teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2018

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

STABILISATEUR D'IMAGE MÉCANIQUE

Q1)

2 doit se déplacer par rapport à 0 mais ne pas tourner suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$

$$\{V_{2/1}\}=\{V_{2/0}\}-\{V_{1/0}\}$$

$$\{V_{2/0}\}_O=\begin{Bmatrix}\omega_z(2/0)\,\vec{z}\\ V_x(2/0)\,\vec{x}+V_y(2/0)\,\vec{y}+V_z(2/0)\,\vec{z}\end{Bmatrix}_O$$

$$\{V_{2/1}\}_O=\begin{Bmatrix}-\omega_x(1/0)\,\vec{x}-\omega_y(1/0)\,\vec{y}+(\omega_z(2/0)-\omega_z(1/0))\,\vec{z}\\ (V_x(2/0)-V_x(1/0))\,\vec{x}+(V_y(2/0)-V_y(1/0))\,\vec{y}+\\ (V_z(2/0)-V_z(1/0))\,\vec{z}\end{Bmatrix}_O$$

$\vec{V}(O,2/1)=\vec{0}$ car on veut transmettre les vitesses à la caméra.

Si on choisit $\omega_z(2/0)-\omega_z(1/0)=0$ alors la liaison est une rotule à doigt en O bloquée suivant $\vec{z}$.
Si on choisit $\omega_z(2/0)-\omega_z(1/0)\neq 0$ alors la liaison est une rotule en O.

Q2)
$\{T_{1\to 2}\}$ et $\{T_{pesenteur\to 2}\}$

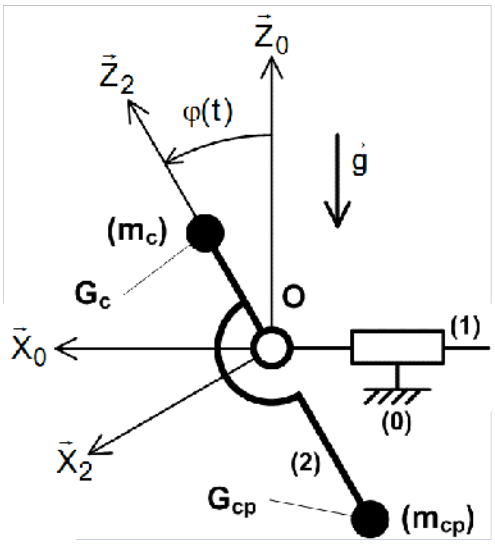
Les moments en O donnent $\vec{OG_c}\wedge -mc.g\,\vec{z_0}=\vec{0}$ pour que 2 soit en équilibre.

Soit $\vec{OG_c}$ // à $\vec{z_0}$

Sans contrepoids G_c est au-dessus de O donc l'équilibre est instable (quand on éloigne G_c de la position d'équilibre l'angle augmente et le moment du poids augmente).

Q3)

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



On pose G le centre de gravité de l'ensemble tel que :

$$(m_c+m_{cp})\vec{OG}=m_c\vec{OG_c}+m_{cp}\vec{OG_{cp}}=(m_c.L_c-m_{cp}.L_{cp})\vec{z}$$

Equilibre stable si $\vec{OG}<\vec{0}$ soit $\boxed{m_c.L_c<m_{cp}.L_{cp}}$

Q4)

a) $2T(c/0)=\vec{V}_{G_c2/0}.m_c\vec{V}_{G_c2/0}=m_cL_c^2\dot{\varphi}^2$

Car $\vec{V}_{G_c,2/0}=\vec{V}_{O,2/0}+\vec{G_cO}\wedge\vec{\Omega}_{2/0}=-L_c\vec{z}_2\wedge\dot{\varphi}\vec{y}_0=L_c\dot{\varphi}\vec{x}_2$

b) De même $2T(cp/0)=\vec{V}_{G_{cp}2/0}.m_{cp}\vec{V}_{G_{cp}2/0}=m_{cp}L_{cp}^2\dot{\varphi}^2$

c) $P(\overline{E'}\to E/0)=P(0\to2/0)+P(pes\to c/0)+P(pes\to c/0)$ avec

$P(0\to2/0)=\vec{R}(0\to2).\vec{V}_{O,2/0}+\vec{M}(O,0\to2).\vec{\Omega}_{2/0}=-\rho\dot{\varphi}^2$ (on suppose 0 ≡ 1)

