

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2019

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

## CCP – PSI – Modélisation – 2019

**Q1. Vitesse nulle** : On suppose que l'hélice met en mouvement le fluide supposé immobile à l'entrée du tube de courant.

**Puissance des forces intérieures négligée** : le fluide sera supposé parfait (pas de force de viscosité).

**Variation d'énergie potentielle** : Il s'agit de comparer les variations d'énergie cinétique

$\frac{1}{2} \rho v_s^2$  et  $\rho g \Delta h$ . En prenant  $v_s = 10 \text{ m s}^{-1}$  et  $\Delta h = 0,2 \text{ m}$  nous trouvons  $\frac{1}{2} \rho v_s^2 = 60 \text{ (J)}$  et  $\rho g \Delta h = 2 \text{ (J)}$ . La variation d'énergie potentielle est environ 25 fois plus faible que la variation d'énergie cinétique.

**Q2.** En utilisant les relations données dans le sujet :

$$P_m = \frac{1}{2} D_m v_s^2 \quad \text{ce qui permet d'écrire } P_m = \vec{F} \cdot \vec{v}_h = D_m v_s v_h \quad \text{et donc } v_h = \frac{v_s}{2}$$

$$\vec{F} = D_m \vec{v}_s$$

**Q3.** En constatant que  $D_m = \rho S v_f$ , on obtient  $F = 2 \rho S v_f^2$  et  $P_m = 2 \rho S v_f^3$ . Ces deux équations

fournissent  $v_f = \sqrt{\frac{F}{2 \rho S}}$  et donc  $P_m = \frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 \rho S}}$ .

$\vec{F}$  étant la force exercée par l'hélice sur le fluide,  $\vec{\Pi} = -\vec{F} = -F \vec{z} = -\left(2 \rho S P_m^2\right)^{\frac{1}{3}} \vec{z}$ .

**Q4.** Inventaire des actions mécaniques exercées sur le système S=drone et cordon :

- Action mécanique via la liaison pivot d'axe  $(G, \vec{z}_0)$  : le moment en G selon l'axe  $\vec{z}_0$  est nul

$$\{F_{0 \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0}$$

- Action mécanique de la pesanteur qui s'applique au point G (la masse du cordon est négligée)

- La force de sustentation, modélisée par un glisseur en M :  $\{F_{sustentation \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} \Pi \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$

- La force exercée par la balance, modélisée par un glisseur en B :  $\{F_{balance \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} -F_c \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

On applique donc le théorème du moment statique (le système S est à l'équilibre) au point G en projection selon  $\vec{z}_0$  au système S :

$$\Pi L - F_c L \cos \alpha = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\Pi = F_c \cos \alpha}$$

**Q5.** On réalise donc un développement limité de  $\cos \alpha$  en 0 :

$$\Pi = F_c \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2) \right) = F_c - F_c \frac{\alpha^2}{2} + o(F_c \alpha^2)$$

A l'ordre 2, nous avons donc une erreur relative estimée par :  $\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2} = 0,38\%$ . Avec une erreur inférieure à 1%, on peut considérer le protocole de mesure comme valide.

**Q6.** Les points de mesure fournis permettent de modéliser le comportement comme affine. Une identification sur le graphique permet d'obtenir :

$$\ln(P_e) = 1,3 \ln(\Pi) + 2,25$$

La formule donnée donne  $\ln(P_e) = \ln(k) + q \ln(\Pi)$  donc  $\boxed{\begin{matrix} q = 1,3 \\ k = 9,5 \end{matrix}}$

A la question 3, nous avons trouvé  $\boxed{q = 1,5}$ . L'écart entre les deux peut s'expliquer par la prise en compte du rendement de la chaîne électrique (driver moteur ECS + moteur). En effet, à la question 3, la force est estimée par la puissance mécanique, alors qu'elle est ici reliée à la puissance électrique en entrée.

**Q7.** On suppose que seuls les moteurs consomment de la puissance.

En vol stationnaire, les moteurs permettent de contrer l'action mécanique de pesanteur, donc

$$\Pi = \frac{mg}{4} \text{ puisqu'il y a 4 moteurs.}$$

Or, on a vu précédemment que  $P_e = k\Pi^q$ , donc la puissance totale consommée en régime

$$\text{stationnaire s'écrit : } P_{stat} = 4P_e = 4k \left( \frac{mg}{4} \right)^q$$

La puissance électrique totale s'écrit aussi :  $P_{stat} = UI$ , sachant que la force électromotrice est

$$\text{supposée constante. De plus, } Q = I\Delta t \text{ donc } 4k \left( \frac{mg}{4} \right)^q = U \frac{Q}{\Delta t}$$

$$\text{Ainsi, nous pouvons obtenir : } \Delta t = \frac{UQ}{4k \left( \frac{mg}{4} \right)^q} = \frac{11,1 \times 2,7 \times 3600}{4 \times 9,5 \times \left( \frac{0,5 \times 9,81}{4} \right)^{1,3}} = 2178s = 36,3\text{min}$$

**Q8.** La flexibilité de l'élastomère et les surfaces de contact conduisent à modéliser chaque plot par une liaison sphère cylindre de centre le centre du plot et d'axe  $\vec{z}_e$ . En effet la rigidité des vis anti-chutes et le faible jeu entre l'élastomère et la vis en position basse permet de négliger les translations associées aux mouvements transversaux et longitudinaux.

Nous avons ainsi une liaison tube-structure étoilée modélisée par 4 liaisons sphère cylindre en parallèle d'axe vertical. **Les degrés de liberté prépondérants sont donc le mouvement vertical et les mouvements de roulis et de tangage.** Ceci est conforme à la suite de l'étude, car seul le mouvement vertical est étudié en II.3 puis les trois degrés de liberté prépondérants en II.4.

**Q9.** Sous charge statique axiale maximale, nous avons une hauteur  $h=25$  mm contre une longueur à vide  $H=42$  mm. La course du plot choisi est donc de 17 mm, pour un effort axial maximal de  $2,5 \text{ daN}=25$  N. La raideur d'un plot est donc de **1470 N/m**.

**Q10.** Les 4 plots sont en parallèle, les raideurs s'additionnent donc, ainsi que les coefficients de frottement visqueux, ainsi :  
**K=6 kN/m**

**C=4 kg/s**

**Q11.** On isole le tube, et on écrit le théorème de la résultante statique (équilibre) selon  $\vec{z}$ . Il vient alors :

$$-Mg + K(l_0 - z_0) = 0 \text{ donc } \boxed{z_0 = l_0 - \frac{Mg}{K}}$$

**Q12.** Système isolé : le tube

Inventaire des actions mécaniques extérieures : pesanteur, force d'excitation, ressort et amortisseur

Théorème appliqué : théorème de la résultante dynamique selon  $\vec{z}$

$$M\ddot{z}(t) = -Mg + f(t) - K(z_0 + z(t) - l_0) - C\dot{z}(t) = f(t) - Kz(t) - C\dot{z}(t)$$

Soit l'équation différentielle demandée :

$$M\ddot{z}(t) + Kz(t) + C\dot{z}(t) = f(t)$$

**Q13.** On passe donc dans le domaine de Laplace :

$$Mp^2 Z(p) + KZ(p) + CpZ(p) = F(p) \text{ donc } \boxed{\frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + Cp + K}}$$

On met alors cette fonction sous la forme canonique :

$$\boxed{\frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{C}{K}p + \frac{M}{K}p^2}} \text{ et on identifie : } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2} \frac{C}{K} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{C}{2\sqrt{KM}}}$$

**Q14.** La pulsation de résonance donnée et la pulsation classique d'un système du second ordre.

On estime d'après les valeurs numériques  $\boxed{\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}} = 0,047}$

Ce coefficient d'amortissement est très faible, et la pulsation de résonance est quasiment égale à la

pulsation propre  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = 141 \text{ rad/s} = 22,5 \text{ Hz}}$ .

Cette fréquence est en dessous de la fréquence du premier mode propre de la structure étoilée. Pour positionner cette résonance, le concepteur peut donc agir sur les paramètres physiques C (coefficient

de viscosité) qui a été négligé avec l'amortissement dans le calcul de  $\omega_r$  dans l'application numérique faite ici mais qui avec une influence importante sur le résultat, K (raideur des plots) et M (masse du tube).

**Q15.** D'après la figure 16,  $\tan \varphi = \frac{-z_A^{\tan \text{ gage}}}{\frac{b}{2}}$  donc au premier ordre :  $z_A^{\tan \text{ gage}} = -\frac{b}{2}\varphi$

De même,  $z_A^{\text{roulis}} = \frac{a}{2}\theta$

**Q16.** Nous réalisons un bouclage géométrique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_e A_T'} &= \overrightarrow{A_e O_e} + \overrightarrow{O_e O_T'} + \overrightarrow{O_T' A_T'} = -\frac{b}{2}\vec{x}_e - \frac{a}{2}\vec{y}_e + (z_0 + z(t))\vec{z}_e + \frac{b}{2}\vec{x}_T + \frac{a}{2}\vec{y}_T \\ &= -\frac{b}{2}\vec{x}_e - \frac{a}{2}\vec{y}_e + (z_0 + z(t))\vec{z}_e + \frac{b}{2}(\cos \varphi \vec{x}_e - \sin \varphi \vec{z}_e) \\ &\quad + \frac{a}{2}(\cos \theta \vec{y}_e + \sin \theta (\cos \varphi \vec{z}_e + \sin \varphi \vec{x}_e)) \end{aligned}$$

On peut linéariser au premier ordre en  $\theta, \varphi$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_e A_T'} &\approx -\frac{b}{2}\vec{x}_e - \frac{a}{2}\vec{y}_e + (z_0 + z(t))\vec{z}_e + \frac{b}{2}(\vec{x}_e - \varphi \vec{z}_e) + \frac{a}{2}(\vec{y}_e + \theta(\vec{z}_e + \varphi \vec{x}_e)) \\ &\approx -\frac{b}{2}\vec{x}_e - \frac{a}{2}\vec{y}_e + (z_0 + z(t))\vec{z}_e + \frac{b}{2}(\vec{x}_e - \varphi \vec{z}_e) + \frac{a}{2}(\vec{y}_e + \theta \vec{z}_e) \\ &\approx (z_0 + z(t))\vec{z}_e - \frac{b}{2}\varphi \vec{z}_e + \frac{a}{2}\theta \vec{z}_e \approx \left(z_0 + z(t) - \frac{b}{2}\varphi + \frac{a}{2}\theta\right)\vec{z}_e \end{aligned}$$

Ainsi :  $\vec{R}_{plotA \rightarrow T} \approx -k \left(z(t) - \frac{b}{2}\varphi + \frac{a}{2}\theta\right)\vec{z}_e$

**Q17.** Le solide possède le plan de symétrie  $(G, \vec{x}_T, \vec{z}_T)$  donc la matrice d'inertie est de la forme :

$$\overline{I_G(T)} \approx \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_T, \vec{y}_T, \vec{z}_T)} \quad \text{ce qui justifie les valeurs numériques proposées par Solidworks.}$$

De plus, on peut quasiment considérer que le plan  $(G, \vec{y}_T, \vec{z}_T)$  est un plan de symétrie, ce qui justifie la faiblesse de la valeur numérique de E. On pourrait à la limite considérer que le tube est cylindrique (la dénomination tube semble appropriée pour cela) d'axe  $(G, \vec{x}_T)$  et dans ce cas l'allure la matrice serait :

$$\overline{I_G(T)} \approx \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\vec{x}_T, \vec{y}_T, \vec{z}_T)} \quad \text{ce qui numériquement est quasiment le cas.}$$

**Q18.**

Equation	Théorème appliqué au tube
4	TRD en projection selon $\vec{z}_T$
5	TMD en G en projection selon $\vec{y}_T$
6	TMD en G en projection selon $\vec{x}_T$

**Q19.** En utilisant les notations proposées, nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_m e^{j\omega t} \\ \dot{u}(t) &= j\omega u_m e^{j\omega t} \\ \ddot{u}(t) &= -\omega^2 u_m e^{j\omega t} \end{aligned} \quad \text{avec } u(t) = z(t), \varphi(t) \text{ ou } \theta(t)$$

Ainsi le système d'équations se met sous la forme :

$$\begin{aligned}(-M\omega^2 + 4k)\underline{z}_m e^{j\omega t} &= 0 \\(-B\omega^2 + kb^2)\underline{\varphi}_m e^{j\omega t} &= 0 \\(-A\omega^2 + ka^2)\underline{\theta}_m e^{j\omega t} &= 0\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_m \\ \underline{\varphi}_m \\ \underline{\theta}_m \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_m \\ \underline{\varphi}_m \\ \underline{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

**Q20.** Le déterminant doit être nul donc  $\det \begin{bmatrix} 4k - M\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & kb^2 - B\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & ka^2 - A\omega^2 \end{bmatrix} = 0$  soit

encore :

$$(4k - M\omega^2)(kb^2 - B\omega^2)(ka^2 - A\omega^2) = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}f_z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{M}} \\f_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kb^2}{B}} \\f_\theta &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ka^2}{A}}\end{aligned}$$

**Q21.**

$$f_\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kb^2}{B}} = 29,15 \text{ Hz}$$

Avec  $k=1500\text{N/m}$ ,  $b=0,22\text{m}$  et  $B=2163615 \cdot 10^{-9} \text{ kg.m}^2$

**Q22.** Le mode de Pompage est étudié dans les trois modèles : il est estimé à 22,5 Hz en II.3, comme en II.4, alors que la méthode des éléments finis le donne à 21,7 Hz, ce qui est assez proche. Les modes de Roulis et de Tangage sont estimés respectivement à 13,7 Hz et 29,15 Hz en II.4 alors que la méthode des éléments finis les estime respectivement à 8,8 Hz et 27,2 Hz.

Si on ne compare que II.4 et la méthode des éléments finis, il vient :

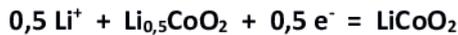
Mode	II.4	Éléments finis	Erreur relative
Pompage	22,5	21,7	3,6%
Roulis	13,7	8,8	36%
Tangage	29,15	27,2	6,7%

**Q23.** Les fréquences propres du tube (Pompage, Roulis et Tangage) sont en dessous de celles de la structure en étoile dont les fréquences propres commencent à 41,8 Hz.  
Les autres fréquences propres du tube déterminées par éléments finis sont au-delà de la fréquence propre maximale de la structure en étoile estimée à 161 Hz.

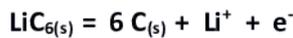
Les exigences du tableau 2 sont donc vérifiées.

**Q24.** Durant la décharge, « la composition du solide cathodique passe de  $\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$  à  $\text{LiCoO}_2$  ».

- La demi-équation électronique à la cathode est donc :



- La demi-équation électronique à l'anode est donc :



Soit aussi  $0,5 \text{LiC}_{6(s)} = 3 \text{C}_{(s)} + 0,5 \text{Li}^+ + 0,5 \text{e}^-$

L'équation-bilan de la réaction est dans ce cas :

- Lors de la décharge :  $0,5 \text{LiC}_{6(s)} + \text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2 = 3 \text{C}_{(s)} + \text{LiCoO}_2$

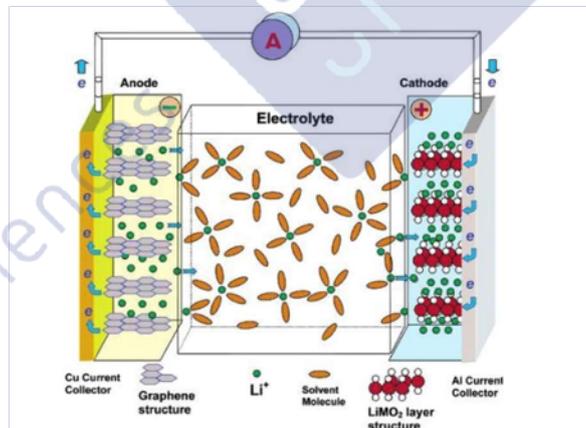


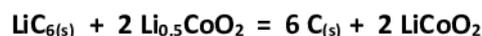
Figure 4 – Principe de fonctionnement de l'accumulateur Lithium-ion en décharge

- Lors de la charge :  $3 \text{C}_{(s)} + \text{LiCoO}_2 = 0,5 \text{LiC}_{6(s)} + \text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$

**Q25.** En prenant les proportions stœchiométriques, il n'y a pas de quantité de matière qui soit présente sans être consommée : on n'alourdit pas inutilement la batterie.

Pour 1 mol d'électron :  $\text{LiC}_{6(s)} = 6 \text{C}_{(s)} + \text{Li}^+ + \text{e}^-$

Pour 1 mol d'électron :  $\text{Li}^+ + 2 \text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2 + \text{e}^- = 2 \text{LiCoO}_2$



Pour faire circuler 1 mol d'électrons, il faut 1 mol de  $\text{LiC}_6$  et 2 mol de  $\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$

Pour un échange de  $n$  mol d'électrons, il faut  $n$  mol de  $\text{LiC}_6$  et  $2n$  mol de  $\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2$

Soit une masse d'accumulateur  $m_{\text{accu}} = n.[M(\text{LiC}_6) + 2.M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)]$

A.N :  $m_{\text{accu}} = n.[6,9 + 6 \times 12,0 + 2 \times (0,5 \times 6,9 + 90,9)]$

$m_{\text{accu}} = 267,6.n$  en g.

**Q26.** La capacité maximale théorique est la quantité d'électricité totale que cet accumulateur peut transférer.

Pour  $n$  mol d'électron, la capacité est égale à  $C_{\text{max}}(n) = n.F$  et la masse de l'accumulateur est  $m_{\text{accu}} = 267,6.n$  g =  $267,6.10^{-3}.n$  kg.

La capacité massique maximale est donc  $C_{\text{max}}(n)/m_{\text{accu}} = n.F/267,6.10^{-3}.n$  kg

Soit, en gardant les masses molaires comme demandé dans l'énoncé :

$$C_{\text{max}}(n)/m_{\text{accu}} = n.F/n.[M(\text{LiC}_6) + 2.M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)]$$

$$C_{\text{max}}(n)/m_{\text{accu}} = F/[M(\text{LiC}_6) + 2.M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)]$$

Comme  $1 \text{ A.h} = 3600 \text{ C}$ , nous avons (nous pouvons omettre  $n$  car cette capacité n'en dépend pas) :

$$q_{\text{max}} = \frac{1}{3600} \frac{F}{M(\text{LiC}_6) + 2.M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)}$$

A.N :  $q_{\text{max}} = \frac{1}{3600} \frac{9,6.10^4}{267,6.10^{-3}}$  soit  $q_{\text{max}} = 99,65 \text{ A.h/kg}$

L'énergie massique sera le produit de cette capacité par la force électromotrice entre les deux électrodes :

$$W_{\text{max}} = \frac{E}{3600} \frac{F}{M(\text{LiC}_6) + M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)}$$

A.N :  $W_{\text{max}} = \frac{3,7}{3600} \frac{9,6.10^4}{267,6.10^{-3}}$  soit  $W_{\text{max}} = 368,7 \text{ W.h/kg}$

**Q27.** Remarquons que  $11,1 \text{ V} = 3 \times 3,7 \text{ V}$  : la batterie 3S du Bebop 2 peut être modélisée par l'association de **3 accumulateurs en série**.

La capacité massique maximale d'un accumulateur  $q_{\text{acc}}$  est donc égale à  $2,7 \text{ A.h}$  pour  $180 \text{ g}$

Soit  $q_{\text{acc}}$  est donc :  $q_{\text{acc}} = 2,7/0,180 = 15 \text{ A.h/kg}$

Nous sommes bien loin encore de la capacité  $q_{\text{max}}$ . Nous pouvons nous en approcher en allégeant la masse de cet accumulateur.

**Q28.** Si l'anode est en lithium pur : il n'y a pas la masse de 6 équivalent de carbone.

Si la masse est l'alliage d'insertion, pour 1 mol de Li, 6C sont remplacés par 0,22 Si ; comparons les masses :

- masse (« 6 C ») =  $6 \times 12,0 = 72 \text{ g}$

- masse (« 0,22 Si ») =  $0,22 \times 28,1 = 6,18 = 6,2 \text{ g}$

→ **72 g contre 6,2 g : le gain de masse est conséquent !**

Adaptée à la question 26, cela donne :

Anode « LiC<sub>6</sub> » :

$$q_{max} = \frac{1}{3\,600} \frac{F}{M(\text{LiC}_6) + 2 \cdot M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)} = \frac{1}{3\,600} \frac{9,6 \cdot 10^4}{267,6 \cdot 10^{-3}} = 99,65 \text{ A. h/kg}$$

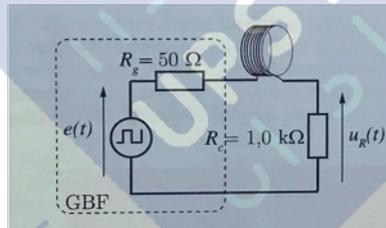
Anode « LiSi<sub>0,22</sub> » :

$$q_{max} = \frac{1}{3\,600} \frac{F}{M(\text{LiSi}_{0,22}) + 2 \cdot M(\text{Li}_{0,5}\text{CoO}_2)} = \frac{1}{3\,600} \frac{9,6 \cdot 10^4}{201,8 \cdot 10^{-3}} = 132,1 \text{ A. h/kg}$$

La capacité massique maximale est ainsi augmentée de presque 30 A.h/kg (32,45) soit une augmentation de 32 % !

**Q29.** La résistance  $R$  permet de modéliser les pertes par effet Joule dans le conducteur. L'inductance  $L$  prend en compte les phénomènes d'auto induction dans les circuits parcourus par un courant variable (champ magnétique variable). La capacité  $C$  permet de prendre en compte l'influence électrique entre conducteurs en vis-à-vis (les spires de la bobines).

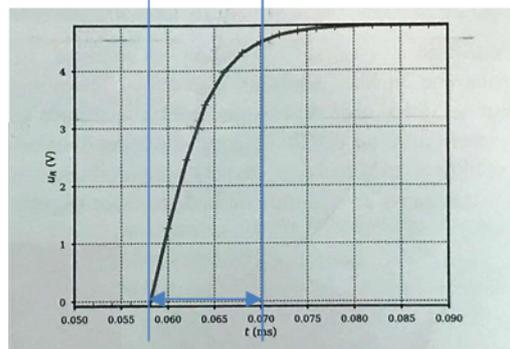
**Q30.** La réponse indicielle semble être celle d'un système du premier ordre, ce qui est bien le cas d'un dipôle RL.



Il s'agit d'un circuit RL avec  $R_g + R + R_C$  comme résistance équivalente (elles sont en série) et

donc une constante de temps  $\tau = \frac{L}{R + R_g + R_L}$ .

Cette constante de temps peut être évaluée sur la réponse avec la tangente à l'origine, le temps de réponse à 63% ou à 95%.



$$t_{95\%} = 3\tau = 12 \mu\text{s}$$

La tangente à l'origine fournit une valeur plus grande mais cette méthode est moins précise.

En prenant  $\tau = 4\mu\text{s}$ ,  $L = 4,2\text{mH}$ .

**Q31.** La figure 24 fournit le module de l'impédance en fonction de la fréquence. L'impédance du modèle (a) est une constante en fonction de la fréquence : il est donc valable jusqu'à environ 100Hz.

L'impédance du second modèle est fonction de la pulsation  $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  donc en échelle logarithmique est une fonction affine de  $\log f$  lorsque  $R$  est négligeable devant  $L\omega$ , ce que l'on retrouve sur le graphe pour des fréquences supérieures à 100Hz et inférieures à 100kHz.

**Q32.** Dans le cas du modèle (c), l'impédance correspond à une capacité en parallèle avec un circuit RL soit

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} \text{ soit } \underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 + RCj\omega - LC\omega^2}$$

**Q33.**  $R = 6,2\Omega$  et  $L\omega = 2,6k\Omega$  ce qui montre que la résistance est négligeable devant  $L\omega$  aux fréquences proches de la fréquence  $f_0$ .

Nous pouvons alors écrire  $\underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 + RCj\omega - LC\omega^2}$  dont la forme est celle de la fonction de

transfert d'un passe-bande dont la fréquence de résonance est  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  ce qui fournit donc

$$\text{la valeur de la capacité } C = \frac{1}{L(2\pi f_0)^2} = 0,5\text{nF}$$

**Q34.** Il faut comparer la longueur d'onde associée à la fréquence  $f_0$  avec les dimensions caractéristiques de la bobine :

$$\lambda = \frac{c}{f_0} \approx 3.10^3\text{m} \gg r_0$$

Nous sommes bien en régime quasi-stationnaire, les phénomènes ondulatoires peuvent être négligés.

**Q35.** Par définition du moment magnétique associé à une spire parcourue par un courant

$$\underline{M}_1 = N_1 S_1 \underline{j}_1.$$

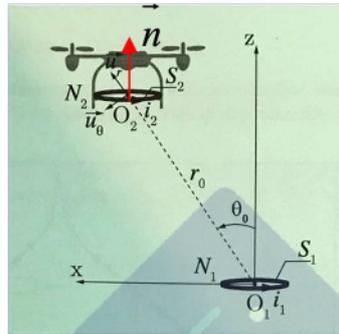
La mutuelle inductance est définie à partir du flux du champ magnétique créé par le circuit (1) à travers le circuit (2) et inversement, ici nous pouvons utiliser :

$$M = \frac{N_2}{i_1} \iint_{(S_2)} \overrightarrow{B}_1 \cdot \overrightarrow{n} dS$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta_0 \vec{u}_r + \sin \theta_0 \vec{u}_\theta) \text{ et } \vec{n} = \cos \theta_0 \vec{u}_r - \sin \theta_0 \vec{u}_\theta$$

Donc en supposant le champ magnétique uniforme sur la surface des spires :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1 S_2}{4\pi r_0^3} (2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$$



**Q36.** Le désaccord aux faibles distances peut s'expliquer par l'hypothèse de champ uniforme sur la surface ( $S_2$ ) et par le fait que l'expression du champ magnétique fournit n'est valable qu'aux grandes distances :  $r_0 \gg \text{rayonspire}$ .

Le modèle analytique convient pour des distances supérieurs à 30cm environ ce qui est acceptable pour le drone qui volera à quelques mètres de l'émetteur.

**Q37.** La loi des mailles dans chaque circuit fournit en complexe :

$$\underline{e} = \left( R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \underline{i}_1 - jM\omega \underline{i}_2$$

$$\left( R_c + R_2 + jL_2\omega + \frac{1}{jC_2\omega} \right) \underline{i}_2 - jM\omega \underline{i}_1 = 0$$

Les examinateurs attendaient-ils que les candidats respectent le sens conventionnel (indiqué par les points) pour les courants ? Dans tous les cas la relation donnée ensuite sera la même...

**Q38.** Avec les hypothèses  $\underline{i}_2 = \frac{Mj\omega}{M^2\omega^2 + R_1(R_2 + R_c)} \underline{e}$

Ce qui permet de dégager l'expression de la valeur efficace du courant et donc la puissance moyenne :

$$I_{2\text{eff}} = \frac{M\omega_0 E_{\text{eff}}}{M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_C)}$$

$$P = R_C I_{2\text{eff}}^2 = R_C \frac{M^2\omega_0^2 E_{\text{eff}}^2}{(M^2\omega_0^2 + R_1(R_2 + R_C))^2}$$

**Q39.**

Distance (m)	Puissance
1	1,2kW
3	0,2W
10	2mW

Il paraît difficile de fournir de l'énergie électrique au drone de cette manière !

for innovation



teaching sciences