

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2018

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Modélisation CCP TSI 2018

## Eléments de correction

### COMPRESSEUR A SPIRALES

#### Partie I – Analyse du fonctionnement du compresseur à spirales

##### I.1 – Fonctionnement du compresseur à spirale

##### I.2 – Analyse du mouvement de la spirale mobile.

**Q1.**

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} = \begin{matrix} o \\ \text{ou} \\ \forall P \in (O, \vec{z}_0) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \omega_{10}^z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}_o$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \begin{matrix} A \\ \text{ou} \\ \forall P \in (A, \vec{z}_0) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega'_z & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \omega_{21}^z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}_A$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} = \begin{matrix} B \\ \text{ou} \\ \forall P \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ V_{32}^x(A) \vec{x}_0 \end{pmatrix}_A$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/0} \right\} = \begin{matrix} D \\ \text{ou} \\ \forall P \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ V_{30}^y(A) \vec{y}_0 \end{pmatrix}_A$$

**Q2.**

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/0} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} \text{ au point A, dans la base } b_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} = \begin{matrix} o \\ \text{ou} \\ b_0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{b_0} \equiv \begin{matrix} A \\ \text{ou} \\ b_0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -e \cdot \omega_{10}^z \sin \theta_{10} \\ 0 & e \cdot \omega_{10}^z \cos \theta_{10} \\ \omega_{10}^z & 0 \end{pmatrix}_{b_0}$$

$$\text{Car } \overline{V_{10}(A)} = \overline{V_{10}(O)} + \overline{AO} \wedge \overline{\Omega_{10}} = \vec{0} - e \vec{x}_1 \wedge \omega_{10}^z \vec{z}_0 = e \omega_{10}^z \vec{y}_1 = e \omega_{10}^z (\cos \theta_{10} \vec{y}_0 - \sin \theta_{10} \vec{x}_0)$$

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ \omega_{10}^z + \omega_{21}^z + 0 = 0 \\ -e \omega_{10}^z \sin \theta_{10} + 0 + V_{32}^x(A) = 0 \\ e \omega_{10}^z \cos \theta_{10} + 0 + 0 = V_{30}^y(A) \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Remarque : (non demandé)} \quad V_{32}^x(A) = -K_1 \omega_{10}^z = +e \omega_{10}^z \sin \theta_{10} \Rightarrow K_1 = -e \sin \theta_{10}$$

$$V_{30}^y(A) = +K_2 \omega_{10}^z = +e \omega_{10}^z \cos \theta_{10} \Rightarrow K_2 = e \cos \theta_{10}$$

**Q3.**

3 équations inutiles : le rang du système est de 3 :  $r_c = 3$

$\omega_{10}^z, \omega_{21}^z, V_{32}^x(A)$  et  $V_{30}^y(A)$  sont les inconnues cinématiques :  $N_c = 4$

$m_c = N_c - r_c$ , donc  $m_c = 1$  (Il n'y a qu'une mobilité (Rotation de 1/0 entraîne Translation de 3/0))

**Q4.**

De manière évidente  $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}_{10} \cdot \vec{z}_0$

$$\begin{cases} \omega_{21}^z = -\dot{\theta}_{10} \\ V_{32}^x(A) = e\dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \text{ soit :} \\ V_{30}^y(A) = e\dot{\theta}_{10} \cos \theta_{10} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O, \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A, \{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ e\dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_A, \{\mathcal{V}_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ e\dot{\theta}_{10} \cos \theta_{10} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A$$

**Q5.**

$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/0}\} = -\{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{3/0}\}$  au point A, dans la base  $b_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = -\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ e\dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ e\dot{\theta}_{10} \cos \theta_{10} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -e\dot{\theta}_{10} \sin \theta_{10} \vec{x}_0 + e\dot{\theta}_{10} \cos \theta_{10} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = -\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ e\dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_{\substack{A \\ \forall P}}$$

Il s'agit d'un torseur couple, qui ne dépend pas du point : une translation.

Le mouvement d'un point de 2 par rapport à 0 (par exemple le point A) décrit un cercle de rayon e.

Le mouvement de 2 (spirale mobile) par rapport à 0 (spirale fixe) est une translation circulaire.

**I.3 – Critique du modèle****Q6.**

Le référentiel n'est pas forcément galiléen en cinématique. Les frottements dans les liaisons ne modifient pas la cinématique. Par contre, les jeux le font. A ce titre, le fait que les liaisons soient parfaites est important.

**Q7.**

Le joint de Oldham (2) possède des pions sur sa partie supérieure, dont les surfaces planes fonctionnelles sont de normale  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ . Des rainures dont les surfaces planes fonctionnelles de normale  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$  sont également présentes dans la spirale fixe 3. On a donc entre 2 et 3 une liaison appui plan de normale  $\vec{x}_0$  en parallèle avec une liaison appui plan de normale  $\vec{z}_0$ . Le seul mouvement autorisé par cette association est une translation suivant  $\vec{x}_0$ . On peut donc modéliser la liaison entre 2 et 3 par une liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$