$P(pes\to c/0)=\vec{M}(O,pes\to c).\vec{\Omega}_{c/0}=\left(\vec{OG_c}\wedge-m_cg\vec{z}_0\right).\vec{\Omega}_{c/0}$

$$=L_c\vec{z}_2.\left(-m_cg\vec{z}_0\wedge\dot{\varphi}\vec{y}_0\right)=L_cm_cg\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$P(pes\to c/0)=L_cm_cg\dot{\varphi}\sin\varphi$ et de même $P(pes\to cp/0)=-L_{cp}m_{cp}g\dot{\varphi}\sin\varphi$

d) $P(\text{int})=0$ car E' est un solide indéformable.

e) $P(\overline{E'}\to E/0)+P(int)=\dfrac{d}{dt}\left(Ec(2+c+cp/0)\right)$ donne :

$$\left(L_cm_c-L_{cp}m_{cp}\right)g\dot{\varphi}\sin\varphi-\rho\dot{\varphi}^2=\left(m_cL_c^2+m_{cp}L_{cp}^2\right)\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

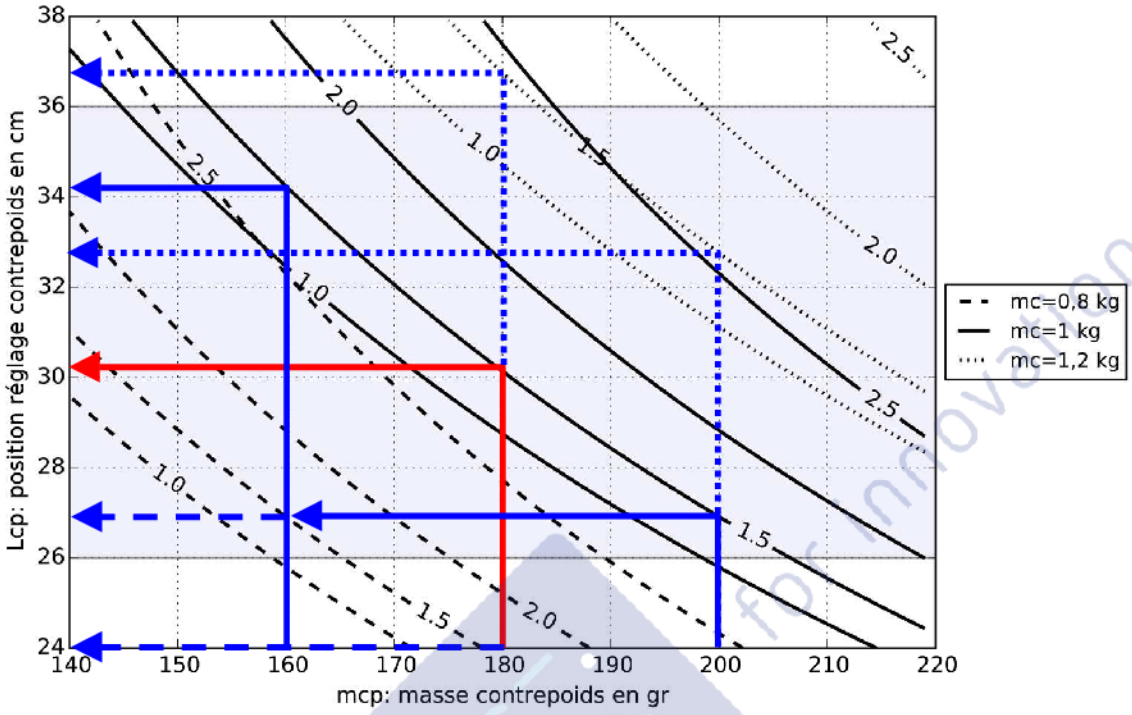
En simplifiant par $\dot{\varphi}$ et au voisinage de $\varphi=0$ on a :

$$\left(m_cL_c^2+m_{cp}L_{cp}^2\right)\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}+\left(L_{cp}m_{cp}-L_cm_c\right)g.\varphi=0$$

