

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2018

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Corrigé UPSTI - Sujet CCP PSI 2018

Mobilité assistée à l'aide d'une canne robotisée

Partie I - Étude de la marche

Q1. Selon la figure 4, en marche saine, les évolutions des efforts normaux sur chaque jambe et les durées de chacune des phases sont identiques. La figure 5 montre que, lors d'une marche perturbée, la phase de double appui est plus longue, 20% au lieu de 10% du cycle de marche - phase rassurante et moins douloureuse - et que la jambe invalide (gauche ici) est moins sollicitée avec un temps d'appui plus court (30% au lieu de 40%). Les efforts normaux sont en moyenne équivalents en intensité pour les deux marches, cependant leurs évolutions diffèrent dans le cas de la marche perturbée avec un effort quasi constant lors de l'appui de la jambe invalide et un effort également plus constant lors de l'appui de la jambe valide.

Q2. La canne prend en charge une partie des efforts normaux supportés par la jambe invalide. On relève une valeur moyenne maximale $N_{MAX} \approx 0,25 \times F_{MAX}$ avec $F_{MAX} = m_{sujet} \times g = 71,4 \times 9,81 \approx 700 \text{ N}$. Donc $N_{MAX} \approx 175 \text{ N}$.

Partie II - Étude de l'architecture du système de transformation de mouvement de l'axe linéaire

Q3. L'utilisation des éléments roulants dans la réalisation des liaisons permet de satisfaire au mieux aux exigences suivantes : pas de jeu radial, faible résistance au déplacement (Id 3.1.6.2.1 - Guider l'axe en translation) et limiter la consommation énergétique (Id 4 - Respecter l'environnement), système réversible (Id8) et l'autonomie (Id3.11).

Q4. $h = N_S - E_S + m$ avec :

N_S , le nombre d'inconnues statiques, $N_S = 2 \times 4 + 5 + 5 = 18$,

E_S , le nombre d'équations statiques, $E_S = 6 \times (3 - 1) = 12$,

m le nombre de mobilité, ici $m = 1$ une seule mobilité utile et pas de mobilité interne.

Finalement, $h = 18 - 12 + 1 = 7$. Le modèle proposé est hyperstatique d'ordre 7.

Q5. Le guidage en translation est réalisé par deux liaisons pivot glissant en parallèle. Ce guidage est hyperstatique d'ordre $h = 2 \times 4 - 6 + 1 = 3$. Les conditions géométriques à respecter pour les pièces 2 et 3 sont donc :

- que les axes (O_3, y_2) et (O'_3, y_2) soient parallèles (contraintes d'orientation θ_{x_2} et θ_{z_2}),

- que la distance O_3 et O'_3 soit la même (contrainte de distance δ_{x_2}).

Q6. L'avantage d'un guidage avec deux éléments est une plus grande raideur, ce qui permet de satisfaire à l'exigence 3.1.6.2.1. L'inconvénient est qu'il impose des contraintes d'orientation et dimensionnelle qui doivent être considérées lors de la fabrication et l'assemblage des pièces.

Q7. Les liaisons pivot glissant sont en parallèle, donc $\{V_{3/2}^{O_3}\} = \{V_{3/2}^{O_{3'}}\} = \{V_{3/2}^{eq}\}$ en $O_{3'}$.

On pose $\{V_{3/2}^{O_3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_3}^y & V_{O_3}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3, \mathcal{B}_2}$ et $\{V_{3/2}^{O_{3'}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{O_{3'}}^y & V_{O_{3'}}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_{3'}, \mathcal{B}_2}$. Or

$$\begin{aligned} \vec{V}(O_{3'}, 3/2) &= \vec{V}(O_3, 3/2) + \vec{\Omega}(3/2) \wedge \overrightarrow{O_3 O_{3'}} \\ &= V_{O_3}^y \cdot \vec{j}_2 + \omega_{O_3}^y \cdot \vec{j}_2 \wedge 2a \cdot \vec{i}_2 \\ &= V_{O_3}^y \cdot \vec{j}_2 - 2a \cdot \omega_{O_3}^y \cdot \vec{k}_2 \end{aligned}$$

L'égalité précédentes des torseurs en $O_{3'}$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} 0 = 0 = \omega_{eq}^x \\ \omega_{O_3}^y = \omega_{O_{3'}}^y = \omega_{eq}^y \\ 0 = 0 = \omega_{eq}^z \\ 0 = 0 = V_{eq}^x \\ V_{O_3}^y = V_{O_{3'}}^y = V_{eq}^y \\ -2a \cdot \omega_{O_3}^y = 0 = V_{eq}^z \end{cases}$$

La dernière ligne donne $\omega_{O_3}^y = 0$
donc $\omega_{eq}^y = \omega_{O_3}^y = 0$

On obtient finalement

$$\{V_{3/2}^{O_3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{eq}^y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_{3'}, \mathcal{B}_2}$$

Le torseur équivalent est donc celui d'une liaison glissière de direction y_2 .

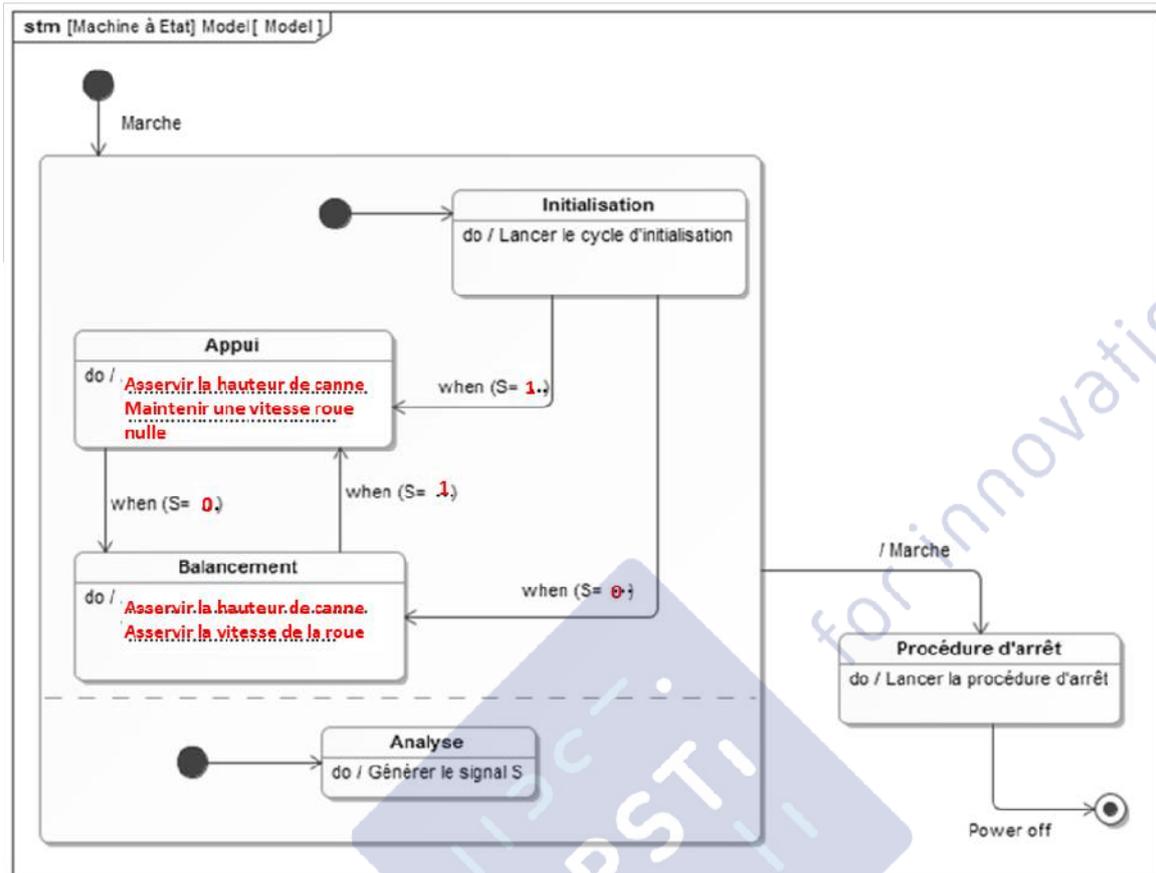
Partie III - Étude de l'exigence Id3.1.6 « Élaborer la commande des axes asservis »

Q8. On peut écrire la fermeture géométrique suivante : $\vec{IA} + \vec{AH} = \vec{IH}$, c'est à dire $R \cdot \vec{j}_0 + \ell(t) \cdot \vec{j}_3 = x \cdot \vec{i}_0 + h \cdot \vec{j}_0$.

Par projection sur \vec{j}_0 , il vient :

$$R + \ell(t) \cdot \cos(\theta(t)) = h = h_0$$

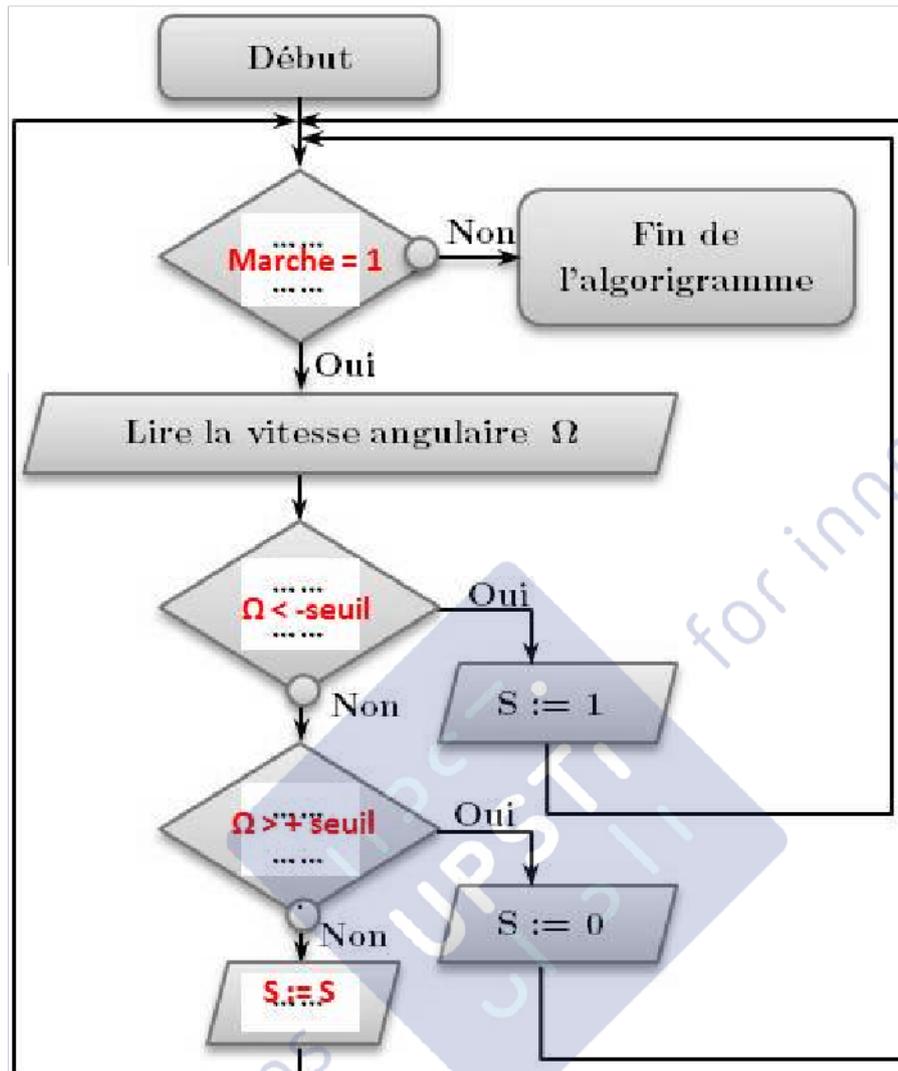
Q9. On propose le diagramme d'états suivant :



Correction du diagramme d'états, document réponse DR1.

Q10. La valeur maximale de Ω est environ 130 rad/s. On choisit donc une valeur de la variable *Seuil* telle que $Seuil = 1,3$ rad/s.

Q11. On propose l'algorithme suivant :



Correction de l'algorithme, document réponse DR2.

Partie IV - Étude de la phase de balancement

$$\text{Q12. } \vec{V}(H,3/2) = \left[\frac{d \vec{AH}}{dt} \right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\frac{d}{dt} (\ell(t) \cdot \vec{j}_2) \right]_{\mathcal{B}_2} = \dot{\ell}(t) \cdot \vec{j}_2$$

$$\text{Q13. } \vec{V}(H,2/0) = \vec{V}(H,2/1) + \vec{V}(H,1/0)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \vec{V}(H,2/1) &= \vec{V}(A,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{AH} \\ &= \vec{0} + \omega \cdot \vec{k}_0 \wedge \ell \cdot \vec{j}_2 \\ &= -\ell \cdot \omega \cdot \vec{i}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{V}(H,1/0) &= \vec{V}(I,1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{IH} \\ &= \vec{0} + (\vec{\Omega}(1/2) + \vec{\Omega}(2/0)) \wedge (R \cdot \vec{j}_0 + \ell \cdot \vec{j}_2) \\ &= (-\omega \cdot \vec{k}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{k}_0) \wedge (R \cdot \vec{j}_0 + \ell \cdot \vec{j}_2) \\ &= (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 + (\omega - \dot{\theta}) \cdot \ell \cdot \vec{i}_2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{V}(H,2/0) = (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 - \dot{\theta} \cdot \ell \cdot \vec{i}_2$$

$$\text{Q14. } \vec{V}(H,3/0) = \vec{V}(H,3/2) + \vec{V}(H,2/0) \text{ donc}$$

$$\vec{V}(H,3/0) = \dot{\ell} \cdot \vec{j}_2 + (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 - \dot{\theta} \cdot \ell \cdot \vec{i}_2$$

Q15. D'après le cahier des charges,

$$\begin{cases} \vec{V}(H,3/0) \cdot \vec{i}_0 = V \\ \vec{V}(H,3/0) \cdot \vec{j}_0 = 0 \end{cases}$$

En réalisant les projections, il vient :

$$\begin{cases} -\dot{\ell} \cdot \sin(\theta) - \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + (\omega - \dot{\theta}) \cdot R = V \\ \dot{\ell} \cdot \cos(\theta) - \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La première équation permet d'isoler ω , tel que :

$$\omega = \frac{1}{R} (V + R \cdot \dot{\theta} + \dot{\ell} \cdot \sin(\theta) + \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)).$$

La seconde équation, en remarquant que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ lors du cycle de marche, permet d'isoler $\dot{\ell}$:

$$\dot{\ell} = \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \tan(\theta).$$

Il vient :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left(1 + \ell \cdot \frac{\tan(\theta) \cdot \sin(\theta)}{R} + \ell \cdot \frac{\cos(\theta)}{R} \right) \cdot \dot{\theta}$$

ou encore :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left(1 + \ell \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{R \cdot \cos(\theta)} + \ell \cdot \frac{\cos^2(\theta)}{R \cdot \cos(\theta)} \right) \cdot \dot{\theta}$$

et après simplification :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left(1 + \frac{\ell}{R \cdot \cos(\theta)} \right) \cdot \dot{\theta}$$

Q16. D'après le tableau 4 (données moteurs), la vitesse de rotation nominale du moteur est $N_n = 3260$ tr/min, soit environ 341 rad/s. Avec le rapport de transmission retenu de 1/30 pour le réducteur de roue, la vitesse nominale de la roue est de : $341/30 \approx 11,36$ rad/s $>$ 11 rad/s, ce qui permet de satisfaire aux conditions de vitesse de rotation dans le cas d'une marche à allure rapide.

Q17. On applique la méthode de Willis au train épicycloïdal. Le roulement sans glissement au niveau des engrènements donne :

$$\frac{\omega_{P2/PS}}{\omega_{P1/PS}} = -\frac{Z_{P1}}{Z_S} \times \frac{Z_S}{Z_{P2}} = -\frac{Z_{P1}}{Z_{P2}},$$

la relation de Willis s'écrit donc : $\frac{\omega_{P2/2} - \omega_{PS/2}}{\omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}} = -\frac{Z_{P1}}{Z_{P2}}$

or ici $\omega_{P2/2} = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{PS/2}}{\omega_{P1/2} - \omega_{PS/2}} &= \frac{Z_{P1}}{Z_{P2}} \\ \Leftrightarrow (Z_{P1} + Z_{P2}) \cdot \omega_{PS/2} &= Z_{P1} \cdot \omega_{P1/2} \\ \Leftrightarrow R_1 = \frac{\omega_{PS/2}}{\omega_{P1/2}} &= \frac{Z_{P1}}{Z_{P1} + Z_{P2}} \end{aligned}$$

L'application numérique donne : $R_1 = \frac{18}{18 + 82} = 0,18$.

Pour obtenir le rapport de $r = 1/30$ du réducteur, il est donc nécessaire d'utiliser 2 étages de réduction car $R_1 \times R_1 = 0,0324 \approx 1/30$.

Partie V - Étude de la phase d'appui

Étude de l'exigence « Transmettre les efforts du patient »

Q18. La liaison entre la roue 1 et le sol 0 est une liaison ponctuelle, l'action mécanique du sol 0 sur la roue 1 en I peut donc être modélisée par un glisseur.

On isole la canne complète, ensemble $\{ 1 + 2 + 3 \}$. Cet ensemble est à l'équilibre sous l'action de deux glisseurs en I et en H. D'après le principe fondamental de la statique, ces glisseurs sont donc égaux, opposés et de même support la droite d'action (IH).

Q19. L'équilibre est assuré si $\beta(t) < \varphi$. Si l'intensité de l'action \vec{F}_p du patient en H évolue, l'équilibre reste inchangé car le support est toujours la droite d'action (IH). L'équilibre sera assuré tant que le moteur est capable de fournir le couple nécessaire pour maintenir la position angulaire de la roue. Cet équilibre est un équilibre de type arc-boutement.

Q20. La fermeture géométrique $\vec{IA} + \vec{AH} = \vec{IH}$ s'écrit avec la paramétrage donné :

$R \cdot \vec{j}_0 + \ell \cdot \vec{j}_2 = \lambda(t) \cdot \vec{v}$. En projetant cette équation dans la base \mathcal{R}_0 , on obtient :

$$/ \vec{i}_0 : 0 - \ell \cdot \sin(\theta) = -\lambda \cdot \sin(\beta) \quad (\text{eq1})$$

$$/ \vec{j}_0 : R + \ell \cdot \cos(\theta) = \lambda \cdot \cos(\beta) \quad (\text{eq2})$$

On obtient la relation demandée en éliminant le paramètre λ . Pour cela on considère $\frac{(\text{eq1})}{(\text{eq2})}$ en

s'assurant que $\beta \neq \pi/2$, il vient :

$$\tan(\beta) = \frac{\ell \cdot \sin(\theta)}{R + \ell \cdot \cos(\theta)}$$

Q21. On relève sur la figure 3 (évolution des angles de la jambe) un angle maximal de la hanche de l'ordre de 15° lors du cycle de marche. Donc $\theta \leq 15^\circ$, ce qui implique : $\tan(\beta) \leq \frac{(h-R)}{h} \cdot \tan(\theta)$, l'application numérique donne avec $R=0,05$ et $h \in [0,85;1]$:

$$\beta \leq 14,28^\circ \text{ pour } h = 1 \text{ m,}$$

$$\beta \leq 14,15^\circ \text{ pour } h = 0,85 \text{ m.}$$

Il faut donc avoir un angle de frottement $\varphi > 14,3^\circ$, donc un coefficient de frottement $f = \tan(\varphi) > 0,255$. Le cahier des charges stipule un coefficient de frottement minimal de 0,4 (exigence Id 3.1.3), la condition est donc bien vérifiée.

Q22. On isole la roue 1. Le bilan des actions mécaniques est :

- l'action de 2 sur 1 en A, liaison pivot d'axe (A, z_0) ,
- l'action du sol 0 sur 1 en I, glisseur de résultante $\vec{T}_{0 \rightarrow 1}$,
- l'action de l'arbre de sortie du reducteur, moment de résultante $-C_R \cdot \vec{k}_0$.

La roue 1 est supposée à l'équilibre, d'après le théorème des moments statiques en A selon \vec{k}_0 , il vient :

$$-C_R + (\vec{T}_{0 \rightarrow 1} \wedge \vec{IA}) \cdot \vec{k}_0 = 0,$$

$$C_R = (I_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{v} \wedge R \cdot \vec{j}_0) \cdot \vec{k}_0,$$

$$C_R = -R \cdot I_{0 \rightarrow 1} \cdot \sin(\beta).$$

Or d'après la Question 18, $\|\vec{T}_{0 \rightarrow 1}\| = \|\vec{F}_p\| = 175 \text{ N}$.

L'application numérique donne, à la limite de l'adhérence $\beta = \varphi = \arctan(0,4)$:

$$|C_R| \simeq 3,25 \text{ N.m.}$$

Q23. Le couple à fournir par le moteur est donc $C_{mR} = \frac{C_R}{30 \cdot \eta_{trans}}$, soit $C_{mR} = \frac{5}{30 \cdot 0,9} \simeq 0,185$ N.m.

Le couple nominal du moteur est donné dans le tableau 4 (données moteurs) : $C_n = 0,279 \text{ N.m}$. Le moteur est donc capable de fournir le couple nécessaire.

Étude de l'exigence « Commander l'axe linéaire »

Q24. Dans le référentiel lié à la canne et supposé galiléen, le solide 3 a un mouvement de translation de direction y_2 , donc :

$$Ec_3 = \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot V_m^2,$$

le solide 4, constitué de la vis et du rotor du moteur, a un mouvement de rotation d'axe (O_2, y_2) , donc :

$$Ec_4 = \frac{1}{2} \cdot (J_{rotor} + J_{vis}) \cdot \omega_m^2.$$

L'énergie cinétique de l'ensemble \mathcal{S} s'écrit :

$$Ec_S = \frac{1}{2} \cdot (M_3 \cdot V_m^2 + (J_{rotor} + J_{vis}) \cdot \omega_m^2) \text{ et avec } V_m = \frac{pas}{2\pi} \cdot \omega_m, \text{ on peut mettre } Ec_S \text{ sous la forme :}$$

$$Ec_S = \frac{1}{2} \cdot \left(M_3 \cdot \left(\frac{pas}{2\pi} \right)^2 + J_{rotor} + J_{vis} \right) \cdot \omega_m^2.$$

$$\text{On identifie alors } J_{eq} = M_3 \cdot \left(\frac{pas}{2\pi} \right)^2 + J_{rotor} + J_{vis}.$$

$$\text{L'application numérique donne : } J_{eq} = 1 \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \right)^2 + 21,9 \cdot 10^{-7} + 1,53 \cdot 10^{-6} \simeq 3,95 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2.$$

Q25. Les puissances extérieures au système sont :

- la puissance du moteur $P_{mot} = C_m \cdot \omega_m$
- la puissance due à l'action du patient $P_{patient} = -F_p \cdot V_m$.

La puissance intérieure due à l'ensemble des effets des frottements visqueux s'exprime : $P_{int} = -f \cdot \omega_m^2$.

On fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites et que les puissances extérieures autres sont nulles (non précisé dans l'énoncé).

Q26. Dans le référentiel lié à la canne et supposé galiléen, le théorème de l'énergie-puissance appliqué à l'ensemble S s'écrit :

$$\frac{d}{dt} E_{CS} = P_{mot} + P_{patient} + P_{int}.$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{eq} \cdot \omega_m^2 \right) = C_m \cdot \omega_m - F_p \cdot V_m - f \cdot \omega_m^2,$$

$$\Leftrightarrow J_{eq} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m = C_m \cdot \omega_m - F_p \cdot \frac{pas}{2\pi} \cdot \omega_m - f \cdot \omega_m^2.$$

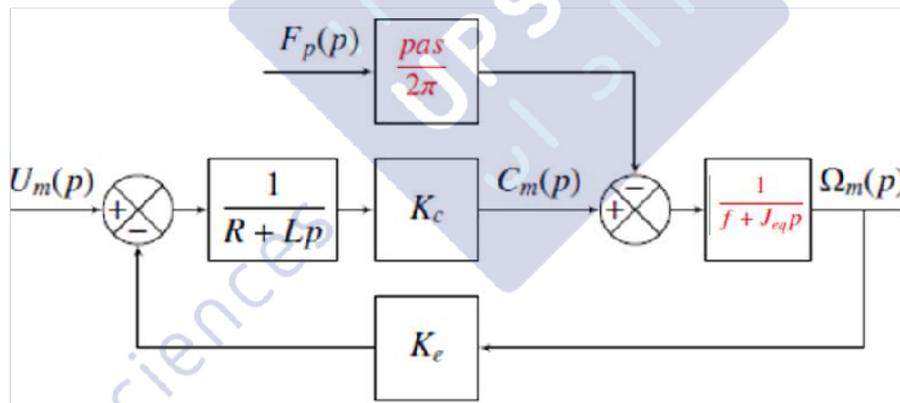
L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m + f \cdot \omega_m = C_m - F_p \cdot \frac{pas}{2\pi}.$$

Q27. En considérant nulles les conditions initiales, la transformée de Laplace de l'équation de mouvement est :

$$(J_{eq} \cdot p + f) \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - \frac{pas}{2\pi} \cdot F_p(p).$$

On peut alors compléter les blocs du document réponse DR3.



Correction du document réponse DR3.

Q28. D'après les données, $K_{ve} = \frac{pas}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \approx 4,77 \cdot 10^{-4}$ m/rad.

Le codeur a une résolution de 500 impulsions par tour, donc $K_{codeur} = \frac{500}{2\pi} \approx 79,6$ imp/rad.

Q29. D'après le schéma bloc, $\epsilon(p) = K_{adapt} \cdot X_c(p) - K_{codeur} \cdot \frac{X(p)}{K_{ve}}$. Ainsi pour vérifier $\epsilon(p) = 0$ lorsque $X_c(p) = X(p)$, il faut prendre :

$$K_{adapt} = \frac{K_{codeur}}{K_{ve}}. \text{ L'application numérique donne } K_{adapt} = \frac{79,6}{4,77 \cdot 10^{-4}} \approx 166\,700 \text{ imp/m.}$$

Q30. L'allure des courbes de gain et de phase de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte montre clairement que le comportement est équivalent à celui d'un système du second ordre (avec coefficient d'amortissement $z > 1$, car les courbes présentent deux cassures nettes en $\omega_{c1} = 1/T_1$ et $\omega_{c2} = 1/T_2$) associé à un intégrateur pur (pente de -20 dB/dec quand $\omega \rightarrow 0$ pour la courbe de gain et asymptote à -90° quand $\omega \rightarrow 0$ pour la courbe de phase). La forme canonique factorisée peut donc se mettre sous la forme :

$$H_{BO_1}(p) = K_{BO} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$$

On relève sur les courbes :

$$\omega_{c1} \approx 10^4 \text{ rad/s, donc } T_1 = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms,}$$

$$\omega_{c2} \approx 10^2 \text{ rad/s, donc } T_2 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms,}$$

et en remarquant que pour $\omega = 10^0 = 1 \text{ rad/s}$, $G_{BO} = 20 \cdot \log(K_{BO}) = -30 \text{ dB}$, on obtient $K_{BO} = 10^{-30/20} \approx 0,032 \text{ s}^{-1}$.

Remarque : en toute rigueur, il manque la définition de FTBO, on imagine avec la suite (figure 16) que $H_{BO_1}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ homogène à une distance ; K_{BO} est donc alors homogène à s^{-1} . Mais d'après DR3 on pourrait aussi considérer que $H_{BO_1}(p) = \frac{\theta_{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$ avec $\varepsilon(p)$ homogène à une distance ; K_{BO} serait alors homogène à $\text{rad}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Q31. Une cadence de 113 pas par minute correspond à une fréquence de marche de l'ordre de $\frac{113}{60} \approx 1,88 \text{ Hz}$.

Q32. $F_{MAX} = 4 \text{ Hz}$ correspond à une sollicitation de pulsation $\omega_{MAX} = 4 \times 2\pi \approx 25 \text{ rad/s}$.

On constate que $\omega_{MAX} < \omega_{c2} = 100 \text{ rad/s} \ll \omega_{c1} = 10^4 \text{ rad/s}$.

Pour $\omega < \omega_{MAX}$, le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à K_{BO} . L'approximation de $H_{BO}(p)$ par K_{BO}/p avec $K_{BO} = 1/30 \approx 0,032$ est donc acceptable.

Q33. En appliquant la formule de Black, il vient $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}/p}{1 + K_{corr} \cdot K_{BO}/p}$, avec $K_{corr} = 1$, on obtient :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BO}}{p + K_{BO}}, \text{ soit sous forme canonique : } H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} \cdot p}.$$

La fonction de transfert est donc celle d'un système du 1er ordre, de gain unitaire et de constante de temps $1/K_{BO} = 30 \text{ s}$.

Les performances de ce système sont donc :

- système stable car système du 1er ordre \Rightarrow cdcf vérifié,
- système précis car de gain unitaire \Rightarrow cdcf vérifié,
- système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre \Rightarrow cdcf vérifié,
- $\text{tr}5\% = 3 \times 30 = 90 \text{ s} \Rightarrow$ cdcf non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms.

Le système avec $K_{corr} = 1$ est donc trop lent.

Q34. Il faut alors augmenter K_{corr} , tel que $\text{tr}5\% = 3 \times \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leq 60 \text{ ms}$. Donc

$$K_{corr} \geq \frac{3}{60 \cdot 10^{-3} \cdot K_{BO}}. \text{ L'application numérique donne } K_{corr} \geq 1500.$$

Q35. L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1er ordre car un dépassement est observé. Avec $K_{corr} = 1500$, le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain K_{BO} , en effet cette valeur élevée de K_{corr} fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme $\frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$ ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.

Q36. Le critère de précision est satisfait du fait de la présence du terme intégrateur en $\frac{1}{p}$ dans la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Pour assurer un 1er dépassement $D1\% \leq 5\%$, il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortissement z , tel que $z \geq 0,7$. On détermine l'expression de $H_{BF}(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée, afin d'identifier z .

D'après la formule de Black,
$$H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot H_{BO}(p)}{1 + K_{corr} \cdot H_{BO}(p)} = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO} + p \cdot (1 + \tau_{BO} \cdot p)}$$

La forme canonique de $H_{BF}(p)$ est donc :

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p^2}$$

Par identification,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}} \text{ et } z = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}},$$

$$\text{donc, } z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_{BO} \cdot K_{corr} \cdot K_{BO}}}.$$

La condition $z \geq 0,7$ implique donc $K_{corr} \leq \frac{1}{(2 \times 0,7)^2 \cdot \tau_{BO} \cdot K_{BO}}$.

L'application numérique donne $K_{corr} \leq 1700$. On prend donc $K_{corr}^{MAX} = 1700$.

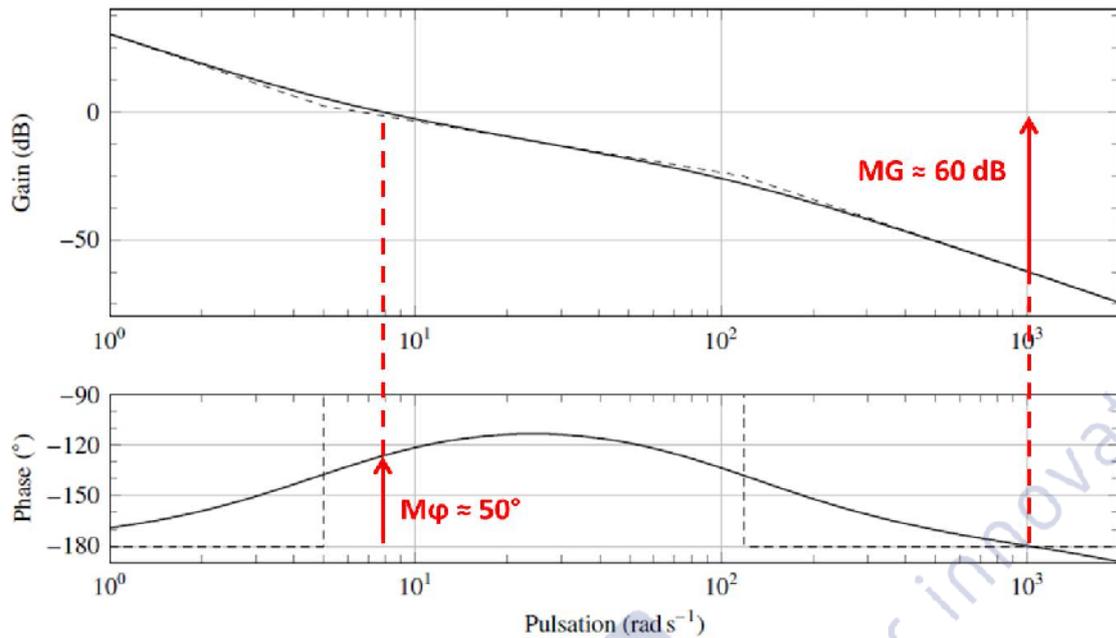
Q37. D'après l'abaque du temps de réponse réduit, pour $z = 0,7$ on relève $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$. Or

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}, \text{ donc } tr_{5\%} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}}.$$

L'application numérique donne : $tr_{5\%} \approx 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms} \Rightarrow$ cdcf vérifié !

Q38. Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.

Q39. D'après la figure page suivante, on relève une marge de Gain $M_G \approx 60 \text{ dB}$ et une marge de Phase $M_\phi \approx 50^\circ$. Avec ces valeurs le cahier des charges ($M_G = 45 \text{ dB}$ et $M_\phi = 35^\circ$) est vérifié.



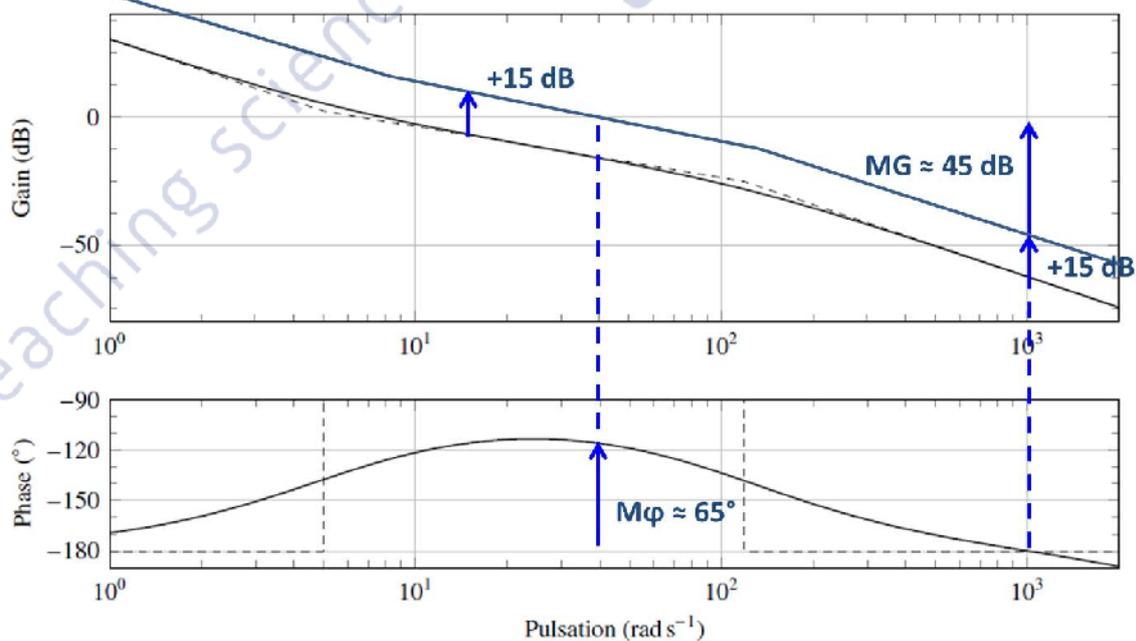
Q40. La modification de la valeur du gain K_{corr} n'affecte que la courbe de gain. L'augmentation de K_{corr} va faire remonter la courbe de gain du système en boucle ouverte. Graphiquement, on observe que c'est le critère sur la marge de Gain qui limite la remontée de la courbe de gain (voir figure page suivante). La courbe de gain peut donc être remontée de +15 dB, on relève alors une marge de Gain $M_G \approx 45$ dB et une marge de Phase $M_\phi \approx 65^\circ$.

Initialement on avait $K_{corr}^{init} = 1000$, pour remonter la courbe de gain de +15 dB, il faudra prendre K_{corr}^{new} tel que :

$$20 \times \log(K_{corr}^{new}) = 20 \times \log(K_{corr}^{init}) + 15$$

$$\Leftrightarrow K_{corr}^{new} = K_{corr}^{init} \times 10^{15/20}$$

L'application numérique donne $K_{corr}^{new} \approx 5620$.

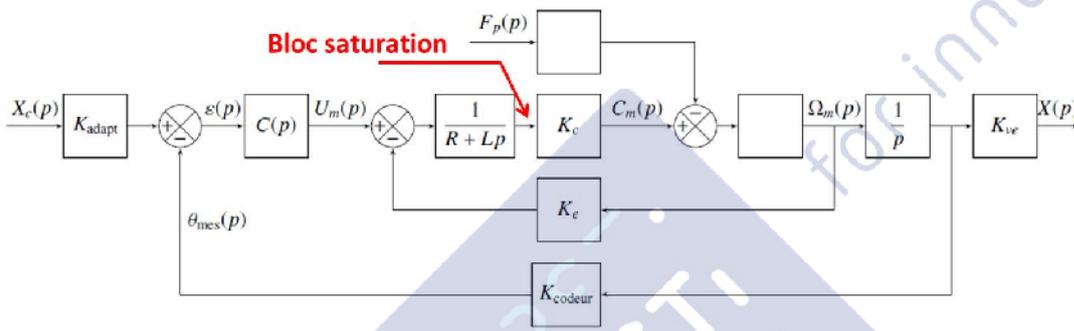


Q41. Avec cette correction la réponse temporelle respecte l'ensemble des critères du cahier des charges :

- le système est stable et $M_G \approx 45$ dB et $M_\phi \approx 65^\circ \Rightarrow$ cdcf vérifié,
- le système est précis \Rightarrow cdcf vérifié,
- système ne présente pas de dépassement \Rightarrow cdcf vérifié,
- $tr5\% \approx 50$ ms \Rightarrow cdcf vérifié (<60 ms).

Par contre, on relève un courant $I_{mot}^{MAX} \approx 35$ A. Or la carte ELMO ne supporte qu'un courant maximal de 20 A. Le contrôleur ELMO ne permet donc pas de réaliser cette commande.

Q42. Dans la modélisation proposée, ce bloc saturation doit être placé entre le bloc $\frac{1}{R + Lp}$ et le bloc K_C , car c'est sur cette branche que l'on retrouve la variable intensité (on rappelle que $C_m(p) = K_C \cdot I_m(p)$).



Q43. La prise en compte de la saturation rend le système un plus lent, on a alors $tr5\% \approx 55$ ms ce qui reste acceptable vis-à-vis du cahier des charges (<60 ms). Les autres performances restent inchangées.

Partie VI - Synthèse – Étude de l'exigence Id3.1 « Assister la marche »

Q44. Le cahier des charges (performance Id 7) impose un écart de hauteur de main de 3 cm pour un cycle de marche. Sans correction, l'écart peut atteindre jusqu'à 4,5 cm, avec correction l'écart est limité à 2,5 cm maxi ce qui vérifie le cdcf.

Avec correction les variations de hauteur de la main sont donc moins importantes au commencement de la phase d'appui. Ceci apporte un confort dans l'utilisation avec le sentiment d'avoir une canne plus rigide (moins d'affaissement) lors de l'appui.

Q45. Le cahier des charges stipule comme performance à atteindre pour l'assistance de la marche (cadre Id 7) :

- un écart maximal sur l'angle d'orientation entre la canne et la jambe de 20° ,
- le respect de l'exigence de suivi du pied, l'appui au sol de la canne doit se situer entre l'avant et l'arrière du pied de la jambe invalide.

Pour les deux allures de marche, l'exigence de suivi de pied est respectée car la courbe de position de la canne reste comprise entre les courbes de position de l'avant du pied et de l'arrière du pied (c'est à la limite de l'avant du pied pour le cas de la marche rapide).

Pour ce qui concerne l'exigence sur l'angle d'orientation, pour les deux allures l'exigence est respectée car les écarts restent inférieurs à 20° . Mise à part la phase d'appui en allure normale, l'orientation de la canne est en retard par rapport à l'orientation de la jambe, et ce retard est d'autant plus important que l'allure de la marche est élevée.

On peut donc conclure que ce réglage des paramètres d'asservissement permet de satisfaire les performances liées à la synchronisation de la canne avec le cycle locomoteur à différentes allures.