**I.4 – Analyse de la compression****Q8.**

$$s_k(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t + k\pi$$

$$s_{k+1}(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t + (k+1)\pi = \frac{\pi}{2} - \omega t + k\pi + \pi = s_k(t) + \pi$$

$$s_6(t) = s_5(t) + \pi = (s_4(t) + \pi) + \pi = s_4(t) + 2\pi = (s_3(t) + \pi) + 2\pi = s_3(t) + 3\pi \text{ donc : } s_6(t) \geq s_5(t) \geq s_4(t) \geq s_3(t)$$

$$s_k(t) \in \left[ \pi, 5\pi + \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \omega t + k\pi \geq \pi \Rightarrow \omega t \leq \frac{\pi}{2} + k\pi - \pi \Rightarrow \omega t \leq \frac{(2k-1)\pi}{2} \Rightarrow t \leq \frac{(2k-1)\pi}{2\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \omega t + k\pi < 5\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t \leq \frac{\pi}{2} + k\pi - 5\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t \leq (k-5)\pi \Rightarrow t \leq -\frac{(k-5)\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } t \in [0; +\infty[ \text{ donc : } s_3(t) \in \left[ \pi; 5\pi + \frac{\pi}{2} \right] &\Rightarrow t \in \left[ 0; \frac{5\pi}{2\omega} \right] \\ s_4(t) \in \left[ \pi; 5\pi + \frac{\pi}{2} \right] &\Rightarrow t \in \left[ 0; \frac{7\pi}{2\omega} \right] \\ s_5(t) \in \left[ \pi; 5\pi + \frac{\pi}{2} \right] &\Rightarrow t \in \left[ 0; \frac{9\pi}{2\omega} \right] \\ s_6(t) \in \left[ \pi; 5\pi + \frac{\pi}{2} \right] &\Rightarrow t \in \left[ \frac{\pi}{\omega}; \frac{11\pi}{2\omega} \right] \end{aligned}$$

Au début de la phase de compression, le point D apparaît, soit :  $M(s_5(t)) = N(t, s_6(t))$  avec  $t$  mini, soit  $t_{\min} = \frac{\pi}{\omega}$ .

A la fin compression, le point F disparaît, soit :  $M(s_3(t)) = N(t, s_4(t))$  avec  $t$  max, soit  $t_{\max} = \frac{5\pi}{2\omega}$ .

La phase de compression a donc lieu dans l'intervalle  $t \in \left[ \frac{\pi}{\omega}; \frac{5\pi}{2\omega} \right]$

**Q9.**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad t \in \left[ \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}}; \frac{5\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{T}} \right] \quad t \in \left[ \frac{T}{2}; \frac{5T}{4} \right] \quad \text{durée } \Delta t = \frac{5T}{4} - \frac{T}{2} \quad \underline{\Delta t = \frac{3T}{4}}$$

(Tentative de commentaire) La phase de compression représente les  $\frac{3}{4}$  de la période, ce qui est important par rapport aux autres technologies (Pompe à palette, à piston...). Par contre, la fluctuation du débit conduit à installer plusieurs compresseurs en parallèle et déphasés pour des exigences de lissage.

## Partie II – Rapport volumétrique du compresseur

### II.1 – Construction de la spirale $\mathcal{F}$

**Q10.**

$$\vec{u}(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \quad \vec{u}(s+2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(s+2\pi) \\ \sin(s+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} = \vec{u}(s). \quad \text{Donc } \underline{\dot{u}(s)} \text{ est } \underline{2\pi} \text{ périodique.}$$

$$\vec{u}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{u}''(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s) \\ -\sin(s) \end{pmatrix} = -\vec{u}(s). \quad \text{Pour les mêmes raisons, } \vec{u}'(s) \text{ et } \vec{u}''(s) \text{ sont } 2\pi \text{ périodiques}$$

$$e(-\vec{u}(s) + s\vec{u}'(s)) = e\left(-\begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix}\right) = e\begin{pmatrix} -\cos(s) - s\sin(s) \\ -\sin(s) + s\cos(s) \end{pmatrix} \quad \text{et } \overline{OM}(s) = e\begin{pmatrix} -\cos(s) - s\sin(s) \\ -\sin(s) + s\cos(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \underline{\overline{OM}(s) = e(-\vec{u}(s) + s\vec{u}'(s))}.$$

**Q11.**

$$\overline{M(s)M(s+2p\pi)} = \overline{M(s)O} + \overline{OM(s+2p\pi)} = \overline{OM(s+2p\pi)} - \overline{OM(s)}$$

$$\overline{M(s)M(s+2p\pi)} = e(-\vec{u}(s+2p\pi) + (s+2p\pi)\vec{u}'(s+2p\pi)) - e(-\vec{u}(s) + \vec{u}'(s))$$

$$\overline{M(s)M(s+2p\pi)} = e(-\vec{u}(s) + (s+2p\pi)\vec{u}'(s)) - e(-\vec{u}(s) + \vec{u}'(s))$$

$$\overline{M(s)M(s+2p\pi)} = e2p\pi\vec{u}'(s)$$

$$\|\overline{M(s)M(s+2p\pi)}\| = \|e2p\pi\vec{u}'(s)\| = e2p\pi\|\vec{u}'(s)\| = e2p\pi\sqrt{(-\sin(s))^2 + (\cos(s))^2}$$

$$\|\overline{M(s)M(s+2p\pi)}\| = e2p\pi$$

Q12.

$$\frac{d\overline{OM}}{ds}(s) = \frac{d\left(e\left(-\vec{u}(s) + s\vec{u}'(s)\right)\right)}{ds} = e\left(-\vec{u}'(s) + \vec{u}'(s) + s\vec{u}''(s)\right)$$

$$\frac{d\overline{OM}}{ds}(s) = -es\vec{u}(s)$$

$$x(s) = e(-\cos(s) - s\sin(s)) \quad \text{donc} \quad \underline{x'(s) = -es\cos(s)}$$

$$y(s) = e(-\sin(s) + s\cos(s)) \quad \text{donc} \quad \underline{y'(s) = -es\sin(s)} \quad (\text{On peut l'obtenir directement par } \frac{d\overline{OM}}{ds}(s))$$

$s$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$
$x'(s)$	+	0	-	-	0
$x(s)$	$e$	$e\frac{3\pi}{2}$	$-e$	$-e\frac{5\pi}{2}$	$e$
$y'(s)$	0	+	+	0	-
$y(s)$	$-e\pi$	$e$	$2e\pi$	$-e$	$-3e\pi$

Q13.

$\frac{d\overline{OM}}{ds}(s) = -es\vec{u}(s)$  donc  $\vec{u}(s)$  est le vecteur directeur de la tangente au point  $M(s)$ , quel que soit  $s$ .

$\frac{d\overline{OM}}{ds}(s+2p\pi) = -es(s+2p\pi)\vec{u}(s+2p\pi) = -es(s+2p\pi)\vec{u}(s)$  donc  $\vec{u}(s)$  est le vecteur directeur de la tangente au point  $M(s+2p\pi)$ , quel que soit  $s$  et quel que soit  $p \in \mathbb{Z}$ .

Donc, les tangentes à  $\mathcal{F}$  au point  $M(s)$  et  $M(s+2p\pi)$  sont parallèles pour  $p \in \mathbb{Z}$  et pour  $s \in \left[\pi; 5\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

Q14.

$$s = \pi + k\frac{\pi}{2} \text{ et } M_k = M\left(\pi + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$k=1 \quad M_1 = M\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad \frac{d\overline{OM}}{ds}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e\left(\frac{3\pi}{2}\right)\vec{u}\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -e\frac{3\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\vec{j}\right) = +e\frac{3\pi}{2}\vec{j}$$

La tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M_1$  est verticale (portée par  $+\vec{j}$ )

$$k=2 \quad M_2 = M(2\pi) \quad \frac{d\overline{OM}}{ds}(2\pi) = -e(2\pi)\vec{u}((2\pi)) = -e2\pi(\cos(2\pi)\vec{i} + \sin(2\pi)\vec{j}) = -e2\pi\vec{i}$$

La tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M_2$  est horizontale (portée par  $-\vec{i}$ )

$$k=3 \quad M_3 = M\left(\frac{5\pi}{2}\right) \quad \frac{d\overline{OM}}{ds}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -e\left(\frac{5\pi}{2}\right)\vec{u}\left(\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) = -e\frac{5\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\vec{j}\right) = -e\frac{5\pi}{2}\vec{j}$$

La tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M_3$  est verticale (portée par  $-\vec{j}$ )

$$k=4 \quad M_4 = M(3\pi) \quad \frac{d\overline{OM}}{ds}(3\pi) = -e(3\pi)\vec{u}((3\pi)) = -e3\pi(\cos(3\pi)\vec{i} + \sin(3\pi)\vec{j}) = +e3\pi\vec{i}$$

La tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M_4$  est horizontale (portée par  $+\vec{i}$ )

## Q15.

$$\overline{M(s)M(s+2p\pi)} = e2p\pi\vec{u}'(s) \text{ donc :}$$

$$\overline{M_k M\left(\pi + \frac{k\pi}{2} + 2p\pi\right)} = \overline{M(s_k)M(s_k + 2p\pi)} = e2p\pi\vec{u}'(s_k)$$

$$\overline{M_k M\left(\pi + \frac{k\pi}{2} + 2p\pi\right)} = e2p\pi\vec{u}'\left(\pi + \frac{k\pi}{2}\right) = e2p\pi \begin{pmatrix} -\sin\left(\pi + \frac{k\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\pi + \frac{k\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = e2p\pi \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_k M\left(\pi + \frac{k\pi}{2} + 2p\pi\right)} = e2p\pi \left( \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\vec{i} - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\vec{j} \right)$$

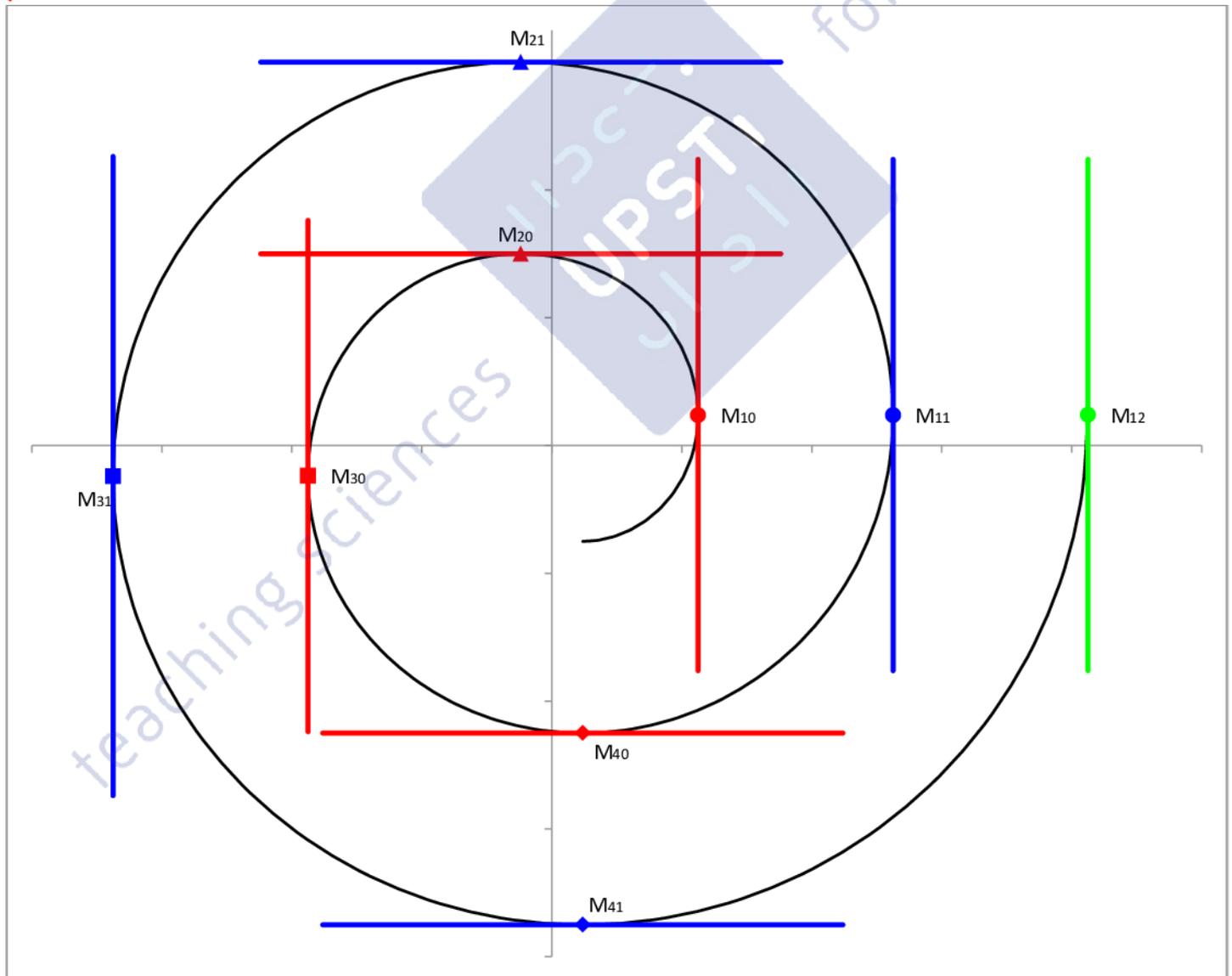
$$k=1 : \overline{M_1 M\left(\pi + \frac{1\pi}{2} + 2p\pi\right)} = +e2p\pi\vec{i}$$

$$k=2 : \overline{M_2 M\left(\pi + \frac{2\pi}{2} + 2p\pi\right)} = +e2p\pi\vec{j}$$

$$k=3 : \overline{M_3 M\left(\pi + \frac{3\pi}{2} + 2p\pi\right)} = -e2p\pi\vec{i}$$

$$k=4 : \overline{M_4 M\left(\pi + \frac{4\pi}{2} + 2p\pi\right)} = -e2p\pi\vec{j}$$

## Q16.



Les points M pour une valeur de k donnée et une valeur de p donnée sont numérotés  $M_{kp}$

## II.2 – Vérification de l'hypothèse d'étanchéité des chambres

## Q17.

La courbe de la spirale mobile  $\Gamma_t$  est obtenue à partir de  $\mathcal{F}$  par une translation de vecteur tournant  $\vec{v}(t)$ , puis par une symétrie par rapport à  $O$ .

Translation de vecteur tournant  $\vec{v}(t)$  :  $\overrightarrow{OM}(s) \rightarrow \overrightarrow{OM}(s) + \vec{v}(t)$

Symétrie par rapport à  $O$  :  $\overrightarrow{OM}(s) + \vec{v}(t) \rightarrow -(\overrightarrow{OM}(s) + \vec{v}(t))$

La spirale Mobile  $\Gamma_t$  (lieu des points N) est obtenue à partir de la courbe  $\mathcal{F}$  (lieu des points M) donc :

$$\overrightarrow{ON}(s, t) = -(\overrightarrow{OM}(s) + \vec{v}(t))$$

## Q18.

$$x(s_{2k-1}(t)) = e(-\cos(s_{2k-1}(t)) - s_{2k-1}(t) \sin(s_{2k-1}(t)))$$

$$\Rightarrow x(s_{2k-1}(t)) = e\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + (2k-1)\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \omega t + (2k-1)\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + (2k-1)\pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow x(s_{2k-1}(t)) = e\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi - \pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi - \pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi - \pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow x(s_{2k-1}(t)) = e\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) - e\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow x(s_{2k-1}(t)) = -x(s_{2k}(t)) - e\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -x(s_{2k}(t)) - e\pi \cos(\omega t)$$

Or  $X(t, s_{2k}(t)) = -e\pi \cos(\omega t) - x(s_{2k}(t))$ , donc  $x(s_{2k-1}(t)) = X(t, s_{2k}(t))$

## Q19.

$$\frac{\partial \overrightarrow{ON}}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial -(\overrightarrow{OM}(s) + \vec{v}(t))}{\partial s} = -\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s}(s) - \frac{\partial \vec{v}}{\partial s}(t) = -\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s) + \vec{0} \quad \frac{\partial \overrightarrow{ON}}{\partial s}(s, t) = -\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s)$$

## Q20.

Le point  $M(s_{2k-1}(t))$  de la courbe  $\mathcal{F}$  correspond, à l'instant  $t$ , au point  $N(t, s_{2k}(t))$  de la courbe  $\Gamma_t$ .

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s_{2k-1}(t)) = -e s_{2k-1}(t) \vec{u}(s_{2k-1}(t))$$

Donc, le vecteur directeur de la tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M(s_{2k-1}(t))$  est le vecteur  $\vec{u}(s_{2k-1}(t))$ . Or :

$$\vec{u}(s_{2k-1}(t)) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + (2k-1)\pi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + (2k-1)\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) - \pi\right) \\ \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) - \pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + 2k\pi\right) \end{pmatrix} = \vec{u}(s_{2k}(t))$$

Le vecteur directeur de la tangente à  $\mathcal{F}$  au point  $M(s_{2k-1}(t))$  est le vecteur  $\vec{u}(s_{2k}(t))$ .

$$\frac{\partial \overrightarrow{ON}}{\partial s}(t, s_{2k}(t)) = -\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s_{2k}(t)) = -e s_{2k}(t) \vec{u}(s_{2k}(t)).$$

Le vecteur directeur de la tangente à  $\Gamma_t$  au point  $N(t, s_{2k}(t))$  est le vecteur  $\vec{u}(s_{2k}(t))$ .

Les 2 tangentes passent par le même point et ont même coefficient directeur : les tangentes sont les mêmes et les spirales sont tangentes en ces points.

Le mouvement entre les 2 spirales est un mouvement de translation qui maintient, à chaque instant (au moins) un point de contact entre elles.

## II.3 – Calcul du rapport volumétrique théorique du compresseur

Q21.

$$\det(\vec{u}(s), \vec{u}'(s)) = \det \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} = \cos^2(s) + \sin^2(s) \quad \underline{\det(\vec{u}(s), \vec{u}'(s)) = 1}$$

Q22.

$$\det\left(\overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) = \det\left(e(-\vec{u}(s) + s\vec{u}'(s)), -es\vec{u}(s)\right) = e^2s \det\left(-\vec{u}(s) + s\vec{u}'(s), -\vec{u}(s)\right)$$

$$\det\left(\overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) = e^2s \left( \det\left(-\vec{u}(s), -\vec{u}(s)\right) + \det\left(+s\vec{u}'(s), -\vec{u}(s)\right) \right) = e^2s \left( 0 + s \det\left(+\vec{u}'(s), -\vec{u}(s)\right) \right)$$

$$\det\left(\overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) = e^2s^2 \det\left(\vec{u}(s), \vec{u}'(s)\right)$$

$$\underline{\det\left(\overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) = e^2s^2}$$

Q23.

D'après les résultats des questions 17 et 19 :  $\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = \det\left(-(\overline{OM}(s) + \vec{v}(t)), -\frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right)$

$$\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = \det\left(\overline{OM}(s) + \vec{v}(t), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right)$$


---


$$\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = \det\left(\overline{OM}(s) + \vec{v}(t), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) = \det\left(\overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right) + \det\left(\vec{v}(t), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s)\right)$$

$$\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = e^2s^2 + \det\left(\vec{v}(t), -es\vec{u}(s)\right) = e^2s^2 + \det\begin{pmatrix} e\pi \cos(\omega t) & -es \cos(s) \\ -e\pi \sin(\omega t) & -es \sin(s) \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = e^2s^2 - e^2s\pi \det\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \cos(s) \\ -\sin(\omega t) & \sin(s) \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = e^2s \left( s - \pi (\cos(\omega t) \sin(s) + \sin(\omega t) \cos(s)) \right)$$

$$\underline{\det\left(\overline{ON}(t, s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t, s)\right) = e^2(s^2 - s\pi \sin(s + \omega t))}$$

Q24.

Intégration par partie :  $\int_a^b u(s) v'(s) ds = [uv]_a^b - \int_a^b u'(s) v(s) ds$

Hypothèses : les fonctions  $u$  et  $v$  sont des fonctions dérivables, à dérivées continues.

Ici, on pose  $u(s) = s$  et  $v(s) = -\cos(s + \omega t)$ . On alors  $u'(s) = 1$  et  $v'(s) = \sin(s + \omega t)$ , donc :

$$\int s \sin(s + \omega t) ds = [-s \cos(s + \omega t)] - \int -\cos(s + \omega t) ds = -s \cos(s + \omega t) + \sin(s + \omega t) + cte$$

Soit la primitive de  $s \rightarrow s \sin(s + \omega t)$  est la fonction  $s \rightarrow -s \cos(s + \omega t) + \sin(s + \omega t)$  à une constante près

**Q25.**

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \left( \int_{s_4(t)}^{s_6(t)} \det \left( \overline{ON}(t,s), \frac{\partial \overline{ON}}{\partial s}(t,s) \right) ds - \int_{s_3(t)}^{s_5(t)} \det \left( \overline{OM}(s), \frac{d\overline{OM}}{ds}(s) \right) ds \right)$$

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \left( \int_{s_4(t)}^{s_6(t)} e^2 (s^2 - s\pi \sin(s + \omega t)) ds - \int_{s_3(t)}^{s_5(t)} e^2 s^2 ds \right) = \frac{e^2}{2} \left( \int_{s_4(t)}^{s_6(t)} s^2 ds - \pi \int_{s_4(t)}^{s_6(t)} s \sin(s + \omega t) ds - \int_{s_3(t)}^{s_5(t)} s^2 ds \right)$$

$$\mathcal{A}(t) = \frac{e^2}{2} \left( \left[ \frac{s^3}{3} \right]_{s_4(t)}^{s_6(t)} - \pi \left[ -s \cos(s + \omega t) + \sin(s + \omega t) \right]_{s_4(t)}^{s_6(t)} - \left[ \frac{s^3}{3} \right]_{s_3(t)}^{s_5(t)} \right)$$

$$\text{Or : } s_k(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t + k\pi = \frac{2k+1}{2} \pi - \omega t \text{ et } s_k(t) + \omega t = \frac{2k+1}{2} \pi$$

$$\text{donc : } s_3(t) = \frac{7\pi}{2} - \omega t, s_4(t) = \frac{9\pi}{2} - \omega t, s_5(t) = \frac{11\pi}{2} - \omega t \text{ et } s_6(t) = \frac{13\pi}{2} - \omega t$$

$$\text{avec : } s_4(t) + \omega t = \frac{9}{2} \pi \text{ et } s_6(t) + \omega t = \frac{13}{2} \pi$$

On trouve alors :

$$\left[ -s \cos(s + \omega t) + \sin(s + \omega t) \right]_{s_4(t)}^{s_6(t)} = -\left( \frac{13}{2} \pi - \omega t \right) \cos\left( \frac{13}{2} \pi \right) + \sin\left( \frac{13}{2} \pi \right) + \left( \frac{9}{2} \pi - \omega t \right) \cos\left( \frac{9}{2} \pi + \omega t \right) - \sin\left( \frac{9}{2} \pi \right)$$

$$\left[ -s \cos(s + \omega t) + \sin(s + \omega t) \right]_{s_4(t)}^{s_6(t)} = (-0 + 1 + 0 - 1) = 0$$

$$\text{Donc : } \mathcal{A}(t) = \frac{e^2}{6} \left( \left( \frac{13\pi}{2} - \omega t \right)^3 - \left( \frac{9\pi}{2} - \omega t \right)^3 - \left( \frac{11\pi}{2} - \omega t \right)^3 + \left( \frac{7\pi}{2} - \omega t \right)^3 \right)$$

**Q26.**

$$r = \frac{\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)}{\mathcal{A}\left(\frac{5\pi}{2\omega}\right)} = \frac{\frac{e^2}{6} \left( \left( \frac{13\pi}{2} - \pi \right)^3 - \left( \frac{9\pi}{2} - \pi \right)^3 - \left( \frac{11\pi}{2} - \pi \right)^3 + \left( \frac{7\pi}{2} - \pi \right)^3 \right)}{\frac{e^2}{6} \left( \left( \frac{13\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \right)^3 - \left( \frac{9\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \right)^3 - \left( \frac{11\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \right)^3 + \left( \frac{7\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \right)^3 \right)}$$

$$r = \frac{\left( \left( \frac{11\pi}{2} \right)^3 - \left( \frac{7\pi}{2} \right)^3 - \left( \frac{9\pi}{2} \right)^3 + \left( \frac{5\pi}{2} \right)^3 \right)}{\left( (4\pi)^3 - (2\pi)^3 - (3\pi)^3 + (\pi)^3 \right)} = \frac{(11^3 - 7^3 - 9^3 + 5^3)}{8(64 - 8 - 27 + 1)} = \frac{384}{8 \cdot 30} = \frac{48}{30}$$

Le rapport volumétrique est  $r = \frac{8}{5}$

**II.4 – Validation de la performance attendue pour le rapport volumétrique****Q27.**

$r = 1.6 > 1.5$  donc le rapport volumétrique attendu est bien obtenu par cette modélisation.

**II.5 – Critique du modèle****Q28.**

Dans le cas où l'étanchéité entre les spirales fixe et mobile n'est pas totalement effective, alors le rapport volumétrique chute. L'objectif de rapport volumétrique attendu peut alors ne pas être atteint.

## Partie III – Méthode de détermination des masselottes additionnelles

## III.1 – Mise en place de la problématique

## III.2 – Modèle simplifié

## III.3 – Modélisation des caractéristiques d'inertie de la spirale mobile (2)

Q29.

$$\frac{d\overline{OM}}{ds}(s) = -es\vec{u}(s), \text{ donc } \left\| \frac{d\overline{OM}}{ds}(s) \right\| = es \left\| \vec{u}(s) \right\| = es\sqrt{\cos^2(s) + \sin^2(s)} \text{ et } \left\| \frac{d\overline{OM}}{ds}(s) \right\| = es$$

Q30.

$$\left\| \overline{OM}(s) \right\| = e\sqrt{(-\cos(s) - s\sin(s))^2 + (-\sin(s) + s\cos(s))^2}$$

$$\left\| \overline{OM}(s) \right\| = e\sqrt{\cos^2(s) + s^2\sin^2(s) + 2s\cos(s)\sin(s) + \sin^2(s) + s^2\cos^2(s) - 2s\cos(s)\sin(s)} = e\sqrt{1+s^2}$$

La longueur  $l$  de la spirale fixe est :

$$l = \left\| \overline{OM}\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right\| - \left\| \overline{OM}(\pi) \right\| = e\sqrt{1 + \left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} - e\sqrt{1 + \pi^2}, \text{ donc : } l = e\left(\sqrt{1 + \left(\frac{11\pi}{2}\right)^2} - \sqrt{1 + \pi^2}\right)$$

Q31.

La longueur  $l_2$  de la spirale mobile est :  $l = e\left(\sqrt{1 + \frac{121\pi^2}{4}} - \sqrt{1 + \pi^2}\right)$ . La masse  $m_2$  de la spirale mobile est :  $m_2 = \sigma_2 \cdot l_2$

$$\text{ou } m_2 = \sigma_2 \cdot e\left(\sqrt{1 + \frac{121\pi^2}{4}} - \sqrt{1 + \pi^2}\right)$$

$$m_2 = 6.5 \cdot 0.008 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{121\pi^2}{4}} - \sqrt{1 + \pi^2}\right) \approx 6.5 \cdot 0.008 \cdot (\sqrt{302.5} - \sqrt{11}) \approx 6.5 \cdot 0.008 \cdot \sqrt{302.5} \approx 6.5 \cdot 0.008 \cdot \sqrt{3 \cdot 100} \approx 6.5 \cdot 0.008 \cdot 20 \approx 6.5 \cdot 0.16 \approx 1$$

$$m_2 \approx 6.5 \cdot 0.008 \cdot 20 \approx 6.5 \cdot 0.16 \approx 1$$

La masse  $m_2$  de la spirale mobile est d'environ 1kg.

## III.4 – Détermination des actions mécaniques dans la liaison pivot entre l'arbre moteur (1) et le bâti (0).

Q32.

$$\vec{\gamma}(G_1, 1/0) = \left( \frac{d^2\overline{OG}_1}{dt^2} \right)_0 = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d\overline{OG}_1}{dt} \right) \right)_0 = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{dg_1\vec{x}_1}{dt} \right) \right)_0 = g_1 \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right) \right)_0$$

$$\text{Or } \left( \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right)_0 = \dot{\theta}_{10}\vec{y}_1 \text{ et } \left( \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_0 = -\dot{\theta}_{10}\vec{x}_1$$

$$\vec{\gamma}(G_1, 1/0) = g_1 \left( \frac{d\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1}{dt} \right)_0 = g_1 (\ddot{\theta}_{10}\vec{y}_1 - \dot{\theta}_{10}^2\vec{x}_1) \text{ Or } \ddot{\theta}_{10} = 0 \text{ donc } \vec{\gamma}(G_1, 1/0) = -g_1\dot{\theta}_{10}^2\vec{x}_1$$

Q33.

$$\vec{\gamma}(G_2, 2/0) = \left( \frac{d^2\overline{OG}_2}{dt^2} \right)_0 = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d\overline{OG}_2}{dt} \right) \right)_0 = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d(e\vec{x}_1 + g_2\vec{x}_0)}{dt} \right) \right)_0 = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d(e\vec{x}_1)}{dt} + \vec{0} \right) \right)_0 = e \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right) \right)_0$$

$$\vec{\gamma}(G_2, 2/0) = -e\dot{\theta}_{10}^2\vec{x}_1$$

**Q34.**

$$\vec{R}_d(S/O) = \vec{R}_d(1/O) + \vec{R}_d(2/O) = -m_1 \vec{\gamma}(G_1, 1/O) - m_2 \vec{\gamma}(G_2, 2/O) = -m_1 g_1 \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1 - m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1$$

$$\vec{R}_d(S/O) = -(m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1$$

**Q35.**

$$\vec{\sigma}(O, 1/O) = I(O, 1) \cdot \vec{\Omega}(1/O) + \vec{0} \quad \text{car } O \text{ est un point fixe de } \mathcal{R}_0$$

$$\vec{\sigma}(O, 1/O) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{10} \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} -E_1 \dot{\theta}_{10} \\ 0 \\ C_1 \dot{\theta}_{10} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)} \quad \vec{\sigma}(O, 1/O) = -E_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 + C_1 \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0$$

**Q36.**

$$\vec{\delta}(O, 1/O) = \left( \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O, 1/O) \right)_0 + \vec{0} \quad \text{car } O \text{ est un point fixe de } \mathcal{R}_0$$

$$\vec{\delta}(O, 1/O) = \left( \frac{d(-E_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 + C_1 \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0)}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d(-E_1 \dot{\theta}_{10} \vec{x}_1)}{dt} \right)_0 + \left( \frac{d(C_1 \dot{\theta}_{10} \vec{z}_0)}{dt} \right)_0 = -E_1 \left( \frac{d\dot{\theta}_{10} \vec{x}_1}{dt} \right)_0 + \vec{0}$$

$$\vec{\delta}(O, 1/O) = -E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \vec{y}_1$$

**Q37.**

Dans un mouvement de translation, le moment dynamique est nul en son centre de gravité :  $\vec{\delta}(G_2, 2/O) = \vec{0}$

**Q38.**

$$\vec{\delta}(O, 2/O) = \vec{\delta}(G_2, 2/O) + \vec{OG}_2 \wedge \vec{R}_d(2/O) = \vec{0} + (e \vec{x}_1 + g_2 \vec{x}_0) \wedge -m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1 = -g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 (\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_1)$$

$$\vec{\delta}(O, 2/O) = -g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{z}_0$$

**Q39.**

$$\vec{\delta}(O, S/O) = \vec{\delta}(O, 1/O) + \vec{\delta}(O, 2/O) \quad \vec{\delta}(O, S/O) = -E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \vec{y}_1 - g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{z}_0$$

**Q40.**

- Système isolé :  $S = \{1, 2\}$
- Bilan des actions mécaniques extérieures :
  - Le poids des pièces 1 et 2 est négligé
  - L'action de 3 sur 1 et 2 est négligée
  - L'action du fluide sur 1 et 2 est négligée

- La liaison pivot entre 0 et 1 :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & L_{10} \\ Y_{10} & M_{10} \\ Z_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$

- L'action du moteur sur 1 :  $\{\mathcal{T}_{mot \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Cm \end{Bmatrix}_{b_0}$

- PFD appliqué en  $O$ , à  $S$ , dans  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen :  $\{\mathcal{T}_{\vec{s} \rightarrow S}\} = \{\mathcal{D}_{S/O}\}$

$$\text{Or } \vec{R}_d(S/O) = -(m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1 = -(m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \cos \theta_{10} \vec{x}_0 - (m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{y}_0$$

$$\text{et } \vec{\delta}(O, S/O) = -E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \vec{y}_1 - g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{z}_0 = E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{x}_0 - E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \cos \theta_{10} \vec{y}_0 - g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \vec{z}_0$$

$$\begin{cases} X_{10} + 0 = -(m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \cos \theta_{10} \\ Y_{10} + 0 = -(m_1 g_1 + m_2 e) \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \\ Z_{10} + 0 = 0 \\ L_{10} + 0 = E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \\ M_{10} + 0 = -E_1 \dot{\theta}_{10}^2 \cos \theta_{10} \\ 0 + Cm = -g_2 m_2 e \dot{\theta}_{10}^2 \sin \theta_{10} \end{cases}$$

$X_{10}$ ,  $Y_{10}$ ,  $L_{10}$ ,  $M_{10}$  sont variables dans le temps car elles dépendent de  $\theta_{10}$ .

Le compresseur n'est pas équilibré.

#### Q41.

Avec des masselottes rajoutées :

- à une distance  $d$  de  $O$ , de telle sorte que  $-(m_1 g_1 + m_2 e) + m_{\text{Masselotte}} d = 0$ ,  $X_{10}$  et  $Y_{10}$  seront nulles.

Le centre de gravité de l'ensemble  $S'$  est alors sur l'axe de rotation  $(O, \vec{z}_0)$  (Equilibrage statique)

- de telle sorte que la matrice d'inertie de l'ensemble soit de la forme :  $I(O, S') = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 & 0 \\ 0 & B'_1 & 0 \\ 0 & 0 & C'_1 \end{pmatrix}_{(x_1, y_1, z_0)}$ ,

$L_{10}$  et  $M_{10}$  seront nulles car les produits d'inertie sont nuls. (Equilibrage dynamique)

#### Q42.

**Hypothèse : l'inertie du joint d'oldham (3) est négligée.** Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation rectiligne cyclique suivant  $\vec{y}_0$ . Cela influencera  $Y_{10}$ , mais pas  $X_{10}$ ,  $L_{10}$  et  $M_{10}$ . L'influence sera d'autant plus faible que la masse sera faible.

Cette variation ne peut pas être annulée par des masselottes pour équilibrer le système

**Hypothèse : les effets de la pesanteur sont négligés.** Concernant 1, si la pièce est équilibrée,  $Z_{10}$  support cet effort constant. Concernant 2, le centre de gravité étant mobile,  $L_{10}$  et  $M_{10}$  seront sollicitées de manière cyclique. Ici encore, l'influence sera d'autant plus faible que la masse de 2 sera faible. Idem si on prend en compte la pesanteur sur 3.

Ces variations ne peuvent pas être annulées par des masselottes pour équilibrer le système

**Hypothèse : les actions mécaniques transmises...** Les actions transmises par les 2 liaisons glissières provoquent des sollicitations cycliques qui affecteront  $X_{10}$ ,  $Y_{10}$ ,  $L_{10}$  et  $M_{10}$

Ces variations ne peuvent pas être annulées par des masselottes pour équilibrer le système

Le modèle proposé permet de déterminer des masselottes afin d'équilibrer au mieux le système. Des écarts entre l'équilibrage attendu et l'équilibrage réalisé viennent des différentes hypothèses faites. Ces écarts seront d'autant plus faibles que les masses, les inerties et les actions mécaniques mises en jeu seront faibles.

Cette modélisation convient pour l'étude de l'équilibrage effectué avec des masselottes.

Pour un équilibrage plus efficace, permettant de limiter les écarts entre théorie et réalité, il faudrait :

- Affiner le modèle afin de prendre en compte les phénomènes négligés.
- Utiliser une solution d'équilibrage plus complexe.