$Q_1=m_c.L_c^2+m_{cp}.L_{cp}^2$	$Q_2=\rho$	$Q_3=\left(L_{cp}.m_{cp}-L_c.m_c\right).g$

Q5)

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



Isovaleurs de la pulsation propre ω_0 (en $rad.s^{-1}$) en fonction de m_{cp} et L_{cp} pour 3 valeurs de masse de caméra m_c

On veut $\xi > 1$ et $t_{R5\%} = 3s$ soit $\omega_0 > \dfrac{4,7}{t_{R5\%}} = \dfrac{4,7}{3} = 1,56$. Il faut donc choisir $L_{cp} > 300mm$ (tracé rouge).

Q6)

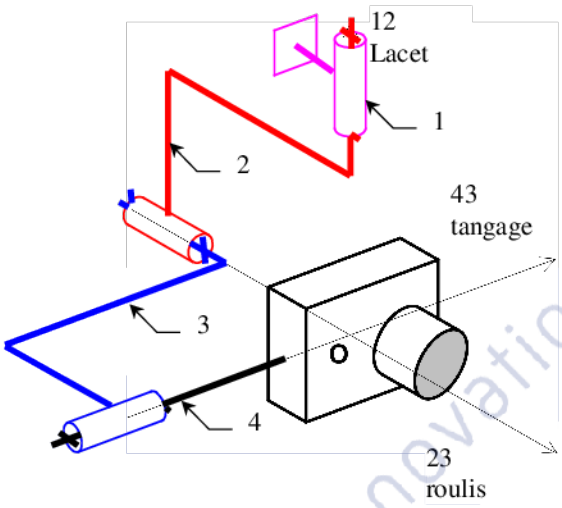
L_{cp} = ? en mm	m_c = 800 g	m_c = 1000 g	m_c = 1200 g
m_{cp}=160 g	270	340	×
m_{cp}=180 g	(240)	300	(370)
m_{cp}=200 g	×	270	330

Q7)

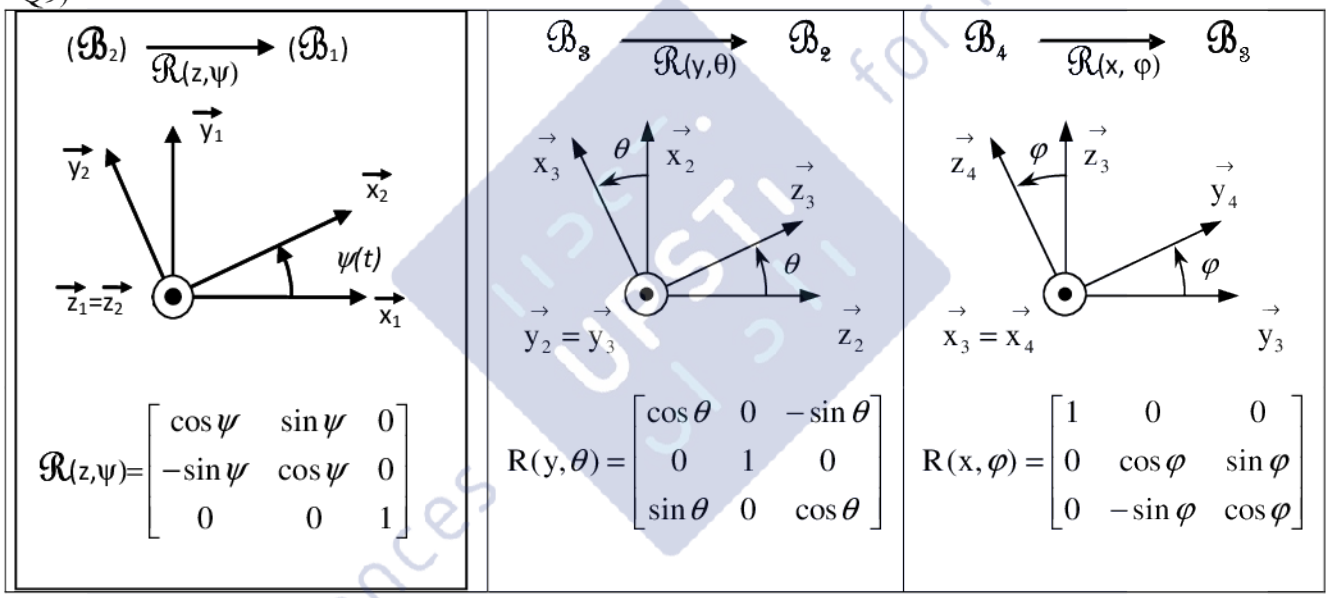
Solides concernés	1 et 2	2 et 3	3 et 4
Désignation liaison proposée	Pivot	Pivot	Pivot
Caractéristiques	axe $(O, \vec{z}_2)$	axe $(O, \vec{y}_3)$	axe $(O, \vec{x}_4)$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Q8)



Q9)



$$\mathcal{R}(z,\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(y,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R(x,\varphi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

Q10)

En posant $R(x,\varphi)=R_{43}$, $R(y,\theta)=R_{32}$ et $R(z,\psi)=R_{21}$ on trouve la matrice de passage de la base 4 à la base 1 :

$R_{41}=R_{43}.R_{32}.R_{21}=R(x,\varphi).R(y,\theta).R(z,\psi)$

$$R_{41}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi\\ \sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\sin\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}$$

Q11)

$\vec{a}_{B_4}=R_{41}.\vec{G}_{B_1}$

$a_x=g.\sin\theta$

$a_y=-g.\cos\theta.\sin\varphi$

$a_z=-g.\cos\theta.\cos\varphi$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

La première équation permet de trouver θ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Les deux autres équations permettent alors de trouver φ dans l'intervalle $[0,2\pi]$

Mais on n'a aucune informations sur ψ. Le vecteur accélération est donc insuffisant pour déterminer l'attitude de la camera.

Q12)

$\vec{ma}_{B_4} = R_{41}.\vec{M}_{B_1}$ donne 3 équations supplémentaires.

$m_x = M.(\cos\gamma\cos\psi\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta)$

$m_y = M.\cos\gamma(-\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\theta\sin\varphi) - M.\sin\gamma\cos\theta\sin\varphi$

$m_z = M.\cos\gamma(\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\theta\cos\varphi) - M.\sin\gamma\cos\theta\cos\varphi)$

On peut donc déterminer l'angle ψ.

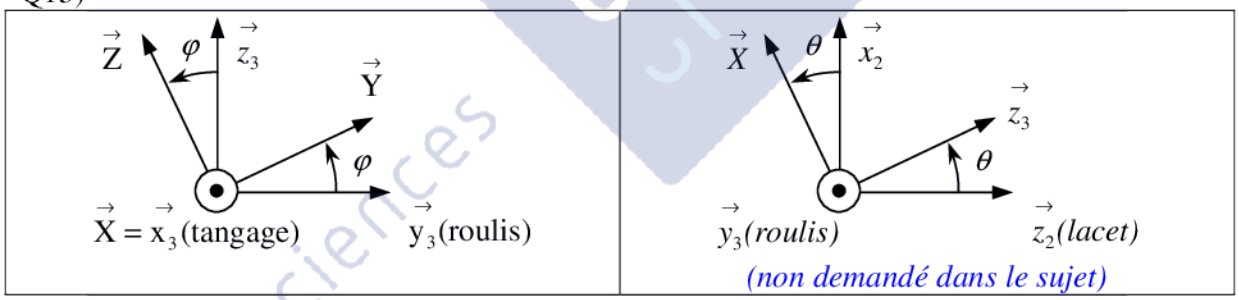
Q13)

X	Tangage
Y	Roulis
Z	Lacet

Q14)

Gyromètre X aligné avec l'axe de Tangage (43).

Q15)



(non demandé dans le sujet)

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_x$

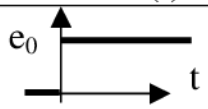
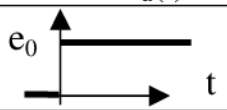
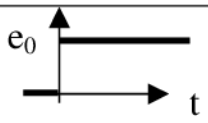
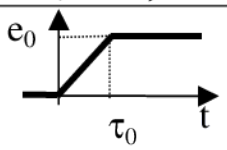
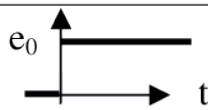
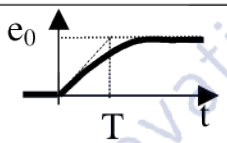
$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y.\cos\varphi - \omega_z\sin\varphi$

$\frac{d\psi}{dt} = (\omega_y.\sin\varphi + \omega_z\cos\varphi)\cos\theta - \omega_x.\sin\theta$

(l'énoncé suppose certainement θ=0 car il manque une vue plane de rotation)

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Q16)

	α*(t)	Ai(p)	α*$_a$(t)
[i=1]		1	
[i=2]		$\frac{1-e^{-\tau_0.p}}{\tau_0.p}$	
[i=3]		$\frac{1}{1+\tau p}$	

Q17)

Code	Définition	Expression ou définition
Non codé	Fonction de transfert du mécanisme tangage	$\frac{A.K_m}{1+\tau_m.p}$
$Co_T(p)$	Correcteur de tangage (partiel)	K_p
$g_1(p)$	Grandeur physique associée	Vitesse de rotation
$Kd\alpha_T$	Coefficient du correcteur dérivé	K_D

Lien entre $g_1(t)$ et $\varphi(t)$:

$$g_1(t) = \dot{\varphi}(t)$$

Q18)

$$FTBO(p) = \frac{K_P.K_m.A}{p(1-K_m.A.K_D+\tau_m.p)} = \frac{K_P}{p(1-K_D+\tau_m.p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_P.K_m.A.A_i(p)}{p(1-K_m.A.K_D+\tau_m.p)+K_P.K_m.A} = \frac{K_P.A_i(p)}{K_P+(1-K_D)p+\tau_m.p^2}$$

Q19)

Il faut que les pôles de la FTBF soient à partie réelle négative.

Donc $Re(p_i) = \frac{K_m.A.K_D-1}{2\tau_m} < 0$ soit $K_D < \frac{1}{A.K_m} = 1$

$$K_{D\max} = \frac{1}{A.K_m} = 1 \text{ (limite de stabilité)}$$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Q20)

$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1 - K_m.A.K_D}{K_m.A.K_P}$ et $\omega_0 = \frac{K_m.A.K_P}{\tau_m}$ donne

$$\xi = \frac{1 - K_m.A.K_D}{2\sqrt{K_m.A.K_P.\tau_m}} = \frac{1 - 0{,}5}{2\sqrt{10 \times 0{,}2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}17 < 1$$

La réponse comportera donc des dépassements et des oscillations.

Q21)

Le mouvement évolue rapidement pendant les 4 premières secondes et lentement ensuite sans dépassements (réponse exponentielle apériodique).
L'exigence id1.12 est donc respectée.

Q22)

$$\varepsilon_1(p) = P_e(p) + \frac{K_m.A}{1 + \tau_m.p} Com(p) \qquad \varepsilon_2(p) = -\frac{\varepsilon_1(p)}{p} \qquad \varepsilon_3(p) = K_P.\varepsilon_2(p) + K_D.\varepsilon_1(p)$$

$$Com(p) = \left(-\frac{K_P}{p} + K_D\right)\left(P_e(p) + \frac{K_m.A}{1 + \tau_m.p} Com(p)\right)$$

$$p.(1 + \tau_m.p)Com(p) = (-K_P + p.K_D)((1 + \tau_m.p)P_e(p) + K_m.A.Com(p))$$

$$(p.(1 + \tau_m.p) + (K_P - p.K_D)K_m.A)Com(p) = (-K_P + p.K_D)(1 + \tau_m.p)P_e(p)$$

$$\boxed{Stab(p) = \frac{Com(p)}{P_e(p)} = \frac{(-K_P + p.K_D)(1 + \tau_m.p)}{p.(1 + \tau_m.p) + (K_P - p.K_D)K_m.A}}$$

Q23)

Le système est stable. On peut donc appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to \infty} Com(t) = \lim_{p \to 0} p.Com(p) = \lim_{p \to 0} p.Stab(p).\frac{P_0}{p} = -\frac{P_0}{K_m.A} = -P_0$$

Si $P_0 = 1\,deg.s^{-1}$ alors $\lim_{t \to \infty} Com(t) = -1\,deg.s^{-1}$

Sens physique : la vitesse de rotation de la commande du moteur est l'opposée de la vitesse de rotation de la perturbation. La somme des deux vitesses s'explique par la composition des mouvements : $\omega_{4/0} = \omega_{4/3} + \omega_{3/0} = \dot{\varphi}(t) + P_e(t)$. Si $\lim_{t \to 0} \dot{\varphi}(t) = \lim_{t \to 0} Com(t) = -P_e$ alors $\lim_{t \to 0} \omega_{4/0} = 0$.

La caméra aura une vitesse de rotation par rapport à 3 nulle en régime établi.

Q24)

On a déjà trouvé $FTBO(p) = \frac{K_P.K_m.A}{p(1 - K_m.A.K_D + \tau_m.p)}$

$$Pert(p) = \frac{K_P.K_m.A\left(\frac{1 + \tau_m.p}{K_m.A}\right)}{p(1 - K_m.A.K_D + \tau_m.p) + K_P.K_m.A} = \frac{1 + \tau_m.p}{p(1 - K_m.A.K_D + \tau_m.p) + K_P.K_m.A}$$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

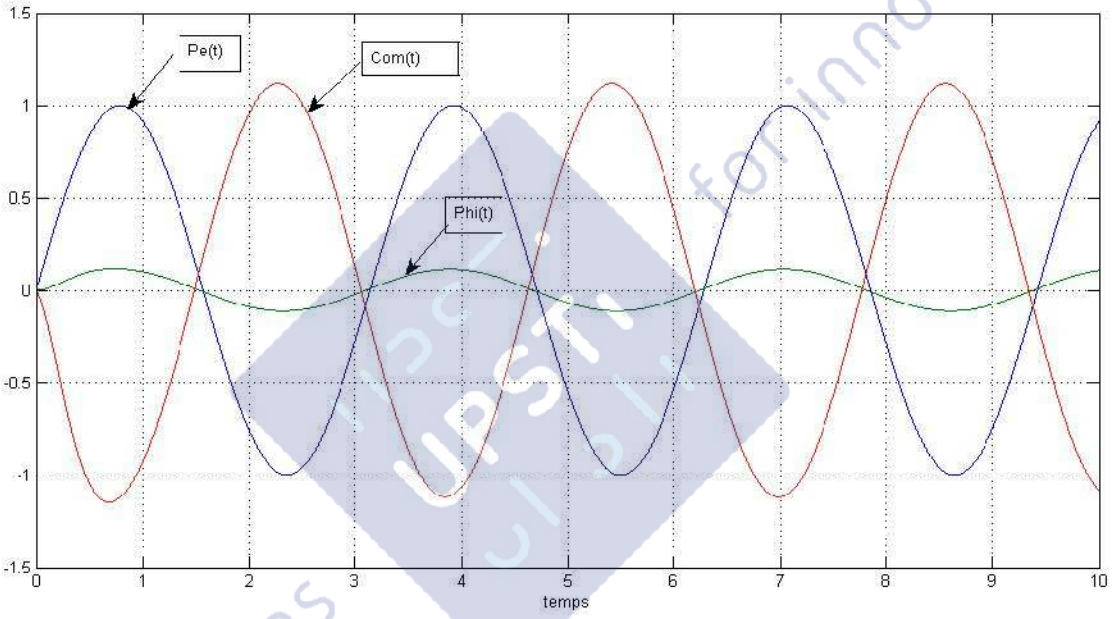
Q25)
Le système est stable. On peut donc appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\lim_{p\to 0}p.\varphi(p)=\lim_{p\to 0}p.Pert(p).\frac{P_0}{p}=\frac{P_0}{K_m.A.K_P}=\frac{P_0}{K_P}$$

Si $P_0=1\,deg.s^{-1}$ et $K_P=10\,s^{-1}$ alors $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0{,}1°$

Sens physique : l'orientation de la caméra par rapport au sol change suite à la perturbation en échelon. Le temps de réaction du moteur ne permet pas de compenser complètement la vitesse perturbatrice au début du mouvement.
L'erreur sera d'autant plus faible que K_P sera grand.

Q26)



Réponse de l'axe de tangage à une perturbation sinusoïdale

On mesure un $|\varphi|<0{,}12°$ (hypothèse sur les unités d'angle en degrés) alors que l'exigence 1.13 stipule $|\varphi|<0{,}1°$. L'exigence 1.13 n'est pas respectée.
On remarque que Com(t) et Pe(t) sont en opposition de phase, ce qui est cohérent avec le résultat de Q28) où on a trouvé $\lim_{t\to\infty}Com(t)=-P_0$ en régime établi.
Remarque : si P_e en $deg.s^{-1}$ alors K_p de l'ordre de 10 s^{-1}

On peut augmenter K_P pour diminuer le mouvement indésirable (voir Q25).
On peut simultanément diminuer K_D (car $K_D<1$ pour la stabilité) et même prendre K_D négatif.
Un correcteur PI (proportionnel Intégral) est éventuellement envisageable pour diminuer l'erreur tout en gardant une marge de phase satisfaisante.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Q27)

Couple moteur	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justifications de l'isolement et du théorème utilisé
C_{M12}	2+3+4+c	Moment dynamique en O en projection sur $\vec{z}_1$	$\vec{M}(O,1\to 2).\vec{z}_1 = 0$
C_{M23}	3+4+c	Moment dynamique en O en projection sur $\vec{y}_2$	$\vec{M}(O,2\to 3).\vec{y}_2 = 0$
C_{M34}	4+c	Moment dynamique en O en projection sur $\vec{x}_3$	$\vec{M}(O,3\to 4).\vec{x}_3 = 0$

Q28)

Le solide 4 a pour plan de symétrie $(O',\vec{x}_4,\vec{z}_4)$

La matrice d'inertie de 4 est donc de la forme $I(O',4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & -E_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -E_4 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{B4}$

Q29)

$\vec{O'G_{4c}}.\vec{x}_4 = 0$ si l'utilisateur a fait des réglages pour que G_{4c} soit dans le plan $\left(O',\vec{y}_4,\vec{z}_4\right)$.

Q30)

On suppose la condition $\vec{O'G_{4c}}\wedge\vec{x}_4 = \vec{0}$ vérifiée (équilibrage suivant $\left(O',\vec{x}_4\right)$).

De plus on néglige la distance entre O et O'.

Soit $\vec{OO'} = \vec{0}$ et $\vec{O'G_{4c}} = \vec{0}$

On isole l'ensemble 4 + camera et on applique le théorème du moment dynamique en O en projection sur $\vec{x}_3$:

$$\underbrace{\vec{M}(O,3\to 4).\vec{x}_4}_{-\rho_3.\dot{\varphi}=0} + \vec{M}(O,pes\to 4+c).\vec{x}_4 + \underbrace{\vec{M}(O,mot\to 4).\vec{x}_4}_{C_{m34}} = \vec{\delta}(O,4+c/0).\vec{x}_4$$

- $\vec{M}(O,pes\to 4+c).\vec{x}_4 = \left(\vec{OG_{4c}}\wedge -m_{4c}.g\,\vec{z}_0\right).\vec{x}_4 = 0$
- $$\vec{\delta}(O,4+c/0).\vec{x}_4 = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(O,4+c/0)\right)_{/0}.\vec{x}_4 + \left(\underbrace{\vec{V}(O/0)}_{\vec{0}}\wedge m_{4c}.\vec{V}(G_{4c},4/0)\right).\vec{x}_4$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(O,4+c/0).\vec{x}_4\right) - \frac{d}{dt}\left(\vec{x}_4\right)_{/0}.\vec{\sigma}(O,4+c/0)$$

Calcul du moment cinétique :

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$$\vec{\sigma}(O,4+c/0) = I(O',4+c)\vec{\Omega}(4/0) + \overrightarrow{O'G_{4c}} \wedge m_{4c}\underbrace{\vec{V}(O,4/0)}_{=\vec{0}}$$

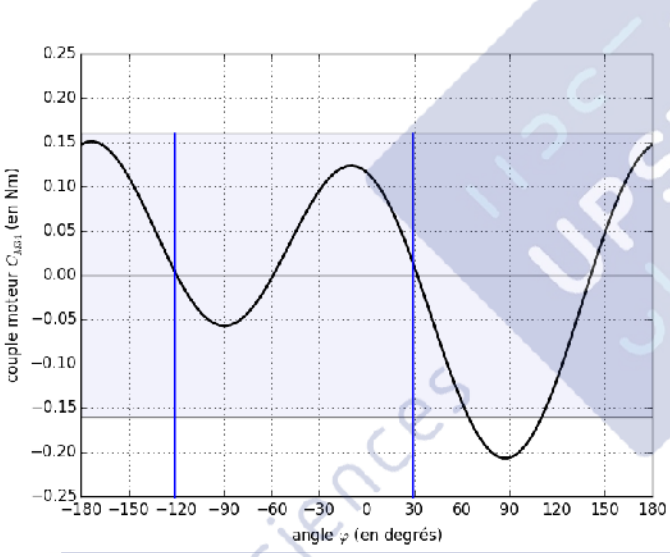
$$= \begin{pmatrix} A_{4c} & -F_{4c} & -E_{4c} \\ -F_{4c} & B_{4c} & -D_{4c} \\ -E_{4c} & -D_{4c} & C_{4c} \end{pmatrix}_{B4} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}.\sin\varphi_0 \\ \dot{\psi}.\cos\varphi_0 \end{pmatrix}_{B4} = \begin{pmatrix} -F_{4c}\dot{\psi}.\sin\varphi_0 - E_{4c}\dot{\psi}.\cos\varphi_0 \\ B_{4c}\dot{\psi}.\sin\varphi_0 - D_{4c}\dot{\psi}.\cos\varphi_0 \\ -D_{4c}\dot{\psi}.\sin\varphi_0 + C_{4c}\dot{\psi}.\cos\varphi_0 \end{pmatrix}_{B4}$$

De plus $-\frac{d}{dt}\left(\vec{x_4}\right)_{/0} = -\vec{\Omega}(4/0) \wedge \vec{x_4} = -\dot{\psi}\,\vec{z_0} \wedge \vec{x_4} = -\dot{\psi}\,\vec{y_3}$

Soit :

$$\vec{\delta}(O,4+c/0).\vec{x_4} = -\ddot{\psi}\left(F_{4c}.\sin\varphi_0 + E_{4c}.\cos\varphi_0\right) + \dot{\psi}^2\left((C_{4c}-B_{4c}).\sin\varphi_0.\cos\varphi_0 + \frac{D_{4c}}{2}.\cos(2\varphi_0)\right)$$

Finalement : $\boxed{C_{m34} = -\ddot{\psi}\left(F_{4c}.\sin\varphi_0 + E_{4c}.\cos\varphi_0\right) + \dot{\psi}^2\left((C_{4c}-B_{4c}).\sin\varphi_0.\cos\varphi_0 + \frac{D_{4c}}{2}.\cos(2\varphi_0)\right)}$



Sur la plage de fonctionnement $\varphi \in [-120° ; 30°]$:

$C_{M34\ max} = 0{,}12 < 0{,}16$ Nm

L'exigence 1.11 est satisfaite.

Remarque : la place sur le document réponse est insuffisant pour pouvoir répondre complétement à cette question.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI