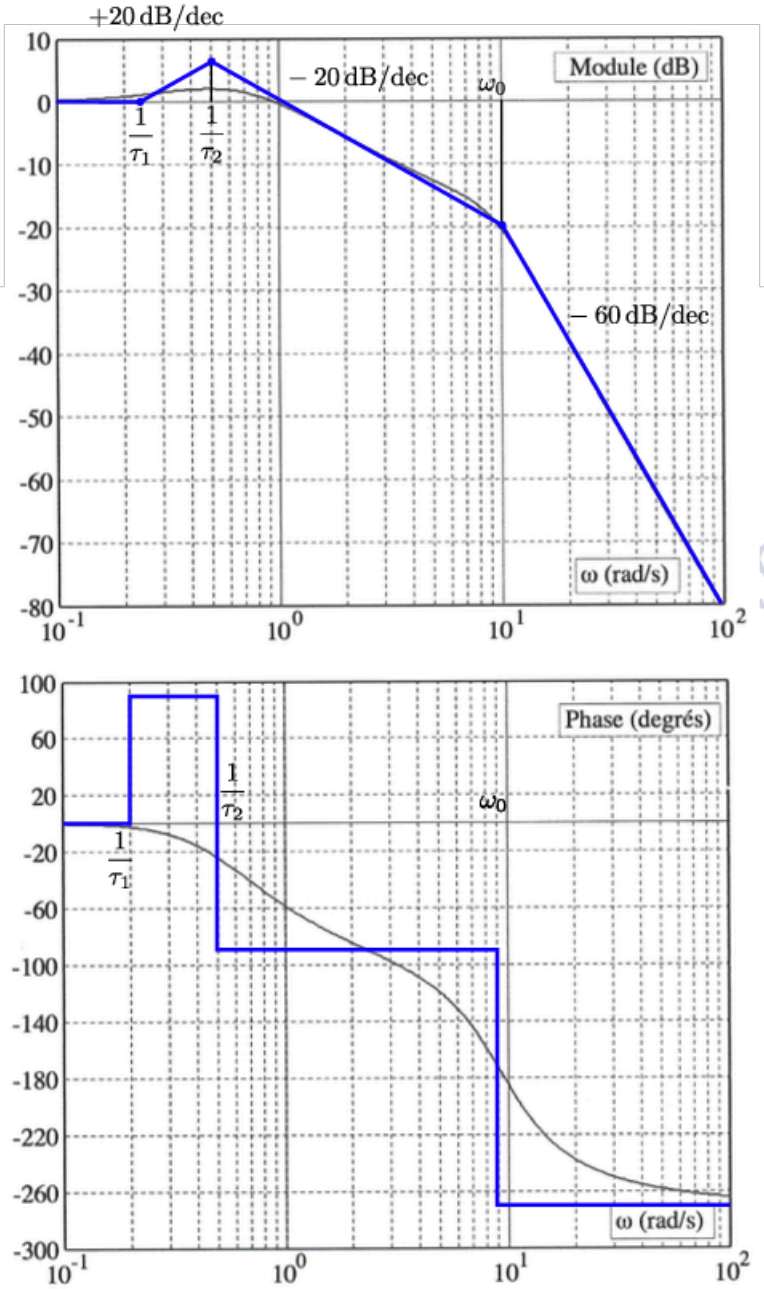

FIGURE 14 – diagramme de Bode asymptotique – question 5.11

$\tau_1 = \frac{1}{0{,}25} = 4\,\text{s}$, $\tau_2 = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\text{s}$, $\omega_0 = 10\,\text{rad/s}$, $K_f = 1$ et $\varepsilon = 0{,}5$ (très faible résonance).

Question 5.13 En justifiant la réponse, montrer que la fonction de transfert $F(p)$ peut être approchée par $K_f \frac{1+\tau_1 p}{(1+\tau_2 p)^2}$

Sur la gamme de pulsation $[0;9\,\text{rad/s}]$, l'effet de la cassure à $-60\,\text{dB/dec}$ est imperceptible, ce qui revient à négliger le 2^{e}ordre. Cette simplification est raisonnable vue la pulsation de coupure à $\omega_c = 1\,\text{rad/s}$ du cahier des charges.

Question 5.14 On calcule ici la réponse temporelle vis-à-vis de la consigne de glissement. En utilisant $\mathcal{L}\left(t^n e^{-at} H(t)\right) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$, $H(t)$ étant la fonction échelon unité, montrer que la réponse impulsionnelle du

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

système peut être exprimée par $f(t) = a.y(t) + b.\dot{y}(t)$ où $y(t)$ est une fonction à préciser, et a et b deux constantes à exprimer en fonction de K_f, τ_1 et τ_2.

La réponse impulsionnelle est la réponse à un Dirac $\delta(t)$ dont la transformée de Laplace vaut $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$. La réponse se calcule par transformée de Laplace inverse :

$$\kappa_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(\kappa_1(p)) = \mathcal{L}^{-1}(F(p) \times 1) = \mathcal{L}^{-1}\left(K_f \frac{1+\tau_1 p}{(1+\tau_2 p)^2}\right) = K_f \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1+\tau_2 p)^2}\right) + K_f \tau_1 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(1+\tau_2 p)^2}\right)$$

$$\kappa_1(t) = K_f y(t) + K_f \tau_1 \dot{y}(t) = a y(t) + b \dot{y}(t) \qquad \text{(on vérifie que } y(0) = 0\text{, condition de Heaviside)}$$

avec $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1-\tau_2 p)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau_2^2} \times \frac{1!}{(p+\frac{1}{\tau_2})^2}\right) = \frac{1}{\tau_2^2} \times t e^{-t/\tau_2} H(t)$, $a = K_f$ et $b = K_f \tau_1$.

Question 5.15 À partir de cette réponse, calculer le temps du 1er maximum et en déduire le dépassement en réponse à une variation en échelon de la consigne de glissement relatif. Conclure sur le respect du cahier des charges.

Le cahier des charge spécifie le dépassement pour une entrée indicielle (entrée à un échelon de consigne). Le dépassement est un extremum atteint lorsque la dérivée de la courbe s'annule. La réponse impulsionnelle étant la dérivée de la réponse indicielle, le temps t_m du dépassement est atteint lorsque $f(t) = 0$, c'est-à-dire $a y(t) + b \dot{y}(t) = 0$.

Sachant que pour $t > 0$, $y(t) = \frac{1}{\tau_2^2} \times t e^{-t/\tau_2}$, on calcule :

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\tau_2^2} \times \left(1 - \frac{t}{\tau_2}\right) e^{-t/\tau_2}$$

La condition sur t_m s'écrit alors :

$$a \frac{1}{\tau_2^2} \times t e^{-t/\tau_2} + b \frac{1}{\tau_2^2} \times \left(1 - \frac{t}{\tau_2}\right) e^{-t/\tau_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad at + b\left(1 - \frac{t}{\tau_2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{b\tau_2}{b - a\tau_2}$$

Avec $a = K_f$ et $b = K_f \tau_1$, on détermine $t_m = \dfrac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$.

Le dépassement est la valeur atteinte en $t = t_m$ par la réponse indicielle $I(t)$. On obtient cette valeur en intégrant la réponse impulsionnelle sur $[0, t_m]$:

$$I(t_m) = \int_0^{t_m} f(t) dt = \frac{K_f}{\tau_2^2} \int_0^{t_m} \left[t + \tau_1\left(1 - \frac{t}{\tau_2}\right)\right] e^{-t/\tau_2} dt = \frac{K_f}{\tau_2^2} \int_0^{t_m} \left[t\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + \tau_1\right] e^{-t/\tau_2} dt$$

$$I(t_m) = \frac{K_f}{\tau_2^2} \left\{ \left[-\tau_2 t \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) e^{-t/\tau_2}\right]_0^{t_m} + \int_0^{t_m} \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) e^{-t/\tau_2} dt + \int_0^{t_m} \tau_1 e^{-t/\tau_2} dt \right\}$$

$$I(t_m) = \frac{K_f}{\tau_2^2} \left\{ -\tau_2 t_m \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) e^{-t_m/\tau_2} + \tau_2 \left[-\tau_2 e^{-t/\tau_2}\right]_0^{t_m} \right\} = \frac{K_f}{\tau_2^2} \left\{ -\tau_2 t_m \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) e^{-t_m/\tau_2} - \tau_2^2 \left(e^{-t_m/\tau_2} - 1\right) \right\}$$

En utilisant la valeur de t_m trouvée :

$$I(t_m) = K_f \left\{ \left[\frac{-\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) - 1\right] e^{\frac{-\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}} + 1 \right\} = K_f \left[\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1\right) e^{\frac{-\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}} + 1\right]$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Sachant que la valeur asymptotique de la réponse indicielle vaut K_f, la valeur du premier dépassement vaut alors

$$D = \frac{|I(t_m) - I(\infty)|}{I(\infty)} = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1\right) e^{\frac{-\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}}$$

Avec les valeurs identifiées $\tau_1 = 4\,\text{s}$ et $\tau_2 = 2\,\text{s}$, on obtient :

$$D = e^{-2} = 0{,}135 < 0{,}18 \qquad \text{et} \qquad t_m = 4\,\text{s} > 3{,}5\,\text{s}$$

Le cahier des charges est respecté vis-à-vis du critère de dépassement mais le temps du premier dépassement est légèrement trop important.

La FTBF étant de classe 0 et de gain statique unitaire, l'écart en régime permanent est nul (CdC respecté).

La marge de phase et la pulsation de coupure sont respectées (question 5.9).

Ainsi, la quasi-totalité des performances de l'asservissement exigées au CdC sont satisfaites, à l'exception du temps du premier dépassement légèrement trop important.

teaching sciences for innovation

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI