

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2011

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Corrigé X-ENS 2011 PSI Système de détection et de poursuite Sirius

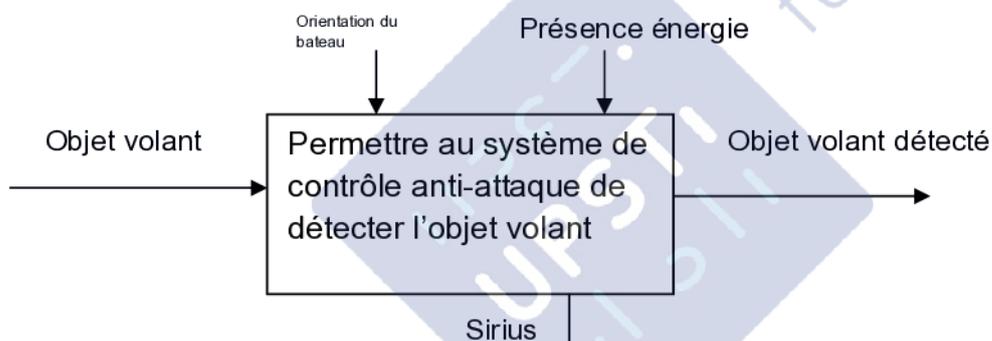
Partie 1 : Présentation de Sirius

Q1) Expliquer la raison pour laquelle Sirius doit être situé en haut du mât du bateau.

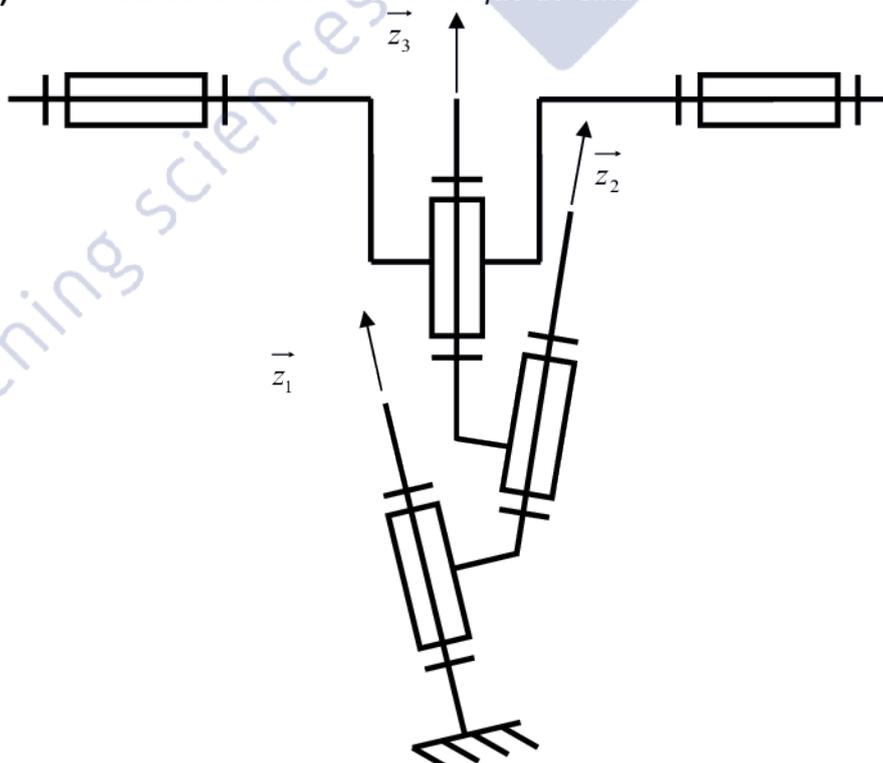
Le système Sirius repère la signature thermique des objets volants. Il doit donc être situé le plus loin possible du bateau afin de limiter les perturbations dues aux éléments du bateau.

De plus, en plaçant le système au plus haut, il est possible de détecter des objets très loin, étant donné la vitesse des missiles, c'est une nécessité.

Q2) Proposer un diagramme SADT de niveau A-0 du Sirius.



Q3) Réaliser un schéma cinématique de Sirius.



- Q4)** Expliquer le fonctionnement des capteurs utilisés, et déterminer le nombre de bits qu'ils doivent avoir au minimum pour obtenir la précision souhaitée.

