

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2018

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

## Corrigé Centrale-Supélec - MP - 2018

**Q1 :** La trajectoire théorique comporte 2 virages donc il y a 3 changements de caps nécessaires :

- 1<sup>er</sup> changement de cap : direction en face (démarrage du sphéro)
- 2<sup>ème</sup> changement de cap : 90° à droite
- 3<sup>ème</sup> changement de cap : direction en face

**Q2 :** L'utilisateur réalise 8 changements de cap au cours de l'expérimentation. L'exigence id 2 n'est pas validée car :

- id 2.3.1 non validée : écartement de plus de 25 cm par rapport à la trajectoire de consigne (position 6 du Sphéro)
- id 2.1.1 non validée : oscillations en lacet lors des changements de cap (position 1, 2, 3 du Sphéro)
- id 2.1.3 non validée : dérive de cap par rapport à la consigne (position 1, 2, 3 du Sphéro)

**Q3 :** La diagonale représente  $\sqrt{750^2 + 1334^2}$  pixels (Pythagore) ce qui correspond à 11,938 cm. La largeur de l'écran (750 px) mesure donc 5,851 cm et la longueur de l'écran (1334 px) mesure donc 10,406 cm.

**Q4 :** On en déduit qu'un pixel est un carré de  $7,8 \cdot 10^{-3}$  cm de côté.

**Q5 :** Dans 1 cm<sup>2</sup>, il y a 16434 pixels

**Q6 :** Un carré de 170 px équivaut à un carré de 1 mm de coté (soit 1mm<sup>2</sup>). Le contrôle est donc compatible.

**Q7 :**  $O_c$  est le centre de l'écran donc  $O_c$  est l'élément A[375][667]. On note A[i<sub>D</sub>][j<sub>D</sub>] les termes de la matrice A correspondant au point D.

On a donc :  $X = A[375][j_D] - A[375][667]$  et  $Y = A[i_D][667] - A[375][667]$

**Q8 :**

```
import math as ma
def Get_CV(X,Y):
    if ma.sqrt(X**2+Y**2) > 305 :
```

```

return (None,None)
else:
    V=ma.sqrt(X**2+Y**2)
    if Y<0:
        C = ma.acos(X/V)*180/ma.pi #(C sur [0,180])
    else:
        C = (2*ma.pi-ma.acos(X/V))*180/ma.pi #(C sur [180,360])
    return (C,V)

```

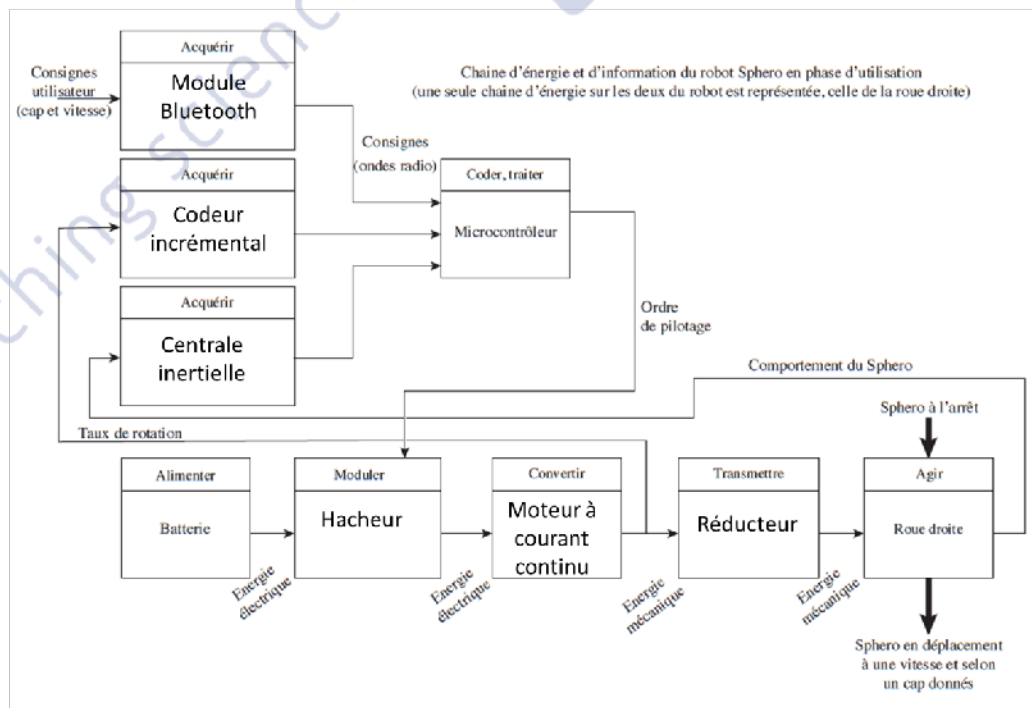
**Q9:**

```

while True : # tant que le Sphéro n'est pas éteint -- Q9
    A=Get_A()
    while On_Cursor(A)==True : # tant que le doigt de l'utilisateur
est posé sur le curseur
        while On_dial(A)==True : # tant que le curseur est à
l'intérieur du cadran
            (X,Y)=Get_XY(A)
            (C,V)=Get_CV(X,Y)
            Set_heading(C)
            Set_speed(V)
        Set_speed(0) # Pour stopper lorsque le doigt est levé

```

**Q10:**



**Q11 :**

- $\overrightarrow{V(A \in 6/1)} = \overrightarrow{V(O \in 6/1)} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/1}} = L \cdot r_{61} \cdot \overrightarrow{y_6}$  d'où  $\{V_{6/1}\} = \begin{pmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & L \cdot r_{61} \\ r_{61} & 0 \end{pmatrix}_{A, B_{6'}}$
- Liaison pivot en A d'axe  $\overrightarrow{x_6}$  entre 2 et 6 donc  $\{V_{2/6}\} = \begin{pmatrix} p_{26} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, B_{6'}}$
- $\overrightarrow{V(A \in 1/2)} = \overrightarrow{V(I \in 1/2)} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = R \cdot p_{21} \cdot \overrightarrow{y_6} - R \cdot q_{21} \cdot \overrightarrow{x_6}$   
d'où  $\{V_{1/2}\} = \begin{pmatrix} -p_{21} & -R \cdot q_{21} \\ -q_{21} & R \cdot p_{21} \\ -r_{21} & 0 \end{pmatrix}_{A, B_{6'}}$

**Q12 :** Composition des mouvements :  $\{V_{2/6}\} + \{V_{6/1}\} + \{V_{1/2}\} = \{0\}$

On a l'égalité des vecteurs rotation suivant  $\overrightarrow{z_6}$  on obtient :

$$r_{61} = r_{21}$$

En utilisant la formule de l'énoncé, on obtient :

$$r_{61} = \frac{k \cdot R}{2 \cdot L} (p_{36} - p_{56}) \text{ d'où } \lambda = \frac{k \cdot R}{2 \cdot L}$$

**Q13 :** On a l'égalité des vecteurs vitesse en A suivant  $\overrightarrow{y_6}$  on obtient :

$$L \cdot r_{61} + R \cdot p_{21} = 0$$

$$\text{D'où } p_{21} = -\frac{L}{R} \cdot r_{61}$$

En utilisant la formule de l'énoncé, on obtient :  $p_{21} = -\frac{k}{2} \cdot (p_{36} - p_{56})$

**Q14 :** L'égalité des vecteurs rotation suivant  $\overrightarrow{x_6}$  nous donne :

$$p_{61} + p_{26} - p_{21} = 0 \text{ or } p_{26} = -k \cdot p_{56} \text{ (engrenage à contact extérieur)}$$

$$\text{Donc } p_{61} = \frac{k}{2} \cdot (p_{36} + p_{56}) \text{ d'où } \mu = \frac{k}{2}$$

**Q15 :** Lors d'un changement de cap, il ne doit pas y avoir de tangage donc  $p_{61} = 0$

**Q16 :**  $p_{61} = 0$  implique  $p_{36} = -p_{56}$ . Les 2 moteurs tournent en sens opposé ce qui valide le changement de cap.

Remarque : on a  $r_{61} = \frac{k \cdot R}{L} \cdot p_{36}$  donc on a bien un changement de cap du Sphéro.

**Q17 :** Lorsque le Sphéro se déplace en ligne droite, on a  $r_{61} = 0$

**Q18 :** a  $r_{61} = 0$  implique  $\mathbf{p}_{36} = \mathbf{p}_{56}$ . Les 2 moteurs tournent dans le même sens et à même vitesse. Le Sphéro se déplace donc en ligne droite.

**Q19 :**  $\overrightarrow{V}(O_S \in 1/0) = \overrightarrow{O_S K} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = R_S \cdot q_{10} \cdot \overrightarrow{x}_S - R_S \cdot p_{10} \cdot \overrightarrow{y}_S$

En projection sur  $\overrightarrow{y}_S$  on a  $\mathbf{v} = -R_S \cdot \mathbf{p}_{10}$

**Q20 :** Si  $\alpha$  est constant alors  $\mathbf{p}_{60} = \overrightarrow{\Omega}_{6/0} \cdot \overrightarrow{x}_S = \mathbf{0}$

**Q21 :** On a  $\overrightarrow{\Omega}_{6/0} = \overrightarrow{\Omega}_{6/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} p_{61} \\ 0 \\ r_{61} \end{pmatrix}_{B_{6'}} + \begin{pmatrix} p_{10} \\ q_{10} \\ r_{10} \end{pmatrix}_{B_S}$  or  $\overrightarrow{x}_{6'} = \overrightarrow{x}_S$

Donc  $\mathbf{p}_{60} = \overrightarrow{\Omega}_{6/0} \cdot \overrightarrow{x}_S = p_{61} + p_{10}$  donc  $\mathbf{p}_{61} = -\mathbf{p}_{10}$

**Q22 :** En utilisant les différentes expressions précédentes :  $\mathbf{v} = R_S \cdot \frac{k}{2} \cdot (\mathbf{p}_{36} + \mathbf{p}_{56})$

La vitesse est maximale si  $p_{36} = p_{56}$  d'où  $\mathbf{v}_{max} = R_S \cdot k \cdot \mathbf{p}_{36}$

A.N.  $\mathbf{v}_{max} = 1,95 \text{ m/s} < 2 \text{ m/s}$  donc l'exigence id 2.3 est vérifiée.

**Q23 :** D'après la figure 14, l'axe  $\overrightarrow{z}_{6'}$  est un axe de symétrie du Sphéro donc son centre de gravité est situé sur l'axe  $\overrightarrow{z}_{6'}$ , d'où  $\mathbf{x}_g = \mathbf{y}_g = \mathbf{0}$

On a  $z_g = \frac{1}{M} \cdot (m_b \cdot \overrightarrow{O_S G_{b1}} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m_b \cdot \overrightarrow{O_S G_{b2}} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m \cdot \overrightarrow{O_S G_{m1}} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m \cdot \overrightarrow{O_S G_{m2}} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m_r \cdot \overrightarrow{O_S A} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m_r \cdot \overrightarrow{O_S B} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m_b \cdot \overrightarrow{O_S G_{sm}} \cdot \overrightarrow{z}_{6'} + m_i \cdot \overrightarrow{O_S G_i} \cdot \overrightarrow{z}_{6'})$

D'où  $z_g = \frac{1}{M} \cdot (-2 \cdot m_b \cdot h_b - 2 \cdot m \cdot h_m - 2 \cdot m_r \cdot h_r + m_s \cdot h_s - m_i \cdot h_i)$

A.N.  $z_g = -18 \text{ mm}$

**Q24 :** Cette répartition de masses permet d'avoir un centre de gravité situé en dessous du centre de la sphère. Ainsi la position d'équilibre sera plus facilement atteinte et ce sera une position d'équilibre stable.

**Q25 :** On isole  $\{1,2,3,4,5,6\} = \Sigma$  soumis à :

- Gravité :  $\{\tau_{pes \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{z}_S \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$
- Liaison sphère/plan en K :  $\{\tau_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} T_{01} \cdot \overrightarrow{y}_S + N_{01} \cdot \overrightarrow{z}_S \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_K$

**Q26 :**  $\overrightarrow{\delta}_K(\Sigma/0) = \frac{d\overrightarrow{\sigma}_K(\Sigma/0)}{dt} + M \cdot \overrightarrow{V}_K/0 \wedge \overrightarrow{V}_G(\Sigma/0)$

$$\text{Et } \overrightarrow{\sigma_K(\Sigma/0)} = \sum_i \overrightarrow{KG_i} \wedge m_i \cdot \overrightarrow{V_{G_i}(S_i/0)} + [I_{G_i}(S_i)] \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_i/0}}$$

On considère les solides comme des masses ponctuelles, de plus, l'énoncé ne donne aucune information sur les masses d'inertie des différents solides.

$$\text{D'où } \overrightarrow{\sigma_K(\Sigma/0)} = \sum_i \overrightarrow{KG_i} \wedge m_i \cdot \overrightarrow{V_{G_i}(S_i/0)}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{\sigma_K(\Sigma/0)} = \overrightarrow{KG_\Sigma} \wedge M \cdot \overrightarrow{V_{G_\Sigma}(\Sigma/0)}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V_G(\Sigma/0)} = v \cdot \overrightarrow{y_S}$$

$$\overrightarrow{\sigma_K(\Sigma/0)} = -M \cdot v \cdot (R_S + z_g \cdot \cos\alpha) \cdot \overrightarrow{x_S}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V_K/0} = \overrightarrow{V_G(\Sigma/0)}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{\delta_K(\Sigma/0)} = -M \cdot a \cdot (R_S + z_g \cdot \cos\alpha) \cdot \overrightarrow{x_S}$$

**Q27 :** TMD appliqué à {1,2,3,4,5,6} en K projeté suivant l'axe  $\overrightarrow{x_S}$ .

$$\overrightarrow{\delta_K(\{1,2,3,4,5,6\}/0)} \cdot \overrightarrow{x_S} = (\overrightarrow{KG} \wedge (-M \cdot g \cdot \overrightarrow{z_S})) \cdot \overrightarrow{x_S}$$

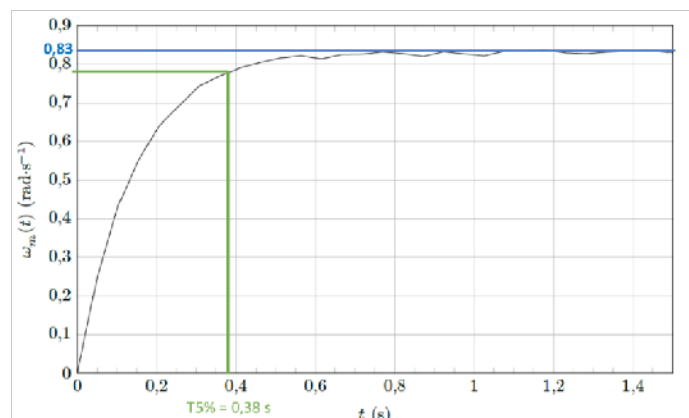
$$M \cdot a \cdot (R_S + z_g \cdot \cos\alpha) = M \cdot g \cdot z_g \cdot \sin\alpha$$

$$\text{Donc } a(\alpha, z_g, R_S) = -\frac{g \cdot z_g \cdot \sin\alpha}{(R_S + z_g \cdot \cos\alpha)}$$

**Q28 :**  $a(\alpha, z_g, R_S)$  est supposée croissante et pour une accélération minimale de  $1,5 \text{ m/s}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ < 40^\circ$  donc l'exigence id 2.3.3 est vérifiée.

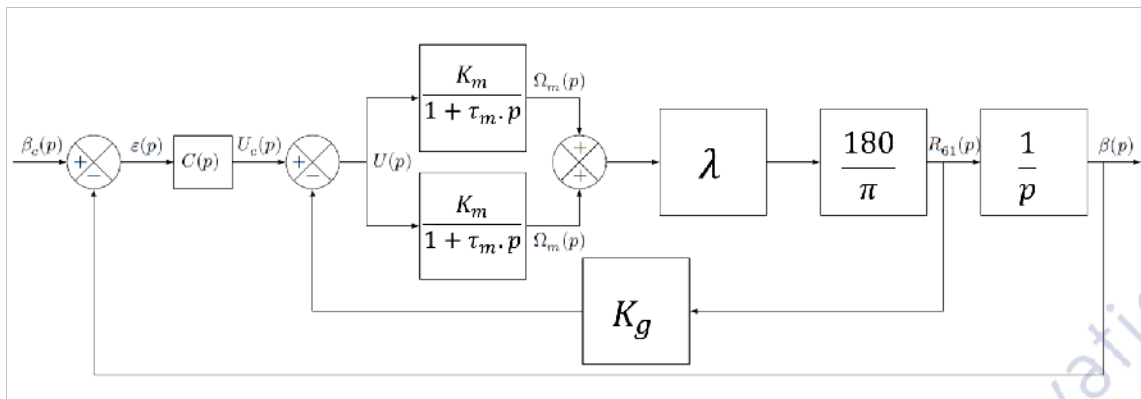
**Remarque :** pour  $40^\circ$ ,  $a = 1,89 \text{ m/s}^2 > 1,5 \text{ m/s}^2$

**Q29 :**



$K_m = 0,83 \text{ rad/s/V}$  et  $t_{5\%} = 0,38 \text{ s}$  d'où ( $t_{5\%} = 3 \cdot \tau_m$ )  $\tau_m = 0,13 \text{ s}$

**Q30 :**



**Q31 :**  $H(p) = \frac{\beta(p)}{\beta_c(p)} = \frac{1}{\frac{\pi \cdot \tau_m}{360 \cdot \lambda \cdot k_m} p^2 + \left(K_g + \frac{\pi}{360 \cdot \lambda \cdot k_m}\right) p + 1}$

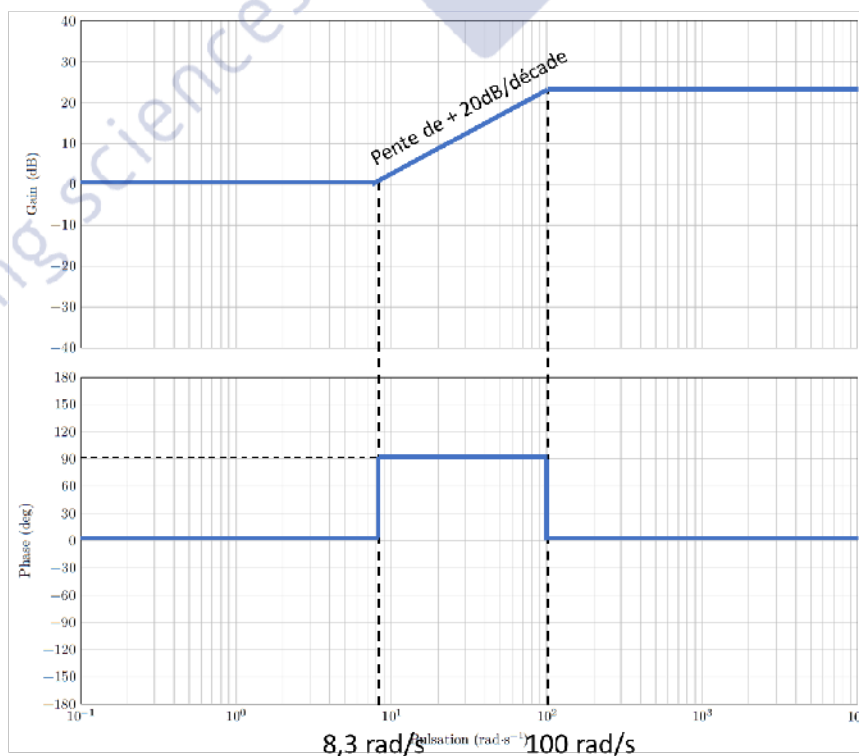
**Q32 :** On a  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} = 7,25 \text{ rad/s}$  et  $\xi = \frac{\omega_0 \cdot b}{2} = 0,62$

En utilisant l'abaque, on obtient  $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5,3$  donc  $t_{5\%} = 0,73 \text{ s}$

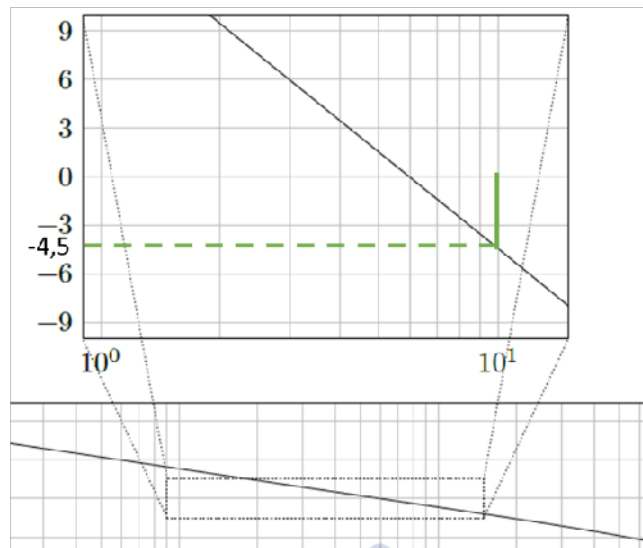
**Q33 :** Les performances requises pour l'asservissement ne sont pas atteintes car le temps de réponse à 5% n'est pas conforme au cahier des charges. De plus,  $\xi < 1$  donc il y aura du dépassement. Un correcteur Proportionnel Dérivé ou Avance de phase permet d'augmenter la marge (donc la stabilité, donc réduit les oscillations) et augmente la pulsation critique (donc la rapidité).

Remarque : L'erreur nulle pour une entrée échelon est validée (BO de classe 1).

**Q34 :** Ce correcteur permet d'améliorer la stabilité du système (Avance de phase) et la rapidité (Proportionnel) donc son temps de réponse à 5%.



**Q35 :**



Pour remonter le gain à 0dB en  $\omega_u = 10 \text{ rad/s}$ , on doit avoir :  $20 \cdot \log(K_c) = -4,5 \text{ dB}$   
d'où  $K_c = 1,58 \text{ V/}^\circ$

**Q36 :** L'erreur statique est nulle (présence d'un intégrateur pur dans la BO et pas de perturbation). Le temps de réponse à 5% vaut 0,25 s ( $< 0,3 \text{ s}$ ) donc le critère de rapidité est respecté. Cependant il y a un très léger dépassement.

**Q37 :** (100 mots) : Pour obtenir le comportement souhaité du robot Sphéro, l'exigence 1.2, concernant son contrôle avec un écran tactile, a été validée en vérifiant la détection et les mouvements du doigt de l'utilisateur (Q6/Q7) et en écrivant l'algorithme de commande (Q9) : écarts L-C.

Les exigences sur le tangage (2.2.1 et 2.2.1.1) ont été vérifiées (Q24/Q28) : écarts S-L.

Les exigences de suivi de cap (2.1.3 et 2.1.2) ont été vérifiées (Figure 21) : écarts S-L.

L'exigence de vitesse (2.3.2) a été quasi-vérifiée (Q22) : écarts S-C.

L'exigence de précision en position (2.3.1) a également été validée (Figure 22) : écarts L-C.