

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2015

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

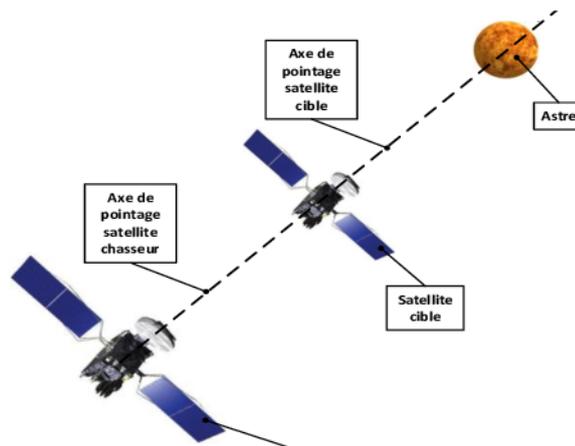
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Télescope constitué de deux satellites



II Conception

II.1 Indiquer par leurs numéros (Figure 8) les blocs qui représentent des éléments matériels et les blocs qui représentent des modèles ou des opérations mathématiques.

Blocs qui représentent des éléments matériels : **1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10.**

Blocs qui représentent des modèles ou des opérations mathématiques : **4, 9.**

II.2 Donner la relation entre α et β permettant de maintenir les deux satellites à la même attitude durant toute la manœuvre conformément à la configuration illustrée sur la Figure 7.

Les vecteurs \vec{x}_4 et \vec{x}_5 sont de même direction mais de sens opposé. On peut donc écrire (attention à l'angle α qui est négatif sur le dessin) : $\boxed{\beta - \alpha = \pi}$

II.3 Donner les expressions des déplacements Δ_X et Δ_Y en fonction de s et α .

$$\vec{S} = s\vec{y}_4 = \Delta_X \vec{x}_0 + \Delta_Y \vec{y}_0$$

$$s(-\sin \alpha \vec{x}_0 + \cos \alpha \vec{y}_0) = \Delta_X \vec{x}_0 + \Delta_Y \vec{y}_0$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta_X = -s \sin \alpha \\ \Delta_Y = s \cos \alpha \end{cases}}$$

II.4 Ecrire les relations géométriques directes liant les paramètres L , a , X , Y , λ , θ_1 et θ_2 .

Fermeture géométrique :

$$\vec{O}_0\vec{O}_3 = \vec{O}_0\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{O}_3$$

$$X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 = \lambda\vec{x}_0 + a\vec{y}_0 + L\vec{x}_2 + L\vec{x}_3$$

On projette dans le repère 0 :

$$\begin{cases} X = \lambda + L \cos \theta_1 + L \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y = a + L \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

II. 5 Donner les expressions de Δ_X et Δ_Y permettant de rétablir l'alignement entre les deux axes de pointage en fonction des paramètres L , a , X_{ref} , Y_{ref} , λ , θ_1 et θ_2 .

Les déplacements Δ_X et Δ_Y correspondent au déplacement du point O_3 sur \vec{x}_0 et \vec{y}_0 entre la position initiale et la position désirée.

$$\vec{S} = \overrightarrow{O_0 O_3} \Big|_{t=t} - \overrightarrow{O_0 O_3} \Big|_{t=0} = (X - X_{ref}) \vec{x}_0 + (Y - Y_{ref}) \vec{y}_0$$

Par conséquent, on trouve :

$$\begin{cases} \Delta_X = \lambda + L \cos \theta_1 + L \cos(\theta_1 + \theta_2) - X_{ref} \\ \Delta_Y = a + L \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2) - Y_{ref} \end{cases}$$

II. 6 Déterminer les expressions de V_X et de V_Y en fonction des paramètres cinématiques et géométriques.

Pour le calcul des vitesses, on dérive simplement les expressions de la question précédente dans le repère 0 :

$$\begin{cases} V_X = \dot{\lambda} - L \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ V_Y = L \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

II. 7 Donner la relation qui doit lier θ_{1ref} et θ_{2ref} pour être compatible avec l'hypothèse formulée sur les vitesses angulaires et sur le déplacement vertical. En déduire une relation liant θ_1 et θ_2 permettant d'éviter qu'une variation de ces paramètres entraîne un déplacement selon \vec{x}_0 .

On intègre la relation $\dot{\theta}_1 = -\frac{\dot{\theta}_2}{2}$:

$$2\theta_1 + \theta_2 = cte = 2\theta_{1ref} + \theta_{2ref}$$

$$\text{Donc } \boxed{2\theta_{1ref} + \theta_{2ref} = 2\theta_1 + \theta_2}$$

On ne veut pas que les angles θ_1 et θ_2 entraînent un déplacement du satellite chasseur sur \vec{x}_0 . Ceci implique une vitesse V_X nulle (pour $\dot{\lambda} = 0$) :

$$-L \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

Or la manœuvre se fait avec $\dot{\theta}_1 = -\frac{\dot{\theta}_2}{2}$ donc :

$$\sin \theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 \\ \text{ou} \\ \pi - \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

La première solution étant impossible (ou rendant le solide 2 inutile : $\theta_2 = 0$), on obtient :

$$\boxed{2\theta_1 + \theta_2 = \pi}$$

II. 8 Exprimer les consignes θ_{1C} et θ_{2C} en fonction de Δ_Y , a , Y_{ref} et L .

$$\Delta_Y = a + L\sin\theta_{1C} + L\sin(\theta_{1C} + \theta_{2C}) - Y_{ref}$$

Or $\sin\theta_{1C} = \sin(\theta_{1C} + \theta_{2C})$ d'après la question précédente.

$$\Delta_Y = a + 2L\sin\theta_{1C} - Y_{ref}$$

$$\begin{cases} \theta_{1C} = \arcsin\left(\frac{\Delta_Y + Y_{ref} - a}{2L}\right) \\ \theta_{2C} = \pi - 2\theta_{1C} = \pi - 2\arcsin\left(\frac{\Delta_Y + Y_{ref} - a}{2L}\right) \end{cases}$$

II. 9 Exprimer X_{ref} en fonction de L , θ_{1ref} , θ_{2ref} et λ_{ref} et donner l'expression de λ_C .

En appliquant la formule trouvée à la question II.4 à l'instant initial, on trouve :

$$X_{ref} = \lambda_{ref} + L\cos\theta_{1ref} + L\cos(\theta_{1ref} + \theta_{2ref})$$

$$\Delta_X = \lambda_C - (\lambda_{ref} + L\cos\theta_{1ref} + L\cos(\theta_{1ref} + \theta_{2ref}))$$

Au final :

$$\boxed{\lambda_C = \Delta_X + (\lambda_{ref} + L\cos\theta_{1ref} + L\cos(\theta_{1ref} + \theta_{2ref}))}$$

Gestion du risque d'arc-boutement dynamique

II. 10 Par un raisonnement qualitatif, en considérant $\ddot{\theta} > 0$, préciser parmi les points A, B, C et D ceux qui seront en contact. En déduire parmi les actions mécaniques recensées, celles qui seront non nulles.

Si on imagine qu'il existe un jeu dans la liaison glissière, en poussant vers la droite le satellite il aura tendance à vouloir tourner dans le sens trigonométrique (son centre de gravité étant au dessus de l'axe). D'après la géométrie de la liaison, les contacts s'effectueront donc aux points **A** et **D**.

Les actions mécaniques non nulles seront donc : N_A , T_A , N_D et T_D .

II. 11 Ecrire les trois équations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique appliqué à $\{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport à $\{0\}$ galiléen, exprimé en O_c .

Calcul du moment dynamique en O_c :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{O_c, \Sigma/0} &= \vec{\delta}_{G_M, \Sigma/0} + \vec{O}_c G_M \wedge M \ddot{\lambda}(t) \vec{x}_0 = \vec{0} + e \vec{y}_0 \wedge M \ddot{\lambda}(t) \vec{x}_0 \\ \vec{\delta}_{O_c, \Sigma/0} &= -Me \ddot{\lambda}(t) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$, exprimé en O_c :

$$\begin{cases} Fm_{0 \rightarrow 1} - T_A - T_D = M \ddot{\lambda}(t) \\ N_A - N_D = 0 \\ -(N_A + N_D) \frac{l}{2} + (T_A - T_D) \frac{d}{2} = -Me \ddot{\lambda}(t) \end{cases}$$

II. 12 Par analyse de ces trois équations et par application du modèle de Coulomb aux contacts entre $\{0\}$ et $\{1\}$, discuter des risques d'apparition du phénomène d'arc-boutement, et des dispositions géométriques et cinématiques à respecter.

Le système Σ est soumis à 3 forces. Si on considère le terme dynamique comme une force, il est soumis à 4 forces. On regroupe les termes $Fm_{1 \rightarrow 0}$ et $-M \ddot{\lambda}$ en une force située en un point P comme sur la figure ci-après. Le point P est situé sous l'axe \vec{x}_0 car d'après la première équation du PFD, $Fm_{1 \rightarrow 0} > M \ddot{\lambda}$ (T_A et T_D étant positifs pour $\ddot{\lambda} > 0$).

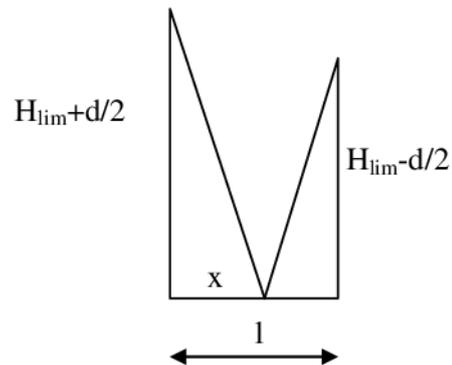
Pour éviter l'arc-boutement, il faut que le point P se situe au dessus de l'axe Δ .
Nota : les valeurs y et H_{lim} seront positives dans les calculs.

Calcul de y :

$$y \cdot Fm_{1 \rightarrow 0} = (y + e)M \ddot{\lambda} \text{ donc } y = \frac{eM \ddot{\lambda}}{Fm_{0 \rightarrow 1} - M \ddot{\lambda}}$$

Calcul de H_{lim} :

$$\begin{aligned} \frac{x}{H_{lim} + d/2} &= \frac{l-x}{H_{lim} - d/2} = \tan \varphi_s = f_s \\ H_{lim} &= \frac{l}{2f_s} \end{aligned}$$



La condition de non arc-boutement est : $y < H_{lim}$. Donc :

$$\frac{eM \ddot{\lambda}}{Fm_{0 \rightarrow 1} - M \ddot{\lambda}} < \frac{l}{2f_s}$$

Estimation de l'effort à fournir au chariot

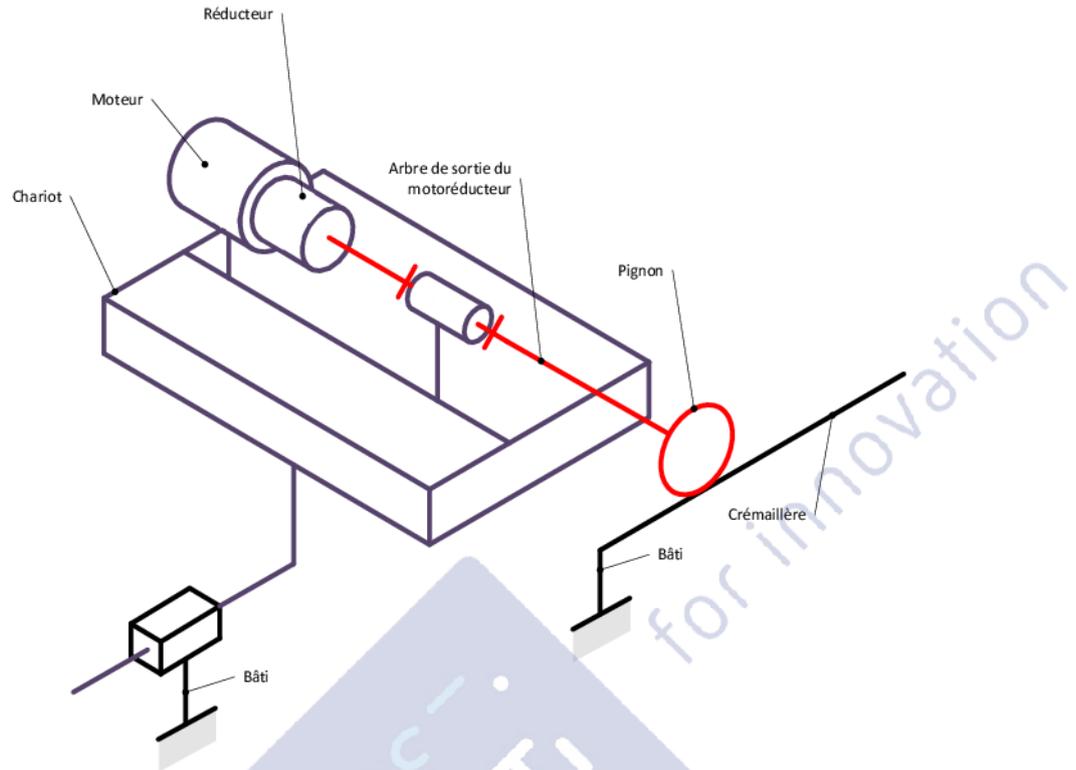


Figure 1 : schématisation de l'axe X

II. 13 En isolant le satellite chasseur 4, et en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la relation qui permet de lier le couple $C_{m_{3 \rightarrow 4}}$ exercé par le moteur électrique présent dans l'articulation entre le solide 3 et le solide 4 aux paramètres cinématiques, de dimensions, de masse et d'inertie du système étudié.

Calcul de l'accélération du point G_4 :

$$\vec{V}_{G_4,4/0} = \vec{V}_{O_3,4/0} + \vec{G}_4 O_3 \wedge \Omega_{4/0} = V_Y \vec{y}_0 + \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x_4, y_4, z_4} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{x_4, y_4, z_4} = \dot{V}_X \vec{x}_0 + V_Y \vec{y}_0 + b \dot{\alpha} \vec{y}_4$$

$$\vec{\Gamma}_{G_4,4/0} = \left(\frac{d\vec{V}_{O_3,4/0}}{dt} \right)_0 = \dot{V}_X \vec{x}_0 + \dot{V}_Y \vec{y}_0 + b(\ddot{\alpha} \vec{y}_4 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_4)$$

Calcul du moment dynamique du satellite 4 au point O_3 projeté suivant \vec{z}_0 :

$$\begin{aligned} \delta_{O_3,4/0} \cdot \vec{z}_0 &= \delta_{G_4,4/0} \cdot \vec{z}_0 + (\vec{O}_3 G_4 \wedge m_4 \vec{\Gamma}_{G_4,4/0}) \cdot \vec{z}_0 \\ \delta_{O_3,4/0} \cdot \vec{z}_0 &= \frac{d}{dt} (\sigma_{G_4,4/0} \cdot \vec{z}_0) + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{x_4, y_4, z_4} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x_4, y_4, z_4} \cdot m_4 \begin{pmatrix} -b \dot{\alpha}^2 + \dot{V}_X \cos \alpha + \dot{V}_Y \sin \alpha \\ b \ddot{\alpha} - \dot{V}_X \sin \alpha + \dot{V}_Y \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{x_4, y_4, z_4} \\ \delta_{O_3,4/0} \cdot \vec{z}_0 &= C_4 \ddot{\alpha} + m_4 b (b \ddot{\alpha} - \dot{V}_X \sin \alpha + \dot{V}_Y \cos \alpha) \end{aligned}$$

Moment dynamique du satellite 4 au point O_3 et projeté suivant l'axe \vec{z}_0 :

$$C_{m_{3 \rightarrow 4}} = (C_4 + m_4 b^2) \ddot{\alpha} + m_4 b (\dot{V}_Y \cos \alpha - \dot{V}_X \sin \alpha)$$

Il semble peu utile ici de remplacer V_X et V_Y par les expressions trouvées précédemment.

II. 14 Montrer qu'il est nécessaire d'imposer un couple $C_{m_{3 \rightarrow 4}}$ non nul au moteur de l'articulation entre 3 et 4 pour maintenir l'orientation α constante en présence d'une accélération $\ddot{\alpha}$, même si le bras du robot n'est soumis à aucun mouvement par rapport au châssis (θ_1 et θ_2 constants).

D'après l'expression du couple moteur trouvé à la question précédente, il reste un couple statique à compenser même si l'angle α reste constant : $C_{m_{3 \rightarrow 4}} = m_4 b (\dot{V}_Y \cos \alpha - \dot{V}_X \sin \alpha)$.

Si on suppose de plus que les angles θ_1 et θ_2 sont constants, on a :

$$C_{m_{3 \rightarrow 4}} = -m_4 b \ddot{\lambda} \sin \alpha$$

II. 15 Dans ces conditions, décrire la situation particulière pour laquelle ce couple est nul.

Ce couple est nul pour un angle $\alpha = 0$ [π].

$\alpha = 0$ est une situation d'équilibre instable si $\ddot{\lambda} > 0$ et stable si $\ddot{\lambda} < 0$.

II. 16 Par une étude dynamique, exprimer $F_{m_{0 \rightarrow 1}}$, l'effort à appliquer au chariot 1 par la crémaillère, sous la forme $F_{m_{0 \rightarrow 1}} = F_1(\ddot{\alpha}) + F_2(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\alpha})$, expression dans laquelle $F_1(\ddot{\alpha})$ et $F_2(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\alpha})$ désignent des fonctions des paramètres cinématiques cités en argument, ainsi que les grandeurs géométriques et d'inertie utiles.

On isole $\{1, 2, 3, 4\}$. Afin d'obtenir l'équation demandée, on écrit la résultante dynamique projetée sur \vec{x}_0 pour ne pas faire intervenir les inconnues dans la liaison glissière.

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = m_1 \ddot{\lambda} + m_2 * \left(\ddot{\lambda} + \frac{d \left(-\frac{L}{2} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \right)}{dt} \right) + m_3 * \left(\ddot{\lambda} + \frac{d \left(-L \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \frac{L}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)}{dt} \right) + m_4 * \left(\dot{V}_X + \frac{d(-b \dot{\alpha} \sin \alpha)}{dt} \right)$$

Avec $\alpha = \alpha_0$ constant :

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{\lambda} - \frac{L}{2} (m_2 + 2m_3) (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) - m_3 \frac{L}{2} ((\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_4 \dot{V}_X$$

On remplace θ_2 par : $\theta_2 = -2\theta_1 + \pi$

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \ddot{\lambda} - \frac{L}{2} (m_2 + 2m_3 + 2m_4) (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) - (m_3 + 2m_4) \frac{L}{2} (-\ddot{\theta}_1 \sin(\pi - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \cos(\pi - \theta_1))$$

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \ddot{\lambda} - \frac{(m_2 + m_3)L}{2} (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1)$$

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = F_1(\ddot{\lambda}) + F_2(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$$

Ainsi, on trouve :

$$\begin{cases} F_1(\ddot{\lambda}) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\ddot{\lambda} \\ F_2(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1) = -\frac{(m_2 + m_3)L}{2}(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) \end{cases}$$

II. 17 Dans la situation étudiée, et par des considérations géométriques, exprimer Y en fonction des paramètres cinématiques et géométriques.

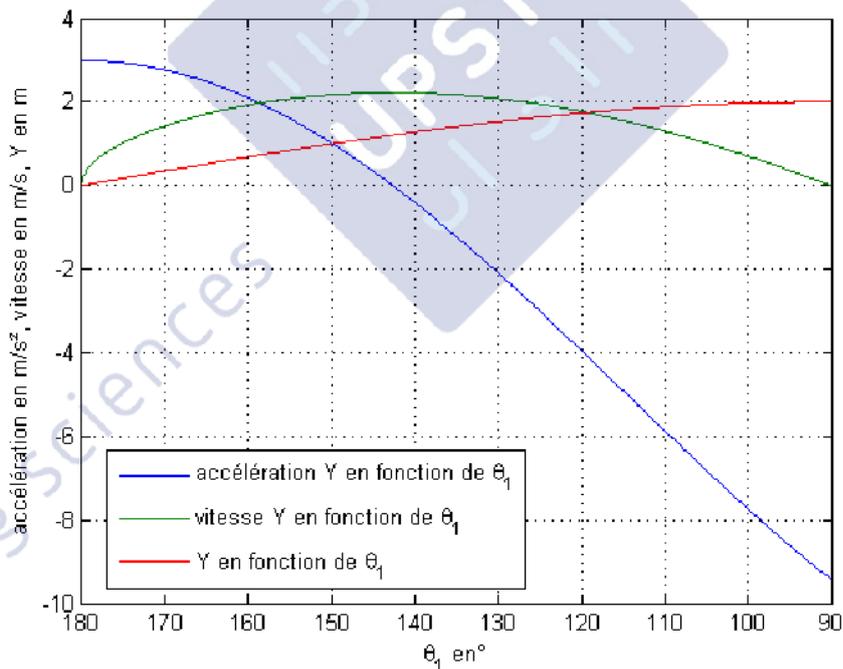
D'après le résultat de la question II.4 :

$$Y = a + L \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

On remplace θ_2 par : $\theta_2 = -2\theta_1 + \pi$

$$Y = a + 2L \sin \theta_1$$

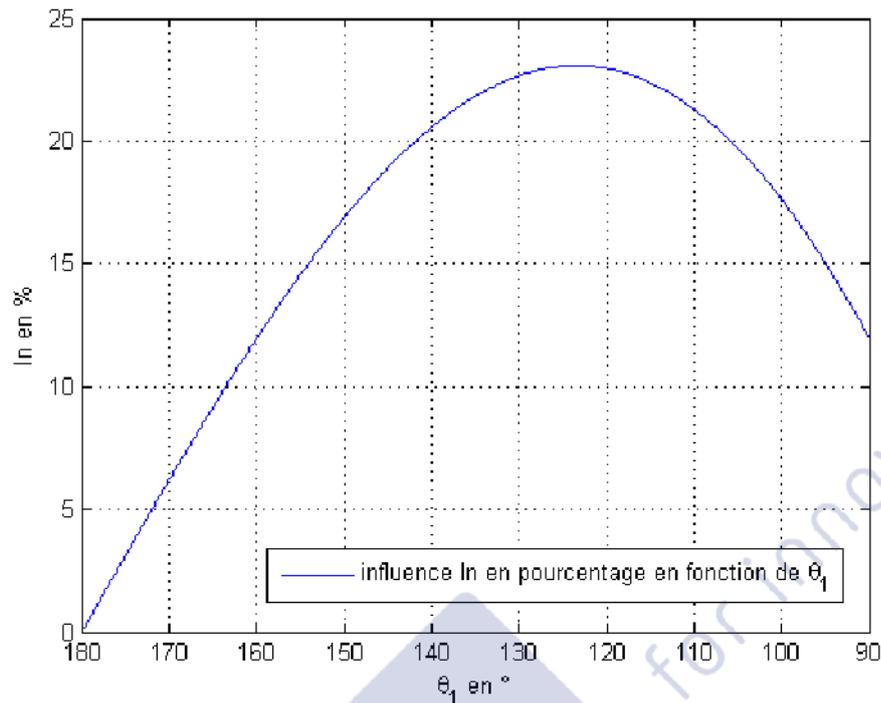
II. 18 Dans ces conditions particulières, conclure sur la plage de variation de θ_1 permettant de respecter ce critère du cahier des charges.



L'accélération devant être supérieure à $2.7m/s^2$, la plage de variation de l'angle θ_1 est environ :

$$\theta_1 \in [-180^\circ; -170^\circ]$$

II. 19 Sur la figure 14 parcourue dans le sens gauche-droite, décrire le mouvement du bras (se plie-t-il ou se déplie-t-il?). En déduire, par une étude qualitative et pour $\ddot{\theta}_1 > 0$, une justification du signe de In .



Si l'angle θ_1 part de 180° et diminue jusqu'à 90° , le solide 2 tournera autour de $-\vec{z}_0$ et le solide 3 autour de $+\vec{z}_0$. Le point O_3 se déplacera alors verticalement sur l'axe (O_1, \vec{y}_1) . Le bras est donc en train de se déplier vers le haut.

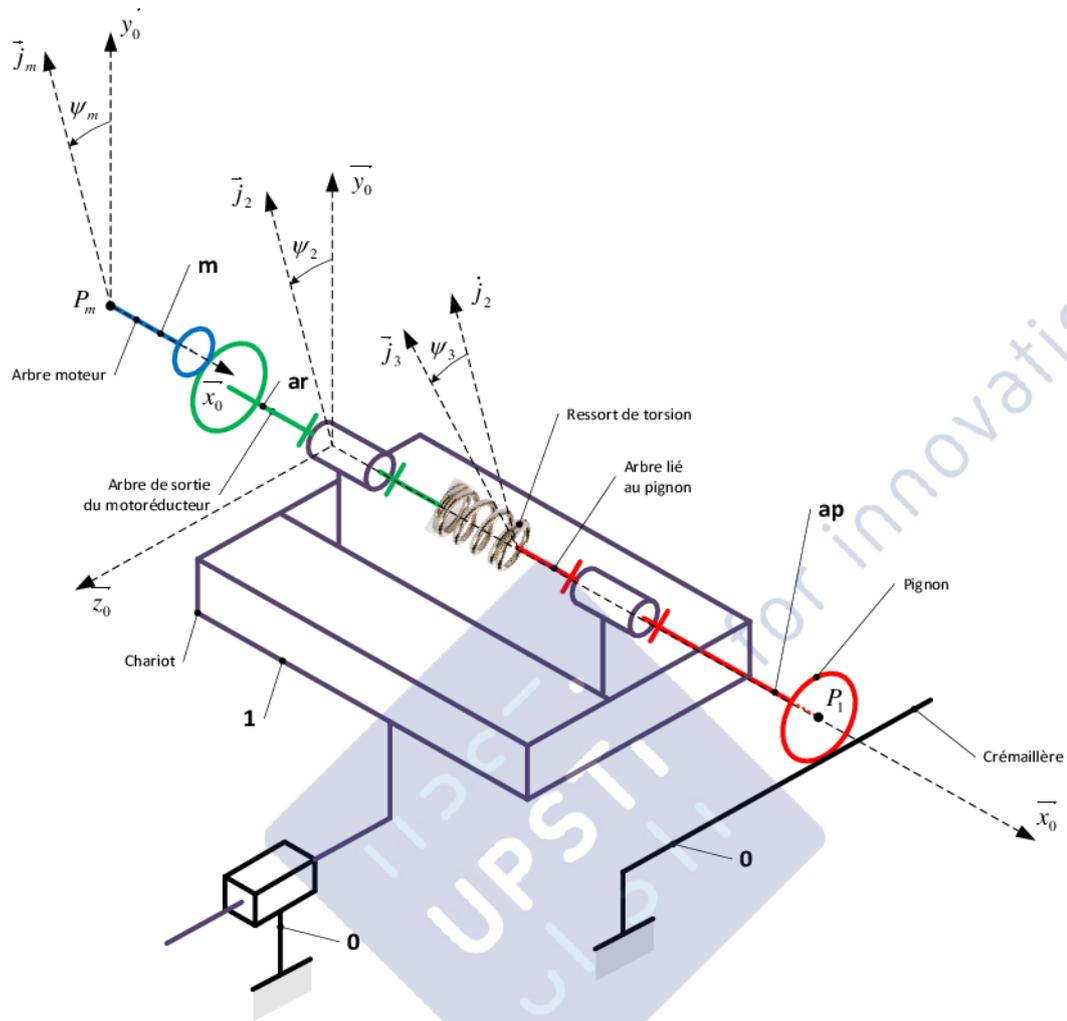
Déplacer l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ vers la droite nécessite un effort positif. D'autre part, la rotation des bras 2 et 3 déplie le bras vers le haut. On doit donc aussi fournir un effort positif pour ce mouvement car il faut lever la masse. Le rapport des deux efforts est donc bien positif.

II. 20 Conclure sur cette influence en proposant une forme simplifiée d'expression de l'effort $F_{m_{0 \rightarrow 1}}$ permettant de créer une accélération $\ddot{\lambda}$, en s'affranchissant de la présence éventuelle du mouvement du bras.

L'influence du mouvement du bras représente au maximum environ 23% de l'effort nécessaire à l'accélération $\ddot{\lambda}$. On peut donc majorer l'effort nécessaire par la relation :

$$F_{m_{0 \rightarrow 1}} = 1,23 * F_1(\ddot{\lambda})$$

Validation du modèle de l'axe X



II. 21 En isolant successivement l'arbre m, l'arbre ar et l'arbre ap, exprimer les 3 équations issues de l'application du théorème du moment dynamique.

Chaque arbre est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Le théorème du moment dynamique appliqué à chaque arbre sur son axe de rotation donne directement :

$$\begin{cases} C_m - rC_{m \rightarrow ar} = J_m \ddot{\psi}_m \\ C_{m \rightarrow ar} - b\dot{\psi}_2 - k(\psi_2 - \psi_3) = J_{ar} \ddot{\psi}_2 \\ -b\dot{\psi}_3 + k(\psi_2 - \psi_3) - C_r = J_{ap} \ddot{\psi}_3 \end{cases}$$

Remarque : Attention petit piège dans la modélisation proposée. Le couple de l'arbre ar sur l'arbre m n'est pas juste l'opposé du couple de l'arbre m sur l'arbre ar. Il faut multiplier par le rapport de réduction (si on suppose que le rendement de l'engrènement est de 1)

II. 22 En supposant que les conditions initiales sont nulles, exprimer $\psi_2(p)$ et $\psi_3(p)$ sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{C_m}{r} - \frac{J_m}{r^2} \ddot{\psi}_2 - b\dot{\psi}_2 - k(\psi_2 - \psi_3) = J_{ar} \ddot{\psi}_2 \\ -b\dot{\psi}_3 + k(\psi_2 - \psi_3) - C_r = J_{ap} \ddot{\psi}_3 \end{cases}$$

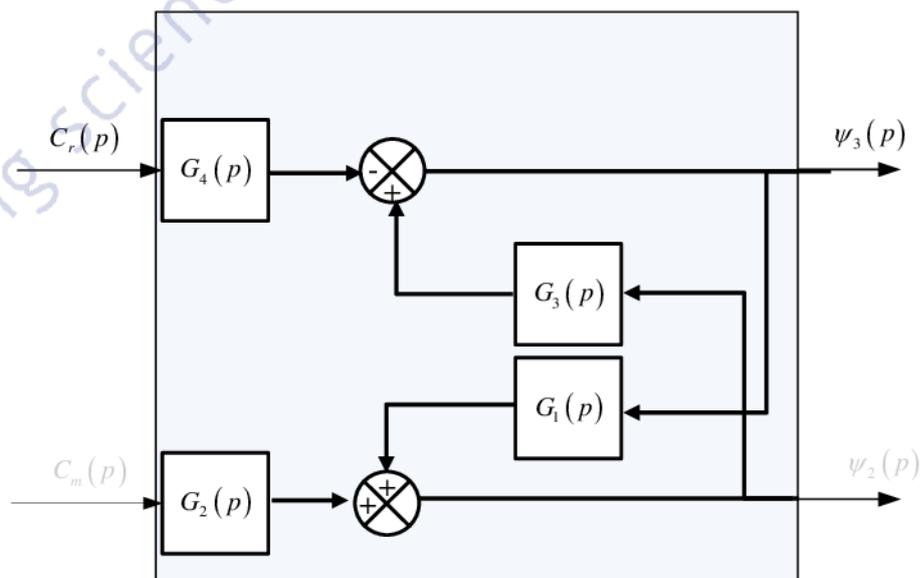
On passe dans le domaine de Laplace :

$$\begin{cases} \frac{C_m}{r} - \frac{J_m}{r^2} p^2 \psi_2 - bp \psi_2 - k(\psi_2 - \psi_3) = J_{ar} p^2 \psi_2 \\ -bp \psi_3 + k(\psi_2 - \psi_3) - C_r = J_{ap} p^2 \psi_3 \\ \frac{C_m}{r} + k \psi_3 = \left(J_{ar} p^2 + \frac{J_m}{r^2} p^2 + bp + k \right) \psi_2 \\ k \psi_2 - C_r = \left(J_{ap} p^2 + bp + k \right) \psi_3 \end{cases}$$

On en déduit les expressions des fonctions $G_i(p)$ demandées :

$$\begin{cases} G_1(p) = \frac{1}{\left(J_{ar} + \frac{J_m}{r^2} \right) \frac{1}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1} \\ G_2(p) = \frac{1/(rk)}{\left(J_{ar} + \frac{J_m}{r^2} \right) \frac{1}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1} \\ G_3(p) = \frac{1}{\frac{J_{ap}}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1} \\ G_4(p) = \frac{1/k}{\frac{J_{ap}}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1} \end{cases}$$

II. 23 Sur le document réponse DR 1, proposer une modélisation sous forme de schémas blocs du comportement de l'axe. Les entrées sont $C_m(p)$ et $C_r(p)$, les sorties sont $\psi_2(p)$ et $\psi_3(p)$ et les fonctions de transfert intervenant sont $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$ et $G_4(p)$.



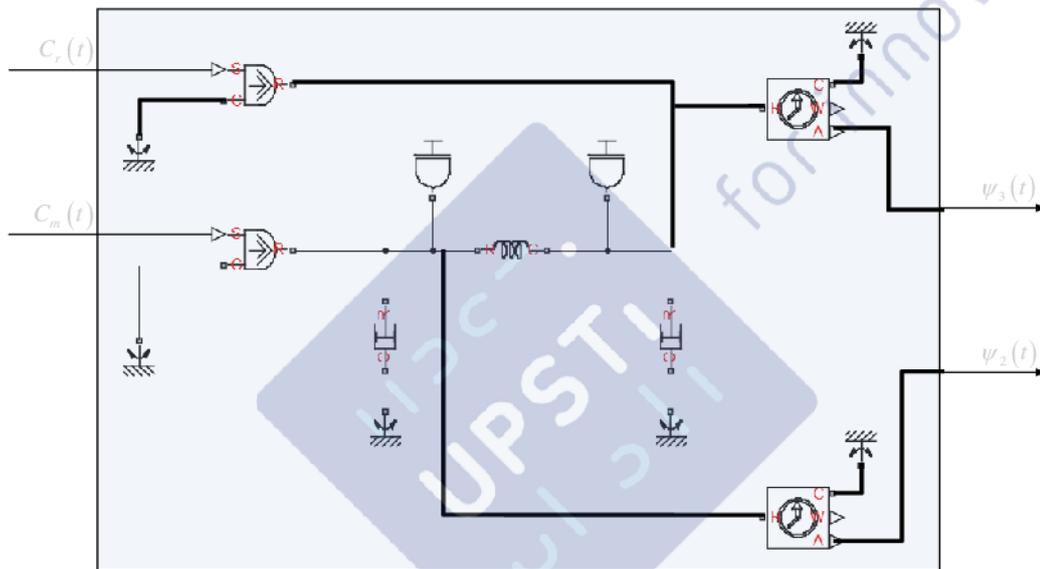
II. 24 Quel modèle peut-on associer aux connexions du domaine « mécanique de rotation » ?

On peut associer un modèle de solide indéformable en rotation aux connexions « carrées » du domaine « mécanique de rotation ». Le logiciel aura donc besoin de 2 valeurs sur chaque lien (moment de force et vitesse de rotation).

Les connexions « triangulaires » sont simplement des valeurs numériques.

II. 25 Sur le document réponse DR 1 compléter le modèle de l'axe par composants en ajoutant les connexions du domaine « mécanique de rotation » nécessaires :

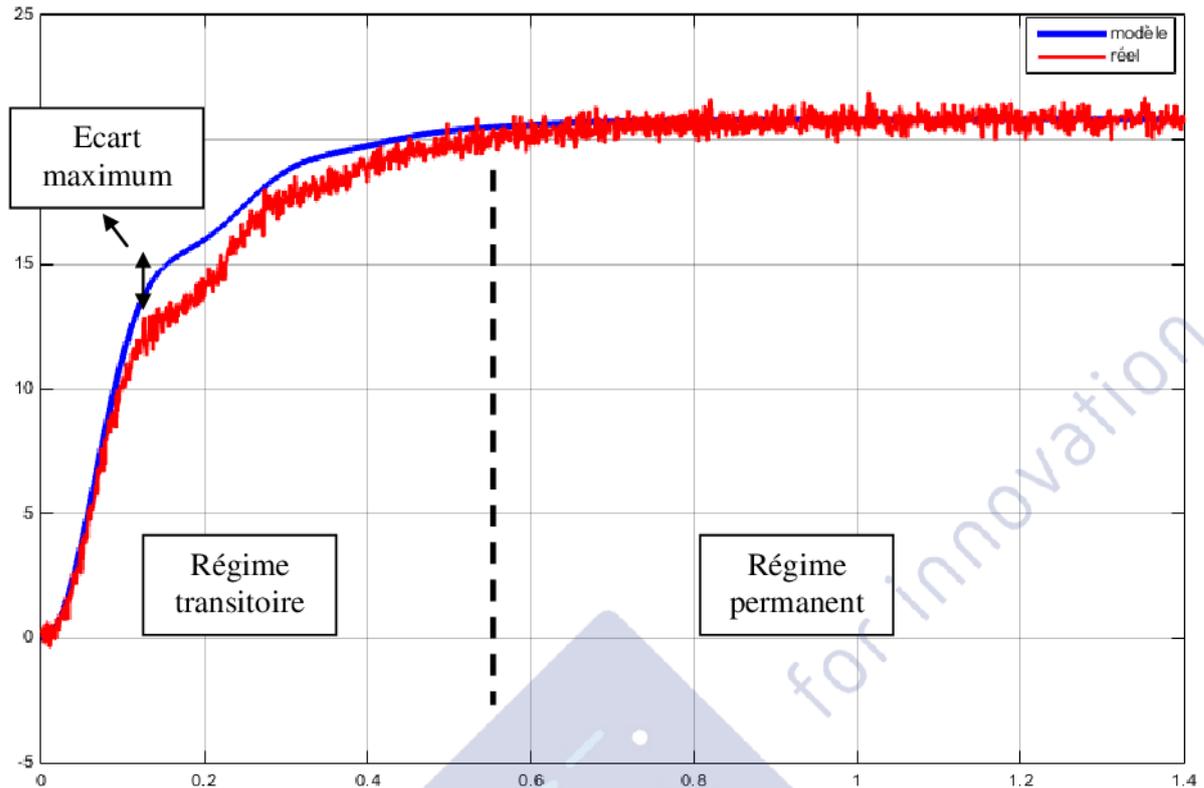
- pour prendre en compte la perturbation due au couple résistant C_r
- pour implanter les capteurs de position angulaire permettant de relever les angles $\psi_2(p)$ et $\psi_3(p)$



Le couple C_r doit être négatif ici.

Remarque : ce modèle ne comporte que 2 arbres (cf les 2 inerties) alors que le modèle en comporte 3 (m, ar et ap)...

II. 26 Caractériser les écarts entre les performances mesurées et les performances modélisées en analysant séparément le régime transitoire et le régime permanent. Préciser les paramètres du modèle qui pourraient être remis en cause.



Le régime transitoire dure environ 0,6s. Durant cette période, l'écart entre le modèle et le réel augmente jusqu'à environ 2m/s puis diminue. Ensuite l'écart tend à s'annuler dans le régime permanent. L'écart statique sur la vitesse est donc nul.

Pour diminuer l'écart durant le régime transitoire, on peut remettre en cause :

- la valeur du coefficient de frottement visqueux dans les liaisons pivot,
- le type de frottement (on peut par exemple rajouter du frottement sec),
- la valeur des inerties, ...

II. 27 Donner les expressions des fonctions de transfert K_1 , K_2 , K_3 et K_4 qui apparaissent dans le schéma bloc partiel du document réponse DR 2 (ce document réponse sera complété en V.2)

Le pignon de l'arbre ap roule sans glisser sur le bâti 0. On a donc : $\lambda = R_p \cdot \psi_3$.

La force contre électromotrice s'exprime par : $e = K_e \cdot \dot{\psi}_2$. Par conséquent $K_2 = K_e \cdot p$.

On suppose que m(p) correspond à la mesure du capteur linéaire. Ainsi, $K_3 = K_{capt}$.

Le conditionneur K_1 permet d'avoir une consigne comparable à la sortie du système. On doit donc avoir $K_1 = K_3 = K_{capt}$.

Résumé :

$$\begin{cases} K_1 = K_{capt} \\ K_2 = K_e \cdot p \\ K_3 = K_{capt} \\ K_4 = R_p \end{cases}$$

II. 28 Préciser l'opération à effectuer sur le banc de test pour que le couple résistant neutralisé sur le moteur n'agisse pas sur le système réel ?

Je pense qu'ici le compositeur du sujet voulait dire « le couple résistant neutralisé sur le **modèle** ».

Il suffit ici de désaccoupler le pignon de la crémaillère sur le système réel.

II. 29 Pour les réponses de la Figure 18, évaluer les écarts relevés entre les temps de réponse à 5% du modèle et du système réel. Quel phénomène est à l'origine des écarts constatés ? Justifier.

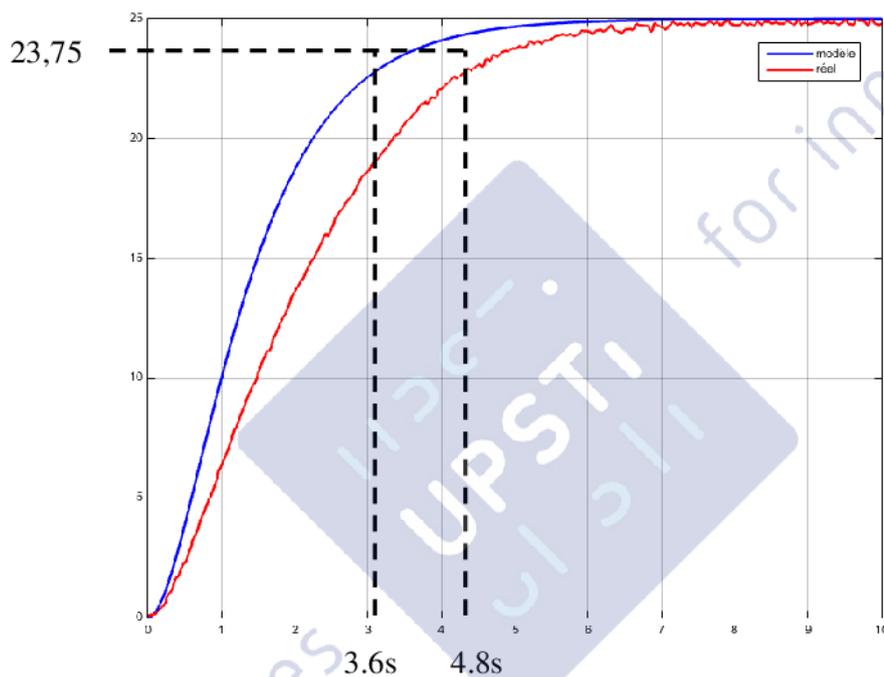


Figure 2 : position en mm de l'axe en fonction du temps en s, consigne 25 mm

Le modèle ne prend pas en compte la saturation du moteur. Le modèle est donc nécessairement plus rapide que le système réel.

II. 30 Pour les réponses de la Figure 19, évaluer les écarts entre la précision du système réel et celle du modèle. Identifier le phénomène qui est à l'origine des écarts constatés ? Justifier.

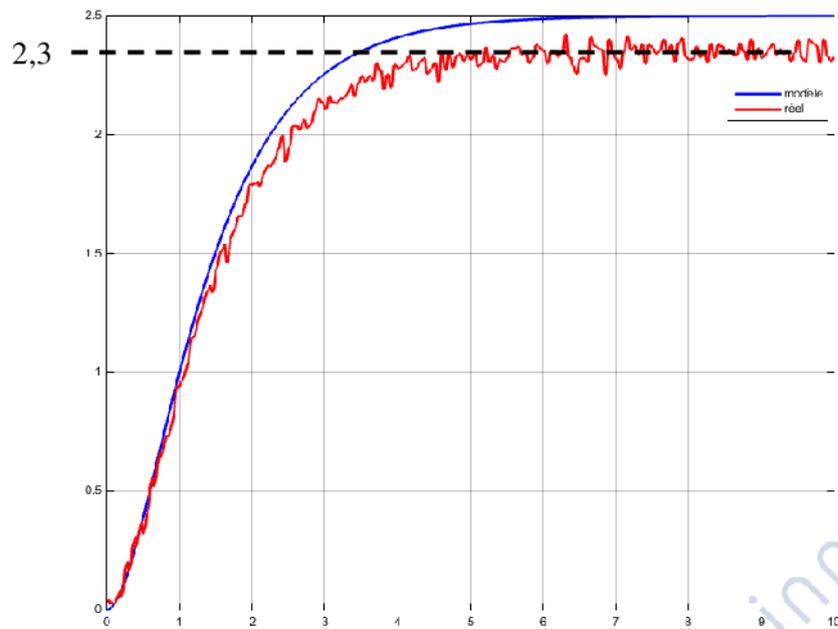


Figure 3 : position en mm de l'axe en fonction du temps en s, consigne 2.5 mm

Le modèle ne prend pas en compte la tension de seuil du moteur. Cette tension de seuil correspond principalement à du frottement sec sur l'axe du rotor. Le modèle est donc précis alors que le système réel ne l'est pas.

II. 31 Donner les pistes d'amélioration du modèle de l'asservissement pour diminuer les écarts constatés.

Il serait judicieux d'ajouter les phénomènes (non linéaires) de seuil et de saturation. Le calcul théorique dans le domaine de Laplace ne serait alors plus possible, mais une résolution numérique des équations différentielles donnera une approximation du résultat.

II. 32 Relever les marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode de la Figure 20. Conclure sur la performance de rapidité du modèle de l'asservissement ?

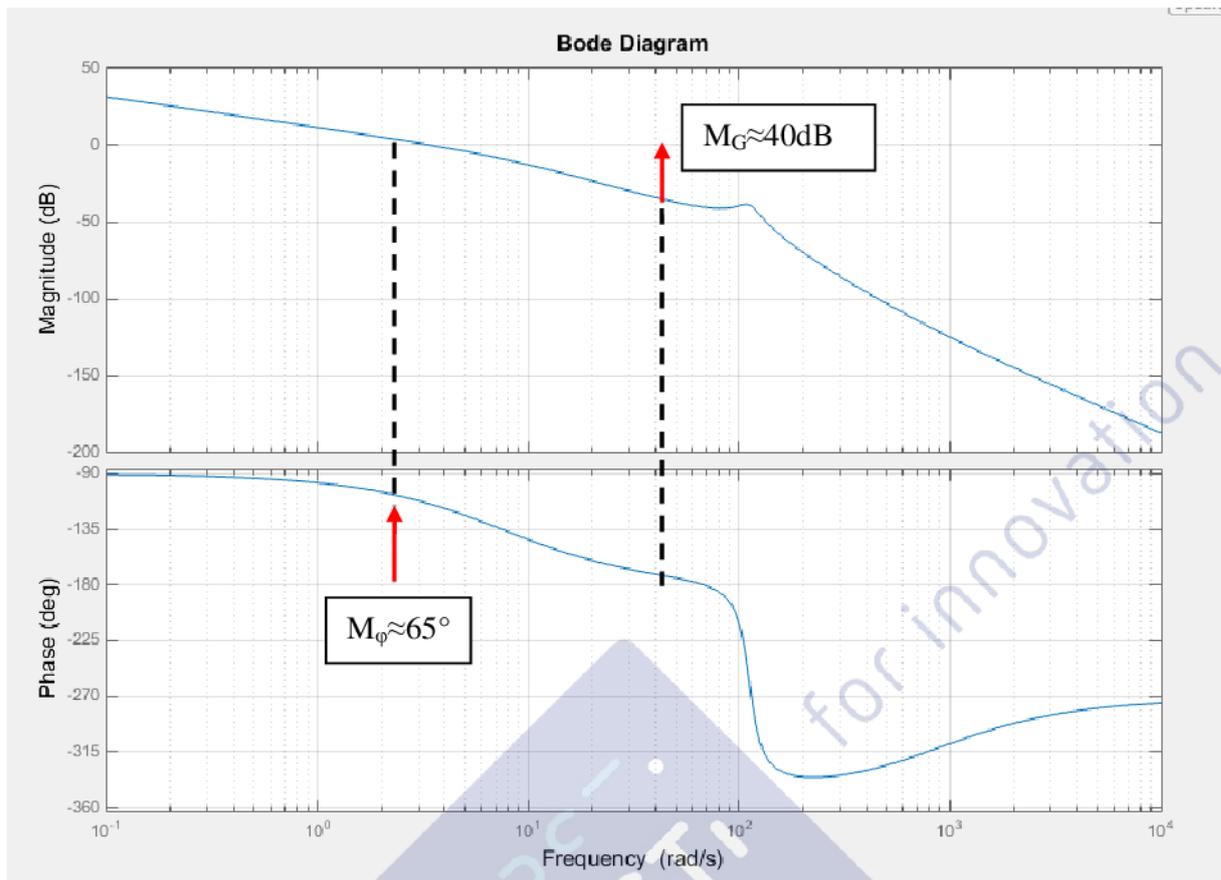


Figure 4 : diagramme de Bode de $H_{BO}(p) = \frac{m(p)}{\varepsilon(p)}$ avec $H_{cor}(p) = 1$

On ne peut parler que de stabilité et non de rapidité à partir des marges de stabilité.

La stabilité est satisfaisante au regard du cahier des charges. On a bien $M_G > 15\text{dB}$ et $M_\phi > 50^\circ$.

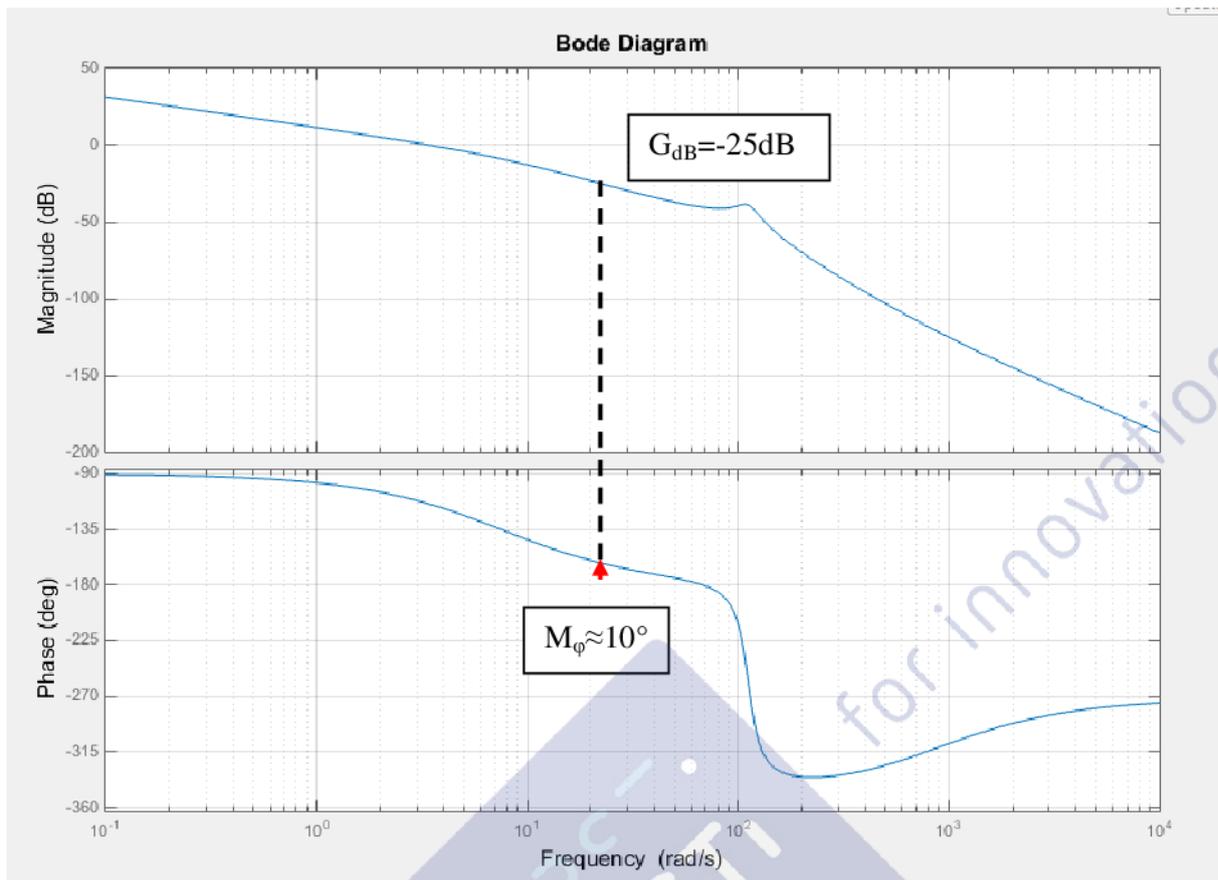
Par contre, en regardant la réponse du système à la question II.30, on voit que le temps de réponse n'est pas satisfaisant. Un correcteur est donc nécessaire.

Correction proportionnelle

II. 33 Quelle expression doit vérifier K_{cor} afin de régler la marge de gain à exactement 15dB ? Préciser alors la marge de phase obtenue.

Il faut remonter la courbe de gain de 25dB.

$$20 \log K_{cor} = 25 \Leftrightarrow K_{cor} = 10^{25/20} \approx 17.8$$



La marge de phase n'est plus suffisante !

II. 34 Une simple correction proportionnelle est-elle envisageable compte tenu des performances préconisées par le cahier des charges en termes de précision ? Justifier.

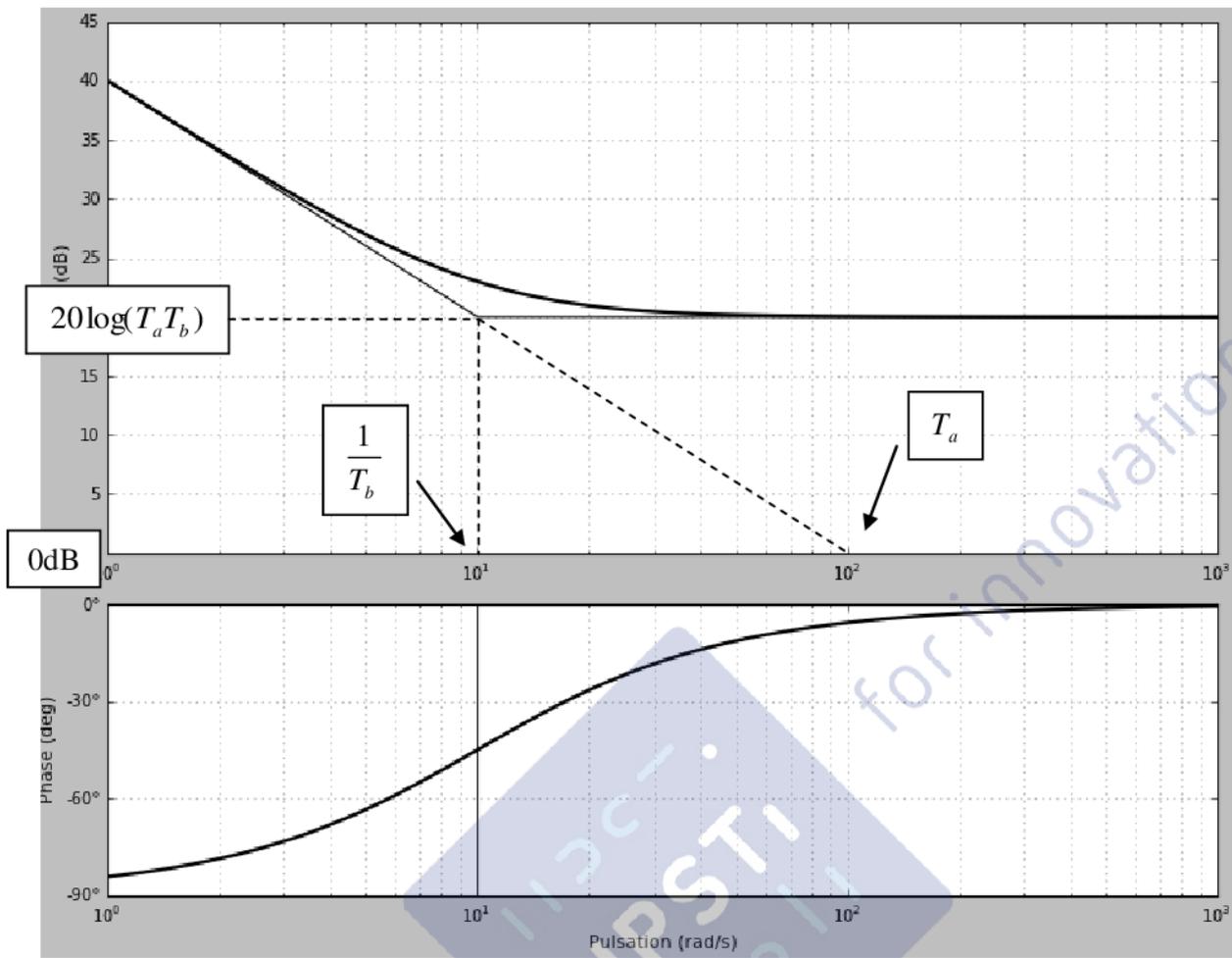
Oui, le cahier des charges n'impose pas un écart statique nul. Une correction proportionnelle pourrait suffire pour l'exigence de précision mais il faudra quand même le valider.

Correction proportionnelle et intégrale

II. 35 Justifier le choix de ce type de correcteur. Tracer le diagramme asymptotique de Bode de gain et de phase du correcteur, esquisser le diagramme réel. Le diagramme sera tracé en prenant $T_a > \frac{1}{T_b}$.

L'axe correspondant à la valeur 0dB du gain sera visible et les pulsations T_a et $\frac{1}{T_b}$ seront placées sur cet axe.

Quand le système a un écart statique constant, augmenter la classe du système permet d'annuler cet écart statique.



II. 36 Proposer une démarche permettant de choisir les valeurs de T_a et T_b afin de satisfaire les exigences du cahier des charges en termes de précision, rapidité et stabilité. Les valeurs numériques de T_a et T_b ne sont pas demandées.

Le correcteur choisi a une action à basse fréquence et retire jusqu'à 90° de phase. Pour les hautes fréquences il se comporte comme un correcteur proportionnel. La pulsation $\frac{1}{T_b}$ doit alors être petite pour augmenter la précision et garder les marges de stabilité. On peut alors régler le gain $T_a T_b$ autour de 1 afin de garder une marge de phase suffisante, puis prendre une valeur $\frac{1}{T_b}$ très faible par rapport aux pulsations des marges de gain et de phase (par exemple $T_b=100\text{s}$ et $T_a=0.01\text{s}^{-1}$).

II. 37 Analyser la réponse du modèle et évaluer les écarts entre les performances spécifiées et les performances modélisées. Conclure.

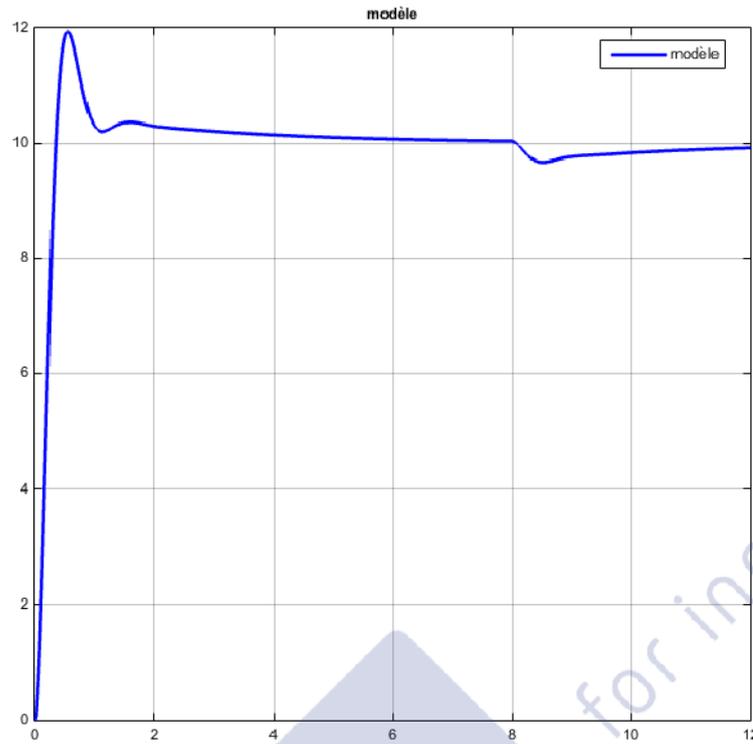


Figure 5 : réponse indicielle en position (mm) du modèle corrigé avec perturbation (temps en s)

Exigences	Critères		
Précision	Ecart statique	<1 mm pour une consigne de 10 mm	Ecart nul → OK
Rapidité	$T_{r5\%}$	<1.2 s pour une consigne de 10 mm	Environ 1s → OK
Amortissement	Dépassement	<20%	Environ 20% → OK

De plus, le système n'est pas perturbé par un échelon en régime permanent. Il répond bien aux attentes du cahier des charges.

IV Intégration, vérification

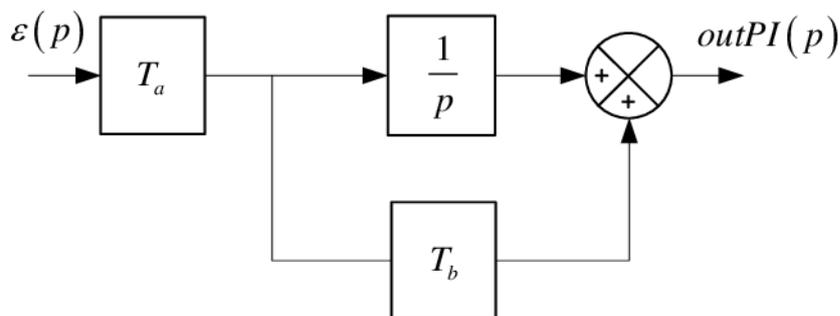


Figure 6 : structure de correcteur PI classique

IV. 1 Compte tenu de la structure du correcteur utilisé représenté sur la Figure 24, expliquer comment évolue la variable $outPI(t)$, durant la période $t \in [0; 1,15]s$. On fera l'hypothèse que l'erreur $\varepsilon(t) = e_0$ est constante pendant cet intervalle. Expliquer alors les écarts constatés entre les performances modélisées et les performances mesurées observables sur la Figure 22.

$$outPI(p) = \varepsilon(p) \cdot T_a \left(\frac{1}{p} + T_b \right)$$

En repassant dans le domaine temporel on trouve :

$$outPI(t) = T_a \cdot \left(\int_0^t \varepsilon(t) dt + T_b \varepsilon(t) \right) = T_a \cdot \left(\int_0^t e_0 dt + T_b e_0 \right) = T_a \cdot e_0 \cdot (t + T_b)$$

L'évolution de $outPI(t)$ est linéaire. Il y a donc de fortes chances qu'il atteigne la tension seuil d'environ 140V (cf figure 23). Ainsi, la valeur du correcteur serait plus petite que ce qu'elle devrait. Le système réagira plus lentement et dépassera plus la consigne.

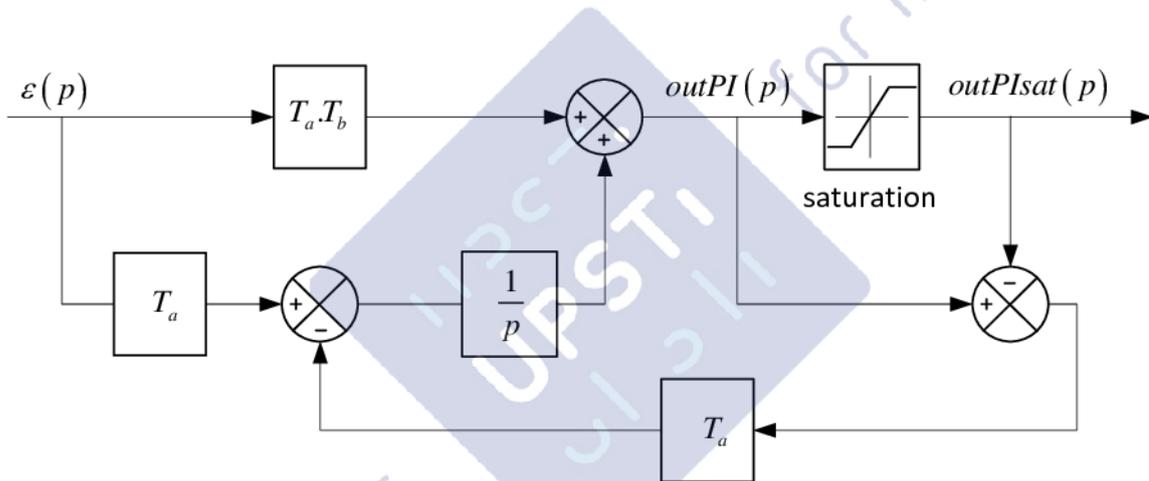


Figure 7 : structure de correcteur PI avec anti windup

IV. 2 Donner l'expression de $outPI(p)$ en fonction de $\varepsilon(p)$ et de $outPIsat(p)$. En faisant l'hypothèse que durant la période de saturation, l'erreur $\varepsilon(t) = e_0$ est constante et $outPIsat(t) = V_{sat}$, conclure quant à l'intérêt d'utiliser cette méthode de correction.

D'après le schéma bloc :

$$outPI(p) = \varepsilon(p) T_a T_b + \frac{1}{p} (T_a \varepsilon(p) - T_a (outPI(p) - outPIsat(p)))$$

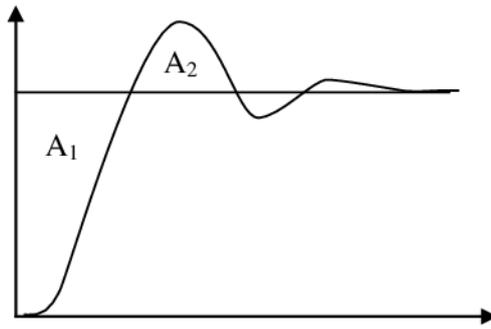
$$outPI(p) \left(1 + \frac{T_a}{p} \right) = T_a \left(\varepsilon(p) \left(T_b + \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} outPIsat(p) \right)$$

$$outPI(p) = \left(\frac{T_a}{p + T_a} \right) \left((1 + T_b p) \varepsilon(p) + outPIsat(p) \right)$$

La partie intégrale du correcteur sans anti windup va constamment ajouter les erreurs (même pendant la période transitoire durant laquelle l'erreur est grande). La consigne envoyée au moteur va vite devenir énorme (voire saturée) et ne plus être représentative de l'écart à annuler. La sortie



outPI va avoir un premier dépassement assez grand pour essayer de compenser l'erreur négative de la phase transitoire (égaliser les aires A_1 et A_2 sur le graphique ci-dessous) :



Le correcteur avec anti windup rajoute un deuxième bouclage qui revient se soustraire sur la branche « intégrale » du correcteur. Ceci diminue l'influence de l'intégration du correcteur si la commande du moteur est saturée.

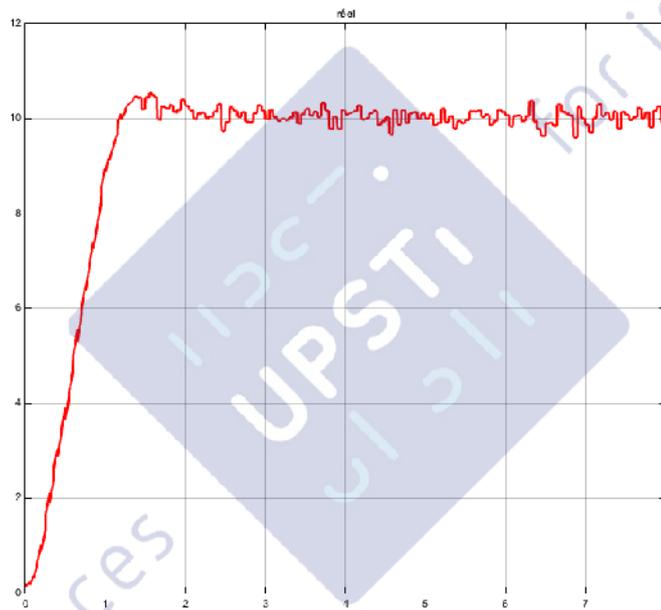


Figure 8 : réponse de l'asservissement réel (en mm) avec correction anti windup (temps en s)

IV. 3 Evaluer les écarts entre les performances spécifiées et les performances mesurées. Conclure.

Le dépassement est maintenant beaucoup plus petit (environ 5%). Les autres exigences du cahier des charges n'ont pas changé.

Exigences	Critères		
Précision	Ecart statique	<1 mm pour une consigne de 10 mm	Ecart nul → OK
Rapidité	$T_{r5\%}$	<1.2 s pour une consigne de 10 mm	Environ 1s → OK
Amortissement	Dépassement	<20%	Environ 5% → OK

Le comportement du système a été amélioré pour chaque exigence.

Fiabilisation de la mesure

IV. 4 *Que représentent les valeurs 0 et 1 que peuvent prendre les variables internes cap1 et cap2 ?*

La variable **cap1 correspond à l'état du capteur 1**. Si il fonctionne correctement, la machine d'état reste dans l'état 'actif1' et la variable cap1 reste à 1. Si un défaut est détecté sur le capteur 1 (def1=1), on active l'état 'Défaut1'. La variable cap1 passe à 0. Puis on réactive indéfiniment l'état 'Défaut1' si def1 reste égale à 1.
Idem pour la variable cap2.

IV. 5 *Préciser le rôle des variables internes i1 et i2 ?*

Les variables i1 et i2 sont des compteurs qui permettent une petite temporisation avant de remettre en service un capteur.

IV. 6 *Donner l'expression de la variable « mesure » dans les cas suivants :*

- *Si les deux capteurs ne sont pas en défaut :* $mesure = \frac{capteur1 + capteur2}{2}$
- *Si le capteur 1 présente un défaut :* $mesure = capteur2$
- *Si le capteur 2 présente un défaut :* $mesure = capteur1$
- *Si les deux capteurs sont en défaut :* *La variable mesure ne sera pas calculée. En effet si cap1=0 et cap2=0, alors on ne passera jamais la transition (cap1=0 et cap2=1). L'état 4 ne sera jamais atteint. Pour avoir un comportement correct, il faudrait modifier la transition (cap1=0 et cap2=1) par (cap1=0).*

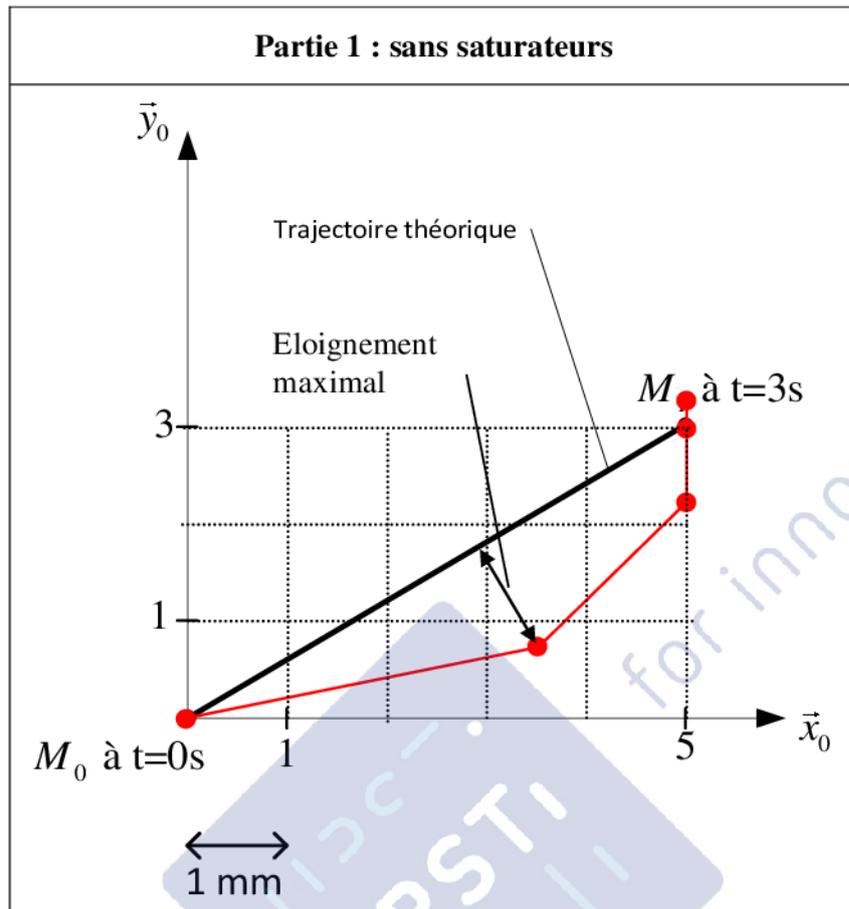
IV. 7 *Quelle durée s'écoule entre l'instant où def1 passe de la valeur 1 à la valeur 0 et l'instant où la mesure issue du capteur 1 est exploitée ?*

Le pas de calcul est de 0.01s. La variable i1 doit passer de 1 à 10 en l'incrémentant à chaque pas de calcul. La machine d'état repassera à l'état 'actif1' **0.09s** après le passage à 0 de la variable def1. Les mesures étant effectuée tous les centièmes de secondes, la mesure suivante sera **0.01s** plus tard.

Au final, la mesure du capteur 1 sera exploitée **0.1s** après le passage à 0 de la variable def1.

V Validation

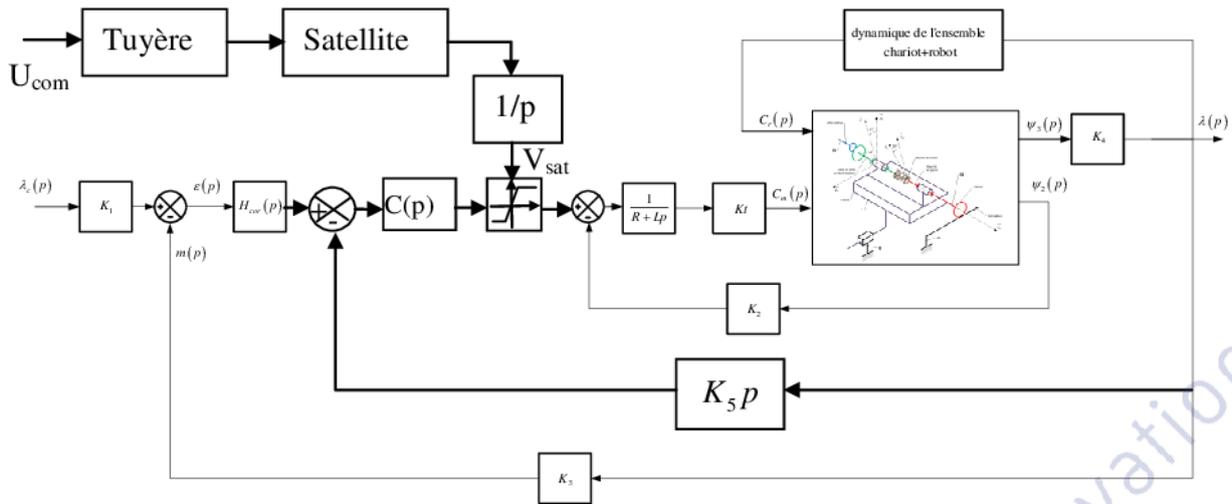
V. 1 *Sur le document réponse DR 3 (partie 1), tracer la trajectoire effective du satellite chasseur. Un point sera représenté toutes les 0,5 s. Indiquer sur chaque point représenté l'instant correspondant. Déterminer l'éloignement maximal par rapport à la trajectoire théorique. Le cahier des charges est-il validé ? Justifier.*



L'éloignement maximal vaut environ 1.4mm. L'éloignement maximal dépasse la limite de 1mm donnée par le cahier des charges.

De plus cette mesure n'est pas totalement correcte car nous n'avons pris que 6 points. Si on avait pu tracer tous les points issus des figures 30 et 31, l'éloignement aurait été encore un peu plus grand (cf le point aux alentours de 0.65s au minimum local de Δ_y).

V. 2 Sur le document DR 2, mettre en place la boucle de retour tachymétrique et le saturateur piloté. Le gain de la boucle de retour tachymétrique sera noté K_5 .



Représentation du bloc saturateur à insérer

V. 3 Calculer la valeur maximale V_{max} de la vitesse atteinte par le satellite. En déduire l'expression de la consigne à implanter dans le saturateur de l'axe X.

L'effort F_i généré par les tuyères peut être supposé constant et égal à 35N pendant 0.3s.

L'accélération du satellite vaut $\Gamma_{sat} = \frac{F_i}{M_s} = \frac{35}{800} = 0.044m.s^{-2}$.

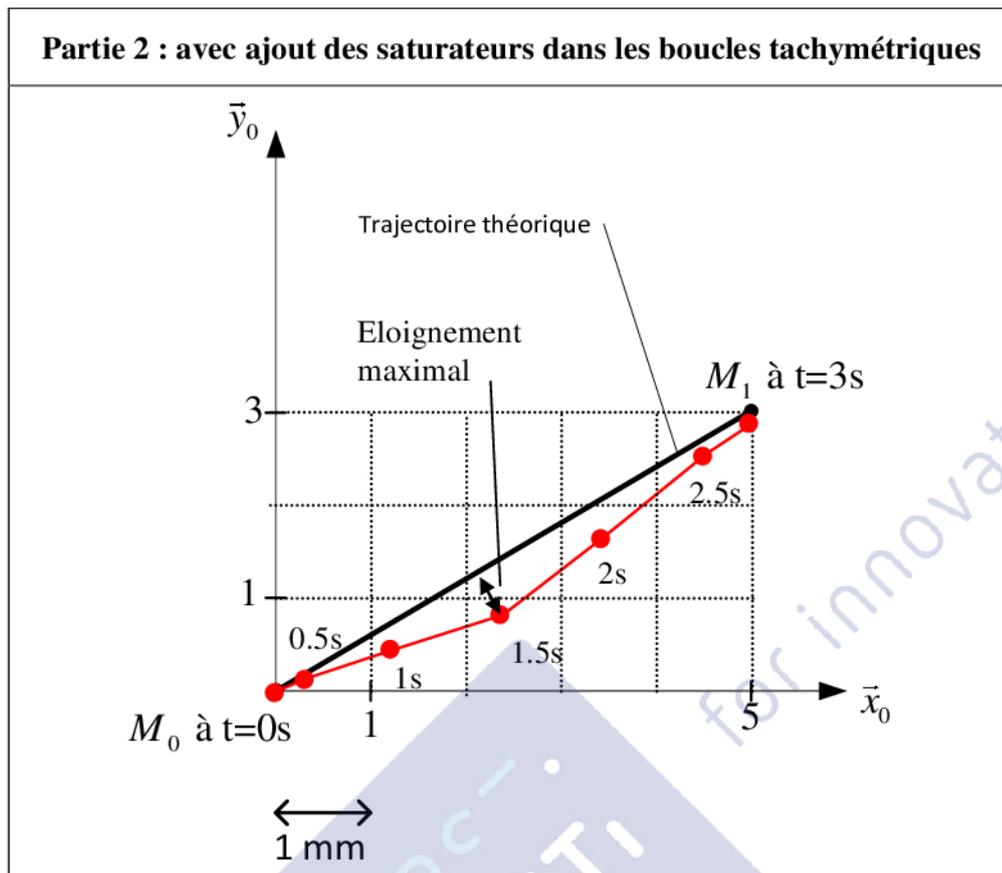
Si on suppose que la vitesse initiale du satellite est nulle, on trouve :

$$V_{max} = \Gamma_{sat} \cdot t = 0.044 * 0.3 = 0.013m.s^{-1}$$

La vitesse max calculée est la vitesse V_{sat} à implanter dans le saturateur.

D'après le cahier des charges donné, si on regarde l'exigence de rapidité, on voit que la vitesse moyenne que devra avoir le satellite est d'environ $10mm.s^{-1}$. Or avec une consigne de 12V sur la tuyère pendant 0,7s on arrive à une vitesse maximale de $13mm.s^{-1}$. La consigne proposée semble donc convenir.

V. 4 Sur le document réponse DR 3 (partie 2), tracer la trajectoire effective du satellite chasseur. Un point sera représenté toutes les 0,5 s. Indiquer sur chaque point représenté l'instant correspondant. L'exigence de positionnement est-elle validée ? Justifier.



L'éloignement maximal est d'environ 0.6mm. Il est bien inférieur à 1mm, donc le cahier des charges est respecté.