

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2010

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

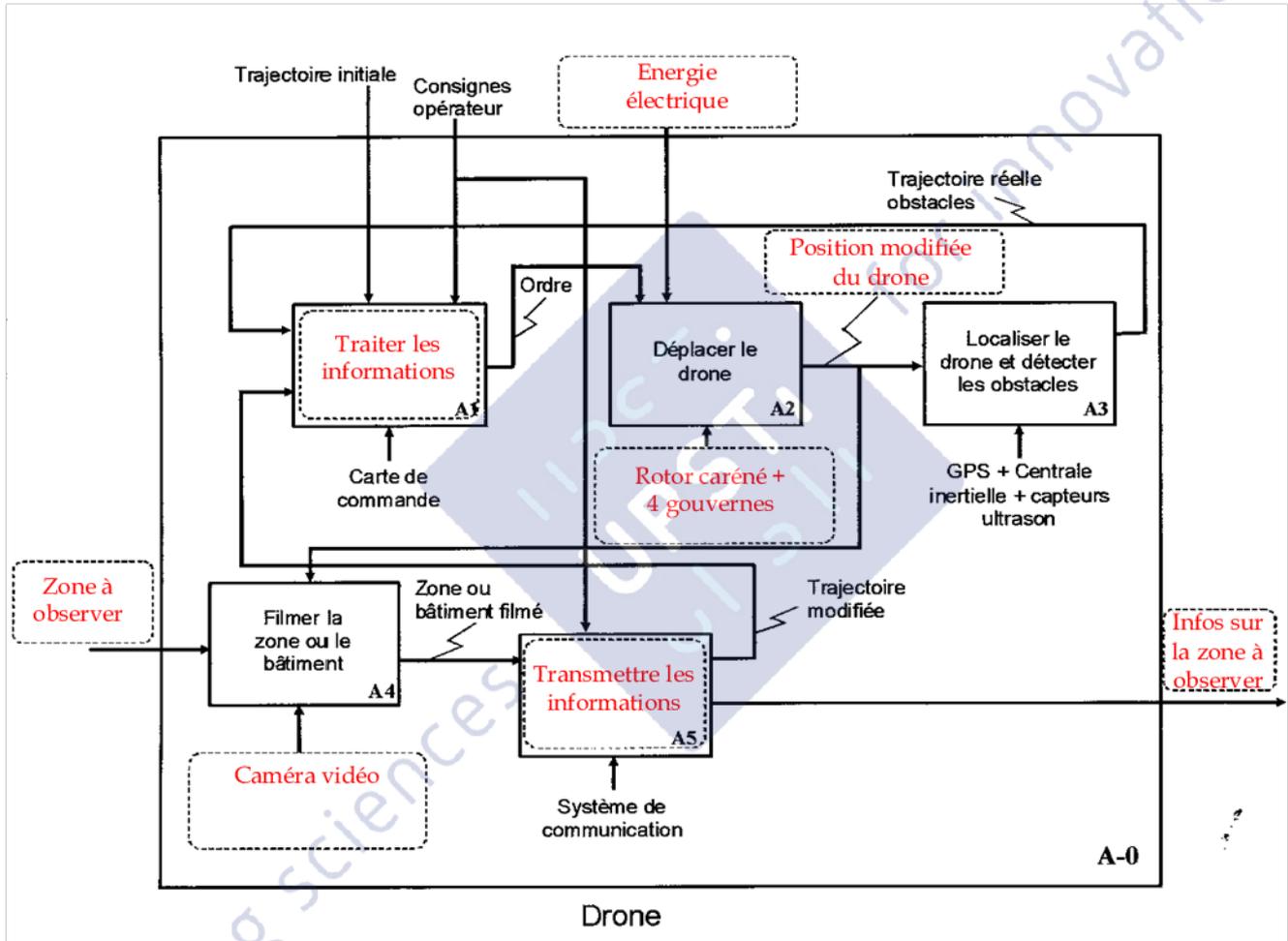
L'équipe UPSTI

MODELISATION ET COMMANDE D'UN DRONE MINIATURE A VOILURE TOURNANTE

1 Présentation du système

2 Fonction FP1 « surveiller une zone ou un bâtiment difficilement accessible »

Q1 : Décomposition fonctionnelle SADT



3 Fonction FP1.1 « être capable d'effectuer un vol stationnaire » : Etude des efforts aérodynamiques

Q2: Positions d'équilibre du drone

On isole le drone, supposé en équilibre dans le référentiel terrestre considéré galiléen ; alors :

$$\begin{cases} \overline{R}(\vec{d} \rightarrow d) = \vec{0} \\ \overline{M}(O, \vec{d} \rightarrow d) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans la position étudiée (axe du drone vertical), pour qu'il y ait équilibre du drone dans le référentiel terrestre, il faut que :

- 1) les efforts de portance sur les pales de l'hélice compensent le poids du drone et les efforts de traînée sur les appendices
- 2) les efforts de portance sur les appendices génèrent un couple résultant axial négatif, s'opposant au couple résultant des forces de traînée sur les pales de l'hélice (positif sur l'axe $(0, z_1)$).

D'où les situations d'équilibre indiquées ci-dessous :

<p>Cas 1</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> <td>δ_1</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	δ_1	δ_1	δ_1	δ_1	<p>Cas 2</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> <td>$-\delta_2$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	$-\delta_2$	$-\delta_2$	$-\delta_2$	$-\delta_2$	<p>Cas 3</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>δ_3</td> <td>$-\delta_3$</td> <td>δ_3</td> <td>$-\delta_3$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	δ_3	$-\delta_3$	δ_3	$-\delta_3$
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
δ_1	δ_1	δ_1	δ_1																							
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
$-\delta_2$	$-\delta_2$	$-\delta_2$	$-\delta_2$																							
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
δ_3	$-\delta_3$	δ_3	$-\delta_3$																							
<p>Cas 4</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_4$</td> <td>δ_4</td> <td>$-\delta_4$</td> <td>δ_4</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : NON</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	$-\delta_4$	δ_4	$-\delta_4$	δ_4	<p>Cas 5</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>$-\delta_5$</td> <td>0</td> <td>$-\delta_5$</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	$-\delta_5$	0	$-\delta_5$	0	<p>Cas 6</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>δ_a</td> <td>δ_b</td> <td>δ_c</td> <td>δ_d</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>$-\delta_6$</td> <td>0</td> <td>$-\delta_6$</td> </tr> </table> <p>Configuration pouvant correspondre à une position d'équilibre : OUI</p>	δ_a	δ_b	δ_c	δ_d	0	$-\delta_6$	0	$-\delta_6$
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
$-\delta_4$	δ_4	$-\delta_4$	δ_4																							
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
$-\delta_5$	0	$-\delta_5$	0																							
δ_a	δ_b	δ_c	δ_d																							
0	$-\delta_6$	0	$-\delta_6$																							

Dans une configuration à deux hélices contrarotatives, les couples résultants des forces de traînée sur les deux hélices se compensent : donc :

- il n’y a pas besoin d’utiliser les gouvernes pour supprimer le mouvement de lacet ;
- ne pas sortir les gouvernes pour le maintien en vol stationnaire permet alors de limiter les pertes d’énergie dues aux forces de traînée ;
- inconvénient, cette solution est plus lourde, ce qui nécessite une plus grande consommation d’énergie pour mouvoir le drone ;
- cette solution nécessite plus de composants et est donc plus coûteuse.

Q3 : Scenarii de vol

	$p_{1/0}$	$q_{1/0}$	$r_{1/0}$	$u_{1/0}$	$v_{1/0}$	$w_{1/0}$
$\tilde{\omega} \nearrow, \tilde{\delta}_a = \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_c = \tilde{\delta}_d = 0$			X			X
$\tilde{\delta}_i \nearrow, i = a, b, c, d, \tilde{\omega} = 0$			X			X
$\tilde{\delta}_a \nearrow$ et $\tilde{\delta}_c = -\tilde{\delta}_a, \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_d = 0, \tilde{\omega} = 0$			X			X
$\tilde{\delta}_a \nearrow$ et $\tilde{\delta}_c = -\tilde{\delta}_a, \tilde{\delta}_b = \tilde{\delta}_d = 0, \tilde{\omega} = 0$		X		X		X

Cette configuration permet de découpler la gestion des mouvements selon l’axe (O, \bar{z}_1) du pilotage des degrés de liberté selon les directions perpendiculaires.

4 Fonction FP1.3 « se déplacer horizontalement » : Etude du mouvement d’inclinaison

Q4 : Inertie du drone

- Le corps (1) du drone présente deux plans de symétrie matérielle $(G_1, \bar{z}_1, \bar{x}_1)$ et $(G_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$; de ce fait, les produits d’inertie de (1) sont nuls dans la base vectorielle $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$; de plus, les symétries matérielles de part et d’autre de ces deux plans sont identiques : les moments d’inertie

autour des axes (G_1, \bar{x}_1) et (G_1, \bar{y}_1) sont égaux. Alors,

$$I_{G_1,1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

- L’axe (G_2, \bar{z}_1) est axe de symétrie de l’hélice (2) ; la matrice d’inertie de (2) est donc de la forme :

$$I_{G_2,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(-, -, \bar{z}_1)}$$

- La position du centre d’inertie G du drone se détermine par la relation de barycentre :

$$(m_1 + m_2) \cdot O_1 \dot{G} = m_1 \cdot O_1 \dot{G}_1 + m_2 \cdot O_1 \dot{G}_2. \text{ On en déduit : } l_G = -\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}$$

- On utilise le théorème de Huygens généralisé pour déterminer les matrices d’inertie des solides (1) et (2) au centre d’inertie du drone G.

$$\text{Pour chaque solide (i), } I_{G,i} = I_{G_i,i} + I_{G G_i,i}, \text{ avec } I_{G G_i,i} = \begin{pmatrix} m_i (l_i + l_G)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_i (l_i + l_G)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}.$$

$$\text{Alors, } I_{G,i} = \begin{pmatrix} A_i + m_i (l_i + l_G)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_i + m_i (l_i + l_G)^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}$$

Q5 : Actions aérodynamiques nécessaires à l'obtention du mouvement d'inclinaison

On isole le drone, soumis aux actions de l'air et de la pesanteur. On lui applique le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D.) dans le référentiel galiléen terrestre : $D_{d/0} = T_{air \rightarrow d} + T_{g \rightarrow d}$.

On en déduit les deux théorèmes généraux (moments exprimés en G) :

$$\begin{cases} \dot{R}(d/0) = \dot{R}(air \rightarrow d) + \dot{R}(g \rightarrow d) \\ \dot{\delta}(G, d/0) = \overline{M}(G, air \rightarrow d) + \overline{M}(G, g \rightarrow d) \end{cases}$$

- Durant la phase de vol étudiée, $\dot{V}(G, 1/0) = \vec{0}$; donc, $\dot{R}(d/0) = (m_1 + m_2)\dot{a}(G, d/0) = \vec{0}$.

De ce fait, $\dot{R}(air \rightarrow d) = -\dot{R}(g \rightarrow d) = -(m_1 + m_2)g \cdot \vec{z}_0$

- $\dot{\delta}(G, d/0) = \dot{\delta}(G, 1/0) + \dot{\delta}(G, 2/0)$

- $\dot{\delta}(G, 1/0) = \left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 1/0) \right|_0 + \dot{V}(G/0) \wedge m_1 \cdot \dot{V}(G_1, 1/0)$

- $\overline{\sigma}(G, 1/0) = I_{G,1} \cdot \underbrace{\left(\overline{\Omega}(1/0) \right)}_{\dot{\phi} \cdot \vec{x}_1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)} = A_1' \dot{\phi} \cdot \vec{x}_1 ;$

- $\left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 1/0) \right|_0 = A_1' \ddot{\phi} \cdot \vec{x}_1$

- $\dot{V}(G/0) \wedge m_1 \cdot \dot{V}(G_1, 1/0) = \vec{0}$ car le point G est immobile dans le référentiel terrestre (0) durant cette phase de mouvement.

Alors $\overline{\delta}(G, 1/0) = A_1' \dot{\phi} \cdot \vec{x}_1$

- $\dot{\delta}(G, 2/0) = \left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 2/0) \right|_0 + \overline{V}(G/0) \wedge m_2 \cdot \overline{V}(G_2, 2/0)$

- $\overline{\sigma}(G, 2/0) = I_{G,2} \cdot \underbrace{\left(\overline{\Omega}(2/0) \right)}_{\dot{\phi} \cdot \vec{x}_1 + \omega \cdot \vec{z}_1} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)} = A_2' \dot{\phi} \cdot \vec{x}_1 + C_2' \omega \cdot \vec{z}_1 ;$

Remarque : La matrice d'inertie de (2) est identique dans toute base vectorielle orthonormée directe contenant le vecteur unitaire \vec{z}_1 , donc dans $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$.

- $\left. \frac{d}{dt} \overline{\sigma}(G, 2/0) \right|_0 = A_2' \ddot{\phi} \cdot \vec{x}_1 + C_2' \left(\dot{\omega} \cdot \vec{z}_1 + \omega \cdot \left. \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right|_0 \right) = A_2' \ddot{\phi} \cdot \vec{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot \vec{z}_1 - \omega \dot{\phi} \cdot \vec{y}_1)$

- $\overline{V}(G/0) \wedge m_2 \cdot \overline{V}(G_2, 2/0) = \vec{0}$ car le point G est immobile dans le référentiel terrestre (0) durant cette phase de mouvement.

Alors $\dot{\delta}(G, 2/0) = A_2' \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot \dot{z}_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot \dot{y}_1)$

D'où : $\dot{\delta}(G, d/0) = (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot \dot{z}_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot \dot{y}_1)$

- G étant le centre de gravité du drone, $\overline{M}(G, g \rightarrow d) = 0$

Il découle de tout ceci que : $\dot{M}(G, air \rightarrow d) = (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 + C_2' (\dot{\omega} \cdot \dot{z}_1 - \omega \dot{\varphi} \cdot \dot{y}_1)$

D'où le torseur des actions aérodynamiques subies par le drone pour effectuer une inclinaison d'axe

(G, \bar{x}_1) à altitude constante : $T_{air \rightarrow d} = \left. \begin{matrix} 0 & (A_1' + A_2') \ddot{\varphi} \\ -(m_1 + m_2) g \sin \varphi & -C_2' \omega \dot{\varphi} \\ -(m_1 + m_2) g \cos \varphi & C_2' \dot{\omega} \end{matrix} \right\}_{(G, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$

Q6: Actions aérodynamiques durant un mouvement d'inclinaison particulier

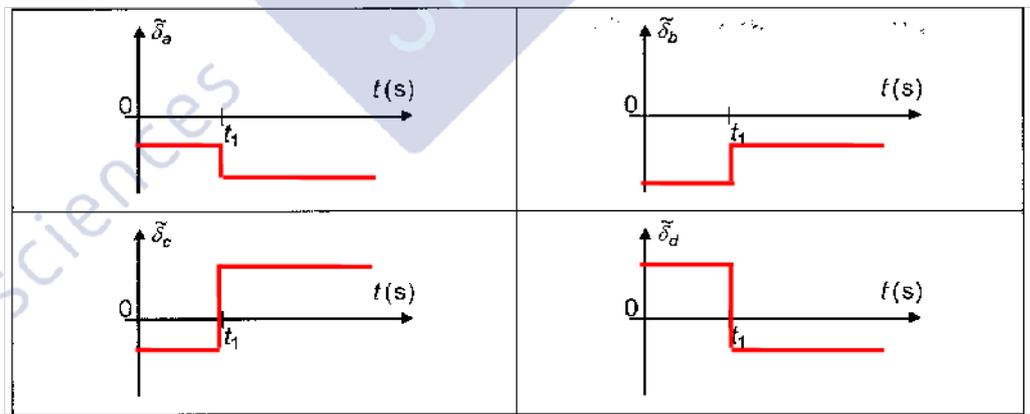
1. On se place à l'instant $t = 0^+$ (initialisation du mouvement) ; alors, $\dot{\varphi} = 0$ et $\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_m}{t_1}$;

on en déduit : $\overline{M}(G, air \rightarrow d) = (A_1' + A_2') \frac{\dot{\varphi}_m}{t_1} \cdot \dot{x}_1 + C_2' \dot{\omega} \cdot \dot{z}_1$

Il est alors nécessaire de :

- Sortir les appendices b et d parallèlement entre eux ($\delta_b = -\delta_d$) pour créer un couple selon la direction \bar{x}_1 ;
- Sortir les appendices a et c de manière opposée ($\delta_a = \delta_c$) pour créer le couple selon la direction \bar{z}_1

Les positions angulaires des appendices sont définies en supposant $\omega < 0$ et $\dot{\omega} < 0$



2. On se place à l'instant $t > t_1$ (inclinaison à vitesse constante) ; alors, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_m$ et $\ddot{\varphi} = 0$;

on en déduit : $\overline{M}(G, air \rightarrow d) = C_2' (\dot{\omega} \cdot \dot{z}_1 - \omega \dot{\varphi}_m \cdot \dot{y}_1)$

Il est alors nécessaire de :

- Sortir les appendices b et d de manière opposée ($\delta_b = \delta_d$) pour créer un couple selon la direction \bar{z}_1 ;
- Sortir les appendices a et c parallèlement entre eux ($\delta_a = -\delta_c$) pour créer le couple selon la direction \bar{y}_1

5 Fonction FP1.3 et FP1.4 « pouvoir se déplacer horizontalement et verticalement » : Etude de l'avancement longitudinal 2D

Q7 : Moment en G des actions de l'air sur les gouvernes

$$\dot{M}(G, air \rightarrow g) = \overline{GO_1} \wedge \dot{R}(air \rightarrow g) = L \cdot \vec{z}_1 \wedge F \cdot \vec{x}_0, \text{ soit } \boxed{M \cdot \vec{y}_0 = LF \cos \theta \cdot \vec{y}_0}$$

Pour des petits mouvements autour de la position d'équilibre en vol stationnaire, on pose :

$$M = \overline{M} + \tilde{M}(t) \text{ et } F = \overline{F} + \tilde{F}(t) ; \text{ de plus, au premier ordre } \cos \theta \approx 1.$$

Ce qui permet de réécrire le moment en G des actions de l'air sur les gouvernes : $\overline{M} + \tilde{M}(t) = L(\overline{F} + \tilde{F}(t))$.

A l'équilibre, $\overline{M} = L\overline{F}$; donc, $\boxed{\tilde{M}(t) = L\tilde{F}(t)}$

Q8 : Evolution de la vitesse de tangage du drone

On projette sur l'axe \vec{y}_0 l'équation du moment dynamique en G appliquée au drone en mouvement dans le référentiel (0) galiléen :

$$\vec{\delta}(G, d / 0) \cdot \vec{y}_0 = \underbrace{\dot{M}(G, air \rightarrow h)}_0 \cdot \vec{y}_0 + \underbrace{\dot{M}(G, air \rightarrow g)}_M \cdot \vec{y}_0 + \underbrace{\dot{M}(G, t \rightarrow d)}_0 \cdot \vec{y}_0 + \underbrace{\dot{M}(G, air \rightarrow c)}_0 \cdot \vec{y}_0$$

Un peu de cinétique :

G étant centre d'inertie du drone, $\vec{\delta}(G, d / 0) \cdot \vec{y}_0 = \frac{d}{dt} (\dot{\sigma}(G, d / 0) \cdot \vec{y}_0) - \dot{\sigma}(G, d / 0) \cdot \frac{d}{dt} \vec{y}_0 \Big|_0$

$$\dot{\sigma}(G, d / 0) = I(G, d) \left(\underbrace{\dot{\Omega}(d / 0)}_{q_{d/0} \cdot \vec{y}_0} \right) = A q_{d/0} \cdot \vec{y}_0, \text{ soit } \vec{\delta}(G, d / 0) \cdot \vec{y}_0 = A \frac{d}{dt} q_{d/0}$$

D'où l'équation différentielle demandée : $\boxed{A \frac{d}{dt} q_{d/0} = M}$

Q9 : Evolution des vitesses de translation du drone

On projette sur les directions \vec{x}_0 et \vec{z}_0 le théorème de la résultante dynamique appliqué au drone en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{cases} \overline{R}(d / 0) \cdot \dot{x}_0 = \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow h)}_{F_p \sin \theta} \cdot \dot{x}_0 + \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow g)}_F \cdot \dot{x}_0 + \underbrace{\overline{R}(t \rightarrow d)}_0 \cdot \dot{x}_0 + \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow c)}_{-K_x v_x} \cdot \dot{x}_0 \\ \overline{R}(d / 0) \cdot \dot{z}_0 = \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow h)}_{F_p \cos \theta} \cdot \dot{z}_0 + \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow g)}_0 \cdot \dot{z}_0 + \underbrace{\overline{R}(t \rightarrow d)}_{mg} \cdot \dot{z}_0 + \underbrace{\overline{R}(air \rightarrow c)}_{-K_z v_z} \cdot \dot{z}_0 \end{cases}$$

Un peu de cinétique : $\overline{R}(d / 0) = m \cdot \dot{a}(G, d / 0) = m(\dot{v}_x \cdot \dot{x}_0 + \dot{v}_z \cdot \dot{z}_0)$

D'où les équations différentielles demandées : $\boxed{\begin{cases} m\dot{v}_x = -K_x v_x + F_p \sin \theta + F \\ m\dot{v}_z = -K_z v_z + F_p \cos \theta + mg \end{cases}}$

Q10 : Equations linéarisées des mouvements de translation

On étudie les petits mouvements de translation autour de la position d'équilibre en vol stationnaire du drone.

Remarque : Le sujet nomme la translation horizontale « tangage », terme habituellement utilisé pour désigner la rotation d'axe transversal d'un véhicule en déplacement.

En plus des notations déjà introduites, on pose : $v_x = \bar{v}_x + \tilde{v}_x$, $v_z = \bar{v}_z + \tilde{v}_z$, $\theta = \bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)$, $F_p = \bar{F}_p + \tilde{F}_p(t)$. De

ce fait, $q_{d/0} = \frac{d}{dt} \theta = \frac{d}{dt} \tilde{\theta}(t) = \tilde{q}_{d/0}(t)$. Au premier ordre, $\sin \theta \approx \tilde{\theta}(t)$. A l'équilibre, $\bar{F}_p + mg = 0$.

Par ailleurs, les conditions de vol stationnaire imposent : $\bar{M} = 0$ et $\bar{F} = 0$.

Les équations précédentes se réécrivent, au premier ordre :

$$\begin{cases} A \frac{d}{dt} \tilde{q}_{d/0}(t) = \tilde{M}(t) \\ m \tilde{v}_x(t) = -K_x \tilde{v}_x(t) - mg \tilde{\theta}(t) + \frac{1}{L} \tilde{M}(t) \\ m \tilde{v}_z(t) = -K_z \tilde{v}_z(t) + \tilde{F}_p(t) \end{cases}$$

Soit le vecteur $\begin{pmatrix} \tilde{v}_x(t) \\ \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{q}_{d/0}(t) \end{pmatrix}$, que l'on utilise pour réécrire le système d'équations précédent :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{v}_x(t) \\ \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{q}_{d/0}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{K_x}{m} & -g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{\text{tang}}} \begin{pmatrix} \tilde{v}_x(t) \\ \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{q}_{d/0}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{mL} \\ 0 \\ \frac{1}{A} \end{pmatrix}}_{B_{\text{tang}}} \tilde{M}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \tilde{v}_z(t) = -\frac{K_z}{m} \tilde{v}_z(t) + \frac{1}{m} \tilde{F}_p(t)$$

Q11 : Fonctions de transfert

On suppose les conditions initiales nulles pour les fonctions intervenant dans ces équations ; dès lors, on peut leur appliquer la transformée de Laplace. On en tire :

$$\begin{cases} Ap^2 \tilde{\theta}(p) = \tilde{M}(p) \\ mp \tilde{v}_x(p) = -K_x \tilde{v}_x(p) - mg \tilde{\theta}(p) + \frac{1}{L} \tilde{M}(p) \\ mp \tilde{v}_z(p) = -K_z \tilde{v}_z(p) + \tilde{F}_p(p) \end{cases} \quad \text{équivalent à} : \begin{cases} Ap^2 \tilde{\theta}(p) = \tilde{M}(p) \\ (mp + K_x) \tilde{v}_x(p) = \left(-\frac{mg}{Ap^2} + \frac{1}{L} \right) \tilde{M}(p) \\ (mp + K_z) \tilde{v}_z(p) = \tilde{F}_p(p) \end{cases}$$

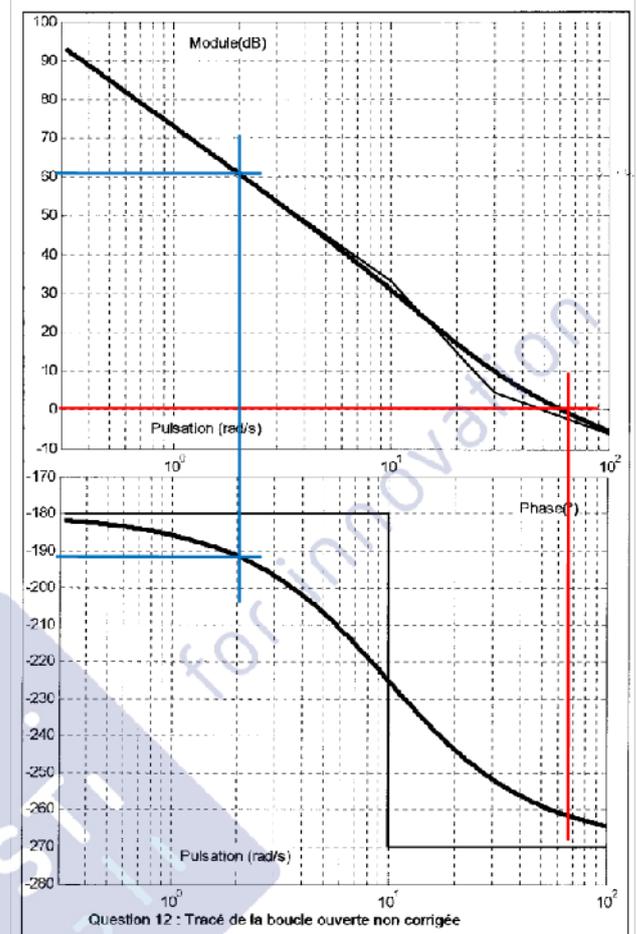
D'où les trois fonctions de transfert :

$$H_1(p) = \frac{\tilde{v}_x(p)}{\tilde{M}(p)} = \frac{Ap^2 - Lmg}{LAp^2(mp + K_x)}, \quad H_2(p) = \frac{\tilde{\theta}(p)}{\tilde{M}(p)} = \frac{1}{Ap^2}, \quad H_3(p) = \frac{\tilde{v}_z(p)}{\tilde{F}_p(p)} = \frac{1}{(mp + K_z)}$$

Q12 : Stabilité de la boucle de tangage non corrigée ($C_{\text{tang}}(p)=1$)

La fonction de transfert isochrone en boucle ouverte $H_{\text{bo tang}}(j\omega)$ fait état d'un déphasage de -262 degrés à la pulsation de coupure $\omega_c = 60 \text{ rad/s}$; cette valeur est très inférieure à la valeur critique de -180 degrés.

Un tel système est instable.



Q13 : Réglage du correcteur à avance de phase

On propose d'introduire un correcteur à avance de phase de la forme $C_{\text{tang}}(p) = K_{av} \frac{1 + \tau p}{1 + a \tau p}$, de manière à obtenir une marge de phase $\Delta\varphi = 60$ degrés, à la pulsation de coupure à 0 dB $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$; on détermine les trois constantes du correcteur de la manière suivante :

- Réglage de la marge de phase :

A la pulsation $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$, le déphasage de $H_{\text{bo tang}}(j\omega)$ est $\varphi[H_{\text{bo tang}}(j\omega_c)] = -192$ degrés. Le correcteur doit donc apporter $\varphi[C_{\text{tang}}(j\omega_c)] = -180 + \Delta\varphi - \varphi[H_{\text{bo tang}}(j\omega_c)] = 72$ degrés.

Donc, $a = \frac{1 - \sin 72}{1 + \sin 72}$. A.N. : $a = 0,025$

- Réglage de la pulsation centrale du correcteur

Le correcteur doit apporter un maximum de phase à la pulsation $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$; donc, $\omega_c = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

Il en découle : $\tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{a}}$. A.N. : $\tau = 3,16 \text{ s}$

- Annulation du gain du système corrigé à la pulsation de coupure

A la pulsation $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$, le gain de $H_{\text{bo tang}}(j\omega)$ est $G[H_{\text{bo tang}}(j\omega_c)] = 61 \text{ dB}$. Le correcteur doit être tel que $G[C_{\text{tang}}(j\omega_c)] + G[H_{\text{bo tang}}(j\omega_c)] = 0$, soit encore $20\log\left(\frac{K_{av}}{\sqrt{a}}\right) + 61 = 0$.

Donc, $K_{av} = \sqrt{a} \cdot 10^{\frac{-61}{20}}$. A.N. : $K_{av} = 1,41 \cdot 10^{-4}$

On obtient le correcteur suivant : $C_z(p) = 1,41 \cdot 10^{-4} \frac{1+3,16p}{1+0,079p}$

Q14 : Ecart en régime établi en régulation ($\tilde{v}_{xc}(t) = 0$)

La fonction de transfert en régulation du système est : $H_{\text{régul tang}}(p) = \frac{H_{\text{tang}}(p)}{1 + K_{\text{tang}} C_{\text{tang}}(p) H_{\text{tang}}(p)}$, soit encore

$$H_{\text{régul tang}}(p) = \frac{4500 - 5p^2}{p^2(1 + 0,1p)} \cdot \frac{1 + 3,16p}{1 + 1,41 \cdot 10^{-4} \frac{1 + 3,16p}{1 + 0,079p}} \cdot \frac{4500 - 5p^2}{p^2(1 + 0,1p)}$$

L'écart en régime établi peut se déterminer par le théorème de la valeur finale :

$\varepsilon_{\text{tang } \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{M_{\text{pert}}}{p} \cdot H_{\text{régul tang}}(p)$, soit $\varepsilon_{\text{tang } \infty} = \frac{M_{\text{pert}}}{1,41 \cdot 10^{-4}}$

Q15 : Fonction de transfert en poursuite ($\tilde{F}_{p \text{ pert}}(p) = 0$)

$H_{vz}(p) = \frac{\tilde{v}_z(p)}{\tilde{v}_{zc}(p)} = \frac{K_{cz} C_z(p) H_z(p)}{1 + K_{cz} C_z(p) H_z(p)}$, soit encore $H_{vz}(p) = \frac{5K_{cz} K_{alt}}{1 + 5K_{cz} K_{alt} + 5p}$

Sous forme canonique, $H_{vz}(p) = \frac{\frac{5K_{cz} K_{alt}}{1 + 5K_{cz} K_{alt}}}{1 + \frac{5}{1 + 5K_{cz} K_{alt}} p}$

Le système est du premier ordre de gain $\frac{5K_{cz} K_{alt}}{1 + 5K_{cz} K_{alt}}$ et de constante de temps $\frac{5}{1 + 5K_{cz} K_{alt}}$.

Le cahier des charges impose un temps de réponse à 5% de 4 secondes ; pour un système du premier ordre, il est égal à 3 fois sa constante de temps. D'où : $K_{alt} = \frac{11}{20K_{cz}}$. A.N. : $K_{alt} = 0,55$

Q16 : Translation verticale due à un échelon de consigne v_{z0}

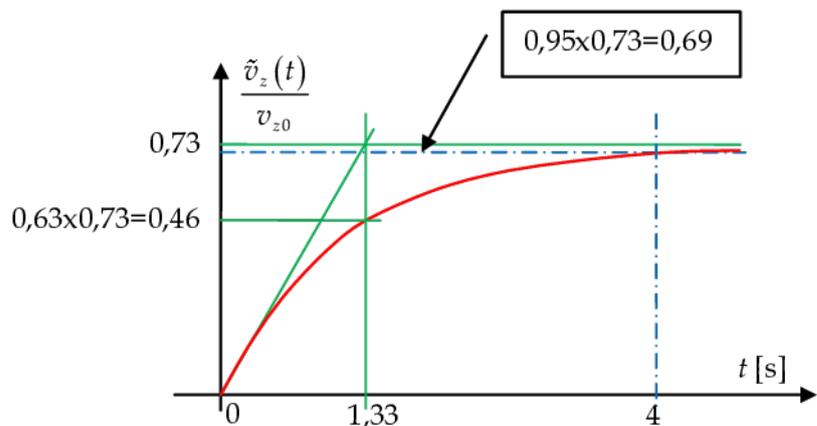
En régime permanent, la position atteinte sera le produit du gain statique par l'amplitude de la consigne en échelon :

$\tilde{v}_{z\infty} = \frac{5K_{cz} K_{alt}}{1 + 5K_{cz} K_{alt}} v_{z0}$,

soit $\tilde{v}_{z\infty} = 0,73 v_{z0}$

L'expression numérique de la fonction de transfert en altitude est :

$H_{vz}(p) = \frac{0,73}{1 + 1,33p}$



Q17 : Correcteur proportionnel intégral

Ce correcteur va annuler l'écart en régime établi entre la vitesse de déplacement du drone et la valeur de l'échelon de consigne.

La fonction de transfert en boucle ouverte devient : $K_{cz} K_{alt} \left(1 + \frac{0,2}{p}\right) \frac{5}{1+5p}$, soit encore $\frac{K_{cz} K_{alt}}{p}$. Ceci entraîne une fonction de transfert en boucle fermée $H_{vz}(p) = \frac{K_{cz} K_{alt}}{K_{cz} K_{alt} + p} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{cz} K_{alt}} p}$. C'est un système

du premier ordre, de constante de temps $\frac{1}{K_{cz} K_{alt}}$. Le temps de réponse à 5% étant de 4 secondes, le gain

K_{alt} doit vérifier la relation $\frac{3}{K_{cz} K_{alt}} = 4$, soit $K_{alt} = \frac{3}{4K_{cz}}$. A.N. : $K_{alt} = 0,75$