Nota : Il y a apparemment ici une confusion au niveau du terme « engrenage » utilisé. Je suppose que le concepteur du sujet voulait dire « pignon » ou roue dentée.

Un codeur optique absolu est constitué d'un disque comportant n pistes concentriques. Ces pistes sont codées en code Gray (code binaire réfléchi).



Nombre de bits pour avoir la précision voulue :

La circonférence du pignon vaut : $\pi * 263 = 826.24mm$

On veut pouvoir détecter $1\mu m$ sur cette périphérie. Il faut donc plus de

$$\frac{826,24}{0,001} = 826240 \text{ positions mesurables sur un tour.}$$

$$2^{20} = 1048576 > 826240$$

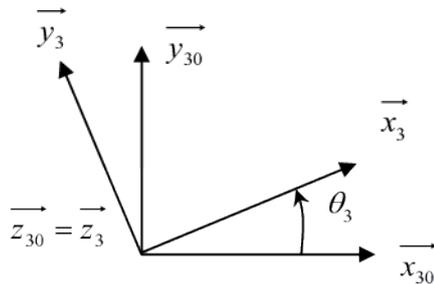
Il faut utiliser un codeur ayant 20 bits.

Partie 2

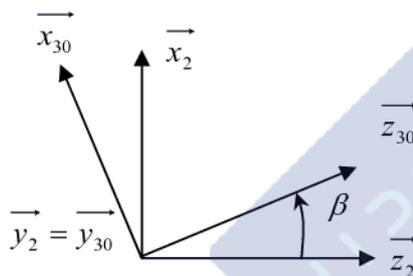
- Q5)** Expliquer pourquoi, en l'absence de perturbation sur le bateau, cette position de référence n'est pas adaptée au comportement attendu de Sirius.

Si on suppose que les bases b_0 et b_G sont confondues, la tête principale 3 en position neutre sera inclinée de β autour de l'axe \vec{y}_G . Il n'y a donc pas coïncidence entre les bases b_3 et b_G dans ce cas.

- Q6)** Déterminer les matrices de passage $P_{3 \rightarrow 30}$ et $P_{30 \rightarrow 2}$ permettant respectivement de passer de la base b_3 à la base b_{30} , et de la base b_{30} à la base b_2 . Exprimer ces matrices en fonction des paramètres θ_3 et β .



$$\begin{cases} \vec{x}_{30} = \cos \theta_3 \vec{x}_3 - \sin \theta_3 \vec{y}_3 \\ \vec{y}_{30} = \sin \theta_3 \vec{x}_3 + \cos \theta_3 \vec{y}_3 \\ \vec{z}_{30} = \vec{z}_3 \end{cases} \text{ donc } P_{3 \rightarrow 30} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_{30} + \sin \beta \vec{z}_{30} \\ \vec{y}_2 = \vec{y}_{30} \\ \vec{z}_2 = -\sin \beta \vec{x}_{30} + \cos \beta \vec{z}_{30} \end{cases} \text{ donc } P_{30 \rightarrow 2} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- Q7)** Déterminer l'expression de la matrice de passage $P_{3 \rightarrow 0}$ en fonction des six matrices précédentes. Déterminer la valeur de $P_{3 \rightarrow 0}$ pendant la phase de suivi.

$$P_{3 \rightarrow 0} = P_{10 \rightarrow 0} * P_{1 \rightarrow 10} * P_{20 \rightarrow 1} * P_{2 \rightarrow 20} * P_{30 \rightarrow 2} * P_{3 \rightarrow 30}$$

Le calcul est un peu long, mais non demandé.

Pendant la phase de suivi, $P_{3 \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ car à chaque instant on doit avoir

$$b_3 = b_G = b_0.$$

- Q8)** En déduire les familles de solution possibles pour $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, et faire l'application numérique.

Il y a deux possibilité de choix pour θ_1 :

$$\begin{cases} \theta_1 = \pm \arccos\left(\frac{\cos \beta}{1 + \cos \beta}\right) \\ \theta_2 = \theta_1 \\ \theta_3 = \pi + \theta_1 \end{cases}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} \theta_1 = 60,6^\circ \\ \theta_2 = 60,6^\circ \\ \theta_3 = 240,6^\circ \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta_1 = -60,6^\circ \\ \theta_2 = -60,6^\circ \\ \theta_3 = 119,4^\circ \end{cases}$$

Q9) Si Sirius était dans une phase de scrutation (à la vitesse de rotation ω autour de \vec{z}_3) et le bateau en position neutre, quelle serait l'expression des angles $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$.

L'angle $\theta_3(t)$ sera donc linéaire :

$$\begin{cases} \theta_3(t) = \theta_{3n} + \omega t \\ \theta_1(t) = \theta_{1n} \\ \theta_2(t) = \theta_{2n} \end{cases}$$

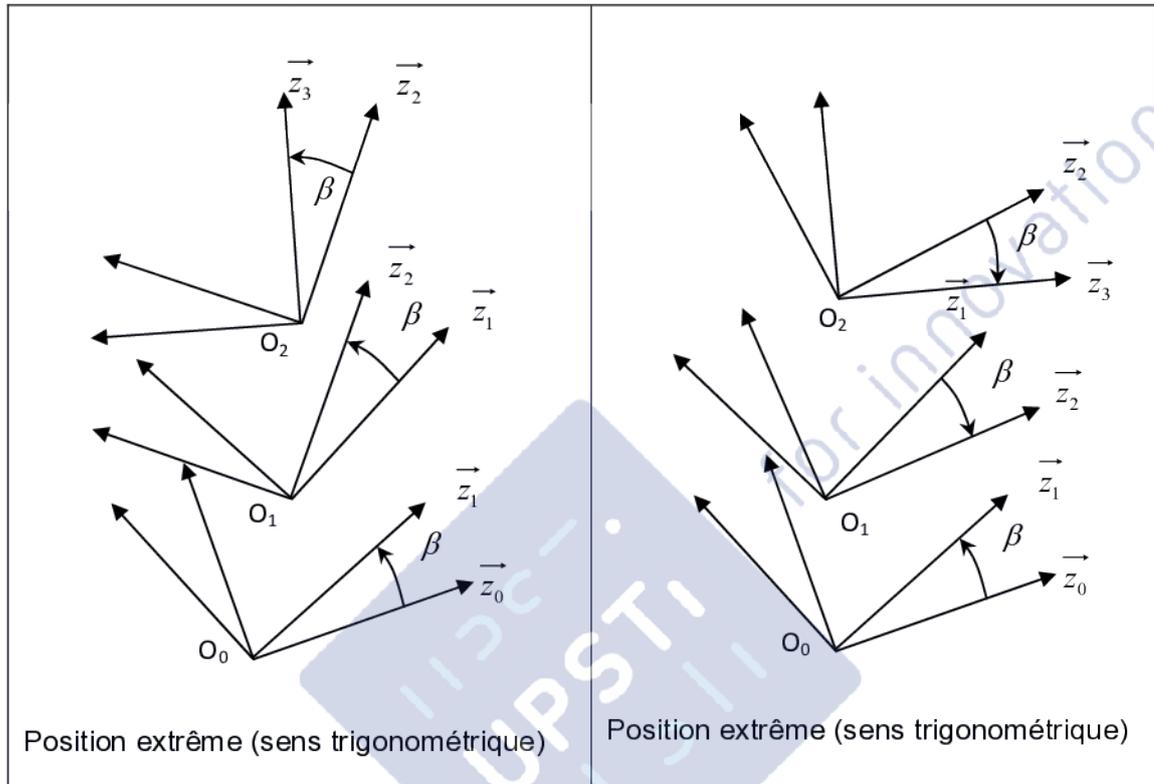
$\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont constants car il n'est pas nécessaire d'avoir $b_3 = b_G$. Il suffit juste d'avoir $\vec{z}_3 = \vec{z}_G$.

Q10) Dans le cas d'une perturbation de lacet seule, donner l'expression de $(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3)$ en fonction de ψ_1 .

Une perturbation de lacet seule n'occasionnera pas de variation des angles $(\delta\theta_1, \delta\theta_2)$. Seul l'angle $\delta\theta_3$ devra compenser le lacet : $\delta\theta_3 = -\psi_1$

Q11) Dessiner dans le plan (\vec{x}_0, \vec{z}_0) , les deux positions extrêmes de Sirius

permettant des écarts angulaires maximaux entre les vecteurs \vec{z}_0 et \vec{z}_3 . En déduire les amplitudes (positives et négatives) de tangage qu'il serait théoriquement possible de corriger avec le système STAB.



Il est donc théoriquement possible de corriger un angle de tangage compris dans l'intervalle : $[-\beta; 3\beta]$.

Q12) Pour une perturbation de tangage pendant la phase de suivi, déterminer la nouvelle expression que doit avoir $P_{3 \rightarrow 0}$ en fonction de l'angle de tangage ψ_t .

Le bateau ayant tourné d'un angle ψ_t autour de l'axe \vec{y}_0 , on doit avoir :

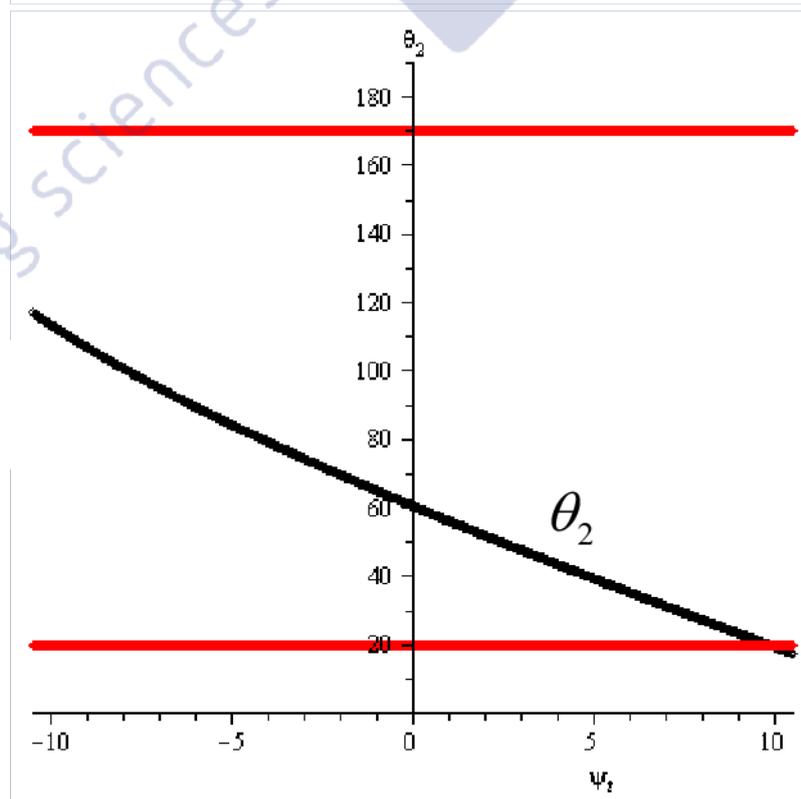
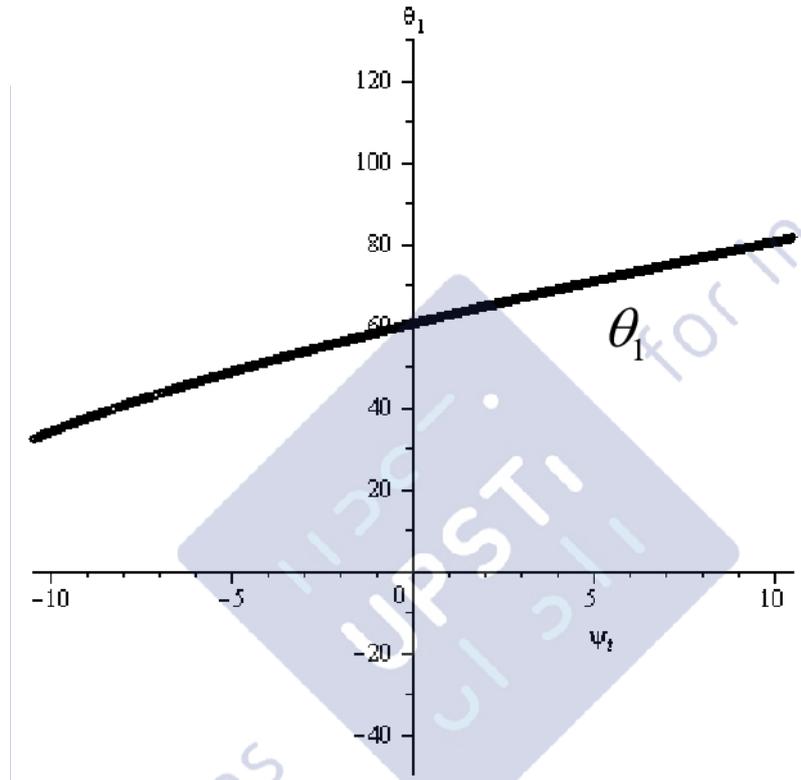
$$P_{3 \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} \cos \psi_t & 0 & -\sin \psi_t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_t & 0 & \cos \psi_t \end{bmatrix}$$

Q13) Déterminer le nombre de solutions $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ possibles et celle qui est appliquée en pratique dans Sirius. Tracer alors l'évolution approximative de θ_1 et θ_2 en fonction de ψ_t , pour $\psi_t \in [-10,5^\circ; 10,5^\circ]$.

En notant $A = \frac{\cos \beta - Q}{\cos \psi_t - Q}$, les solutions des équations données sont :

$$\begin{cases} \theta_1 = \pm \arccos(A) \\ \theta_2 = \frac{\theta_1}{|\theta_1|} \arctan\left(\frac{2A \cos \beta \sqrt{1-A^2}}{\cos^2 \beta (1-A^2) - A^2}\right) \\ \theta_3 = \pi + \theta_1 \end{cases}$$

Ce système a donc 2 solutions mais on choisit la solution positive pour θ_1 .



θ_1 reste bien compris dans l'intervalle $[-50^\circ ; 130^\circ]$, par contre θ_2 sort de l'intervalle $[20^\circ ; 170^\circ]$ pour $\psi_r > 10^\circ$.

Q14) *Expliquer à quoi correspond la position notée N sur la figure 8. Vérifier qu'elle est compatible avec les résultats précédemment obtenus.*

La position notée N correspond à la position « Neutre » (i.e. sans tangage ni roulis). Si l'on se met dans le cas $\psi_r = 0$ dans la deuxième série d'équations de l'annexe, et en utilisant l'équation 9, on trouve :

$$S^2 \cos \theta_1 + C^2 = C$$

Ce qui donne :

$$\cos \theta_1 = \frac{C(1-C)}{S^2} = \frac{C(1-C)}{1-C^2} = \frac{C}{1+C}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \beta}{1 + \cos \beta}$$

On retrouve bien l'expression donnée après la question 7 et donc aussi les $60,6^\circ$ de la question 8 (quand $\psi_r = 0^\circ$).

Q15) *Expliquer en quoi le point de fonctionnement D peut être critique pour le dimensionnement des moteurs pilotant les rotations du système STAB.*

Sur le schéma de droite de la figure 8, le point D est situé au bout d'une « pointe ». Cette situation est gênante car pour en sortir, il faut faire attention à ne pas arriver en butée mécanique (trait noir plein). La commande est donc délicate dans ce cas. Le problème est similaire au niveau de la seconde « pointe ». En outre le point D est aussi à la limite géométrique acceptable par le système pour θ_1 et θ_2 .

Q16) *A partir de la figure 8, déterminer les amplitudes extrêmes de tangage (resp. de roulis) que le système peut corriger en cas de roulis nul (resp. de tangage nul). Expliquer brièvement pourquoi ces amplitudes de tangage (resp. de roulis) ne peuvent pas être corrigées quel que soit le roulis (resp. le tangage).*

En cas de roulis nul, le système peut théoriquement corriger un tangage de $\pm 12^\circ$. En cas de tangage nul, le système peut théoriquement corriger un roulis de $\pm 30^\circ$. Ces valeurs ne peuvent pas être atteintes quel que soit le roulis car la zone de fonctionnement n'est pas rectangulaire sur la figure 8.

Q17) *Donner l'amplitude de tangage qu'il reste cependant possible de corriger quel que soit l'angle de roulis compris dans la plage $\psi_r \in [-15^\circ ; 15^\circ]$.*

La zone de fonctionnement entoure un rectangle centré sur N de largeur 30° et de hauteur 20° . Donc pour un roulis de $\pm 15^\circ$, on peut compenser un tangage de $\pm 10^\circ$.

Q18) Conclure sur la capacité de Sirius à satisfaire les critères de compensation de perturbations de la fonction FS2.

Le système Sirius permet bien de compenser un roulis de $\pm 15^\circ$ ainsi qu'un tangage de $\pm 10,5^\circ$.

Q19) Donner, en l'absence de perturbation extérieure, la plus simple configuration $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ permettant d'obtenir la position correcte de Sirius pendant la phase de suivi.

Sans socle 0 et sans tangage ni roulis, les combinaisons $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ permettant d'avoir $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 = \vec{z}_0$ sont :

$$\begin{cases} \theta_1 \text{ quelconque} \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 \text{ quelconque} \end{cases}$$

La configuration la plus simple est donc sûrement :

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Cette configuration correspond à celle de la figure 6.

Q20) Montrer que lorsque $\psi_i = 0$, il y a une infinité de positions $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ possibles pour le système, et les expliciter. En déduire l'incidence sur la stabilité de Sirius lors d'une compensation de tangage.

On remplace ψ_i dans les équations de l'annexe 1 (équations sans socle 0) :

$$\begin{cases} C \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = C \cos \theta_3 \\ C \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = -C \sin \theta_3 \\ S \cos \theta_2 = S \\ -C \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin \theta_3 \\ -C \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \theta_3 \\ -S \sin \theta_2 = 0 \\ -S \cos \theta_1 = -S \cos \theta_3 \\ -S \sin \theta_1 = S \sin \theta_3 \\ C = C \end{cases}$$

On simplifie :

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = 1 \\ -\sin \theta_1 = \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 = \cos \theta_3 \end{cases}$$

Au final :

$$\begin{cases} \theta_2 = 0 \\ \theta_1 = -\theta_3 \end{cases} . \text{ Il y a une infinité de solutions.}$$

Q21) *Enoncer la fonction technique réalisée par le socle 0.*

Comme vu dans la question précédente, l'absence de socle rend la commande du dispositif difficile car il n'y a pas qu'une seule solution au système d'équations. Avec le socle 0, il faudrait qu'il y ait un roulis de 15° pour se retrouver dans la situation sans socle, ce qui est à la limite du cahier des charges. On peut donc énoncer la fonction technique réalisée par le socle 0 ainsi :
 « Assurer une seule commande par situation. »

Partie 3

Q22) *Expliquer la démarche générale, les principes physiques et les modèles qui permettent d'obtenir une telle équation, et donner la signification physique des différents termes (leurs expressions ne sont pas demandées).*

Pour obtenir les 3 équations scalaires données, il faut successivement isoler {1+2+3}, puis {2+3} et enfin {3}. On écrit à chaque fois l'équation du moment dynamique projeté sur les axes (O_1, \vec{z}_1) , puis (O_2, \vec{z}_2) et enfin (O_3, \vec{z}_3) .

$M(\vec{\theta})$ est un vecteur contenant les inerties de chaque ensemble isolé autour des axes (O_i, \vec{z}_i) .

$h(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}, t)$ correspond aux couples appliqués sur chaque système isolé (couple de pesanteur, couples de frottement...). Il peut aussi contenir des termes inertiels.
 C_{pert} correspond aux couples perturbateurs.

Q23) *Montrer que, en régime permanent de scrutation ($\ddot{\theta}_3 = 0, \dot{\theta}_3 = \omega$ et $\theta_4 = \theta_5 = 0$) les actions du vent sur le système OBS se résument à un torseur au point G_3 de la*

forme
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = R_y \vec{y}_0 \\ \vec{M} = M_z \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_3} . \text{ Donner l'expression des composantes } R_y \text{ et } M_z \text{ de ce torseur,}$$

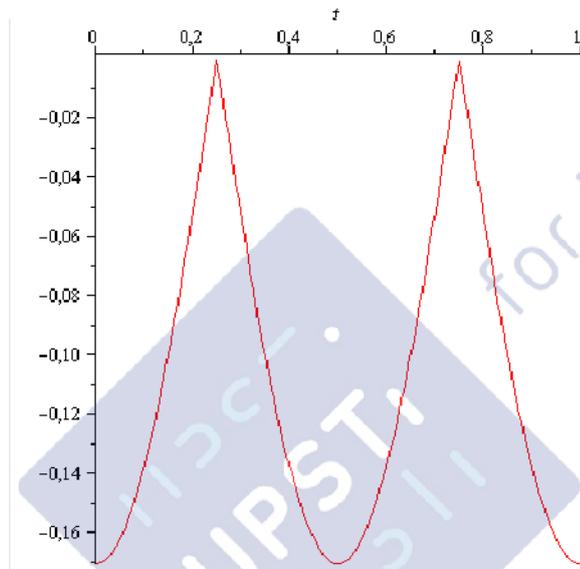
en fonction des données r, a, L, p_v et ω et tracer leur évolution temporelle.

Le vent est modélisé par une densité surfacique d'effort $-p_v \vec{y}_0$. On néglige l'influence de la surface latérale.

$$R_y = -p_v \cdot S_{proj} \text{ avec } S_{proj} = (4La + 2\pi r^2) |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})|$$

$$R_y = -p_v \cdot (4La + 2\pi r^2) |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})|$$

Allure de R_y en N (tracé pour $p_v=1\text{N/m}^2$ et $\omega = 6,28\text{rad/s}$).



L'action du vent étant uniformément répartie sur chacune des faces, on multiplie l'effort de pression par la distance entre l'axe (G_i, \vec{y}_0) et l'axe (G_i, \vec{y}_3) :

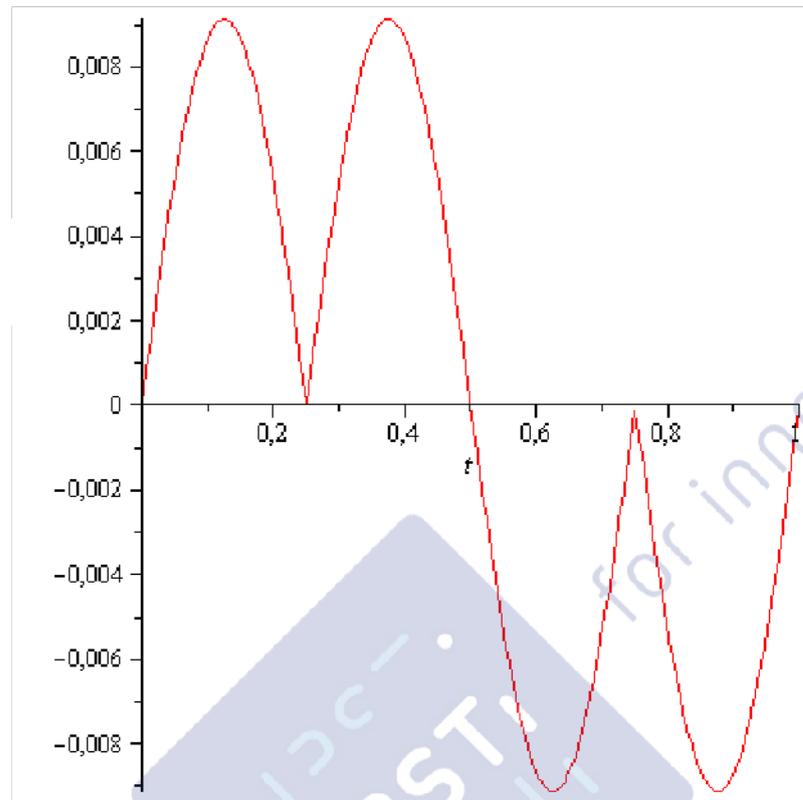
$$M_z \vec{z}_0 = \iint_{S_3} \vec{G}_3 \vec{M} \wedge p_v dS \vec{y}_0 + \iint_{S_4} \vec{G}_3 \vec{M} \wedge p_v dS \vec{y}_0 + \iint_{S_5} \vec{G}_3 \vec{M} \wedge p_v dS \vec{y}_0$$

$$M_z = p_v \cdot S_3 \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot a \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) + p_v \cdot S_4 \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot \left[\frac{h}{2} \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) + (r + L) \cos(\theta_3 - \theta_{3n}) \right] - p_v \cdot S_5 \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot \left[-\frac{h}{2} \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) + (r + L) \cos(\theta_3 - \theta_{3n}) \right]$$

$$M_z = p_v \cdot 4aL \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot a \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) + p_v \cdot \pi r^2 \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot h \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n})$$

$$M_z = p_v \cdot |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})| \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) \cdot [4a^2L + \pi hr^2]$$

Allure de M_z en N.m (tracé pour $p_v=1\text{N/m}^2$ et $\omega = 6,28\text{rad/s}$).



Q24) Citer un mécanisme simple qui fonctionne sur le même principe que l'ancien système de stabilisation.

Un bras de robot 3 axes ou une suspension à la cardan (pour un gyroscope) fonctionne comme l'ancien système.

Q25) Calculer pour le système de stabilisation ancienne génération et dans les conditions précédentes, les couples moteurs nécessaires pour contrer les actions du vent et maintenir Sirius dans sa position de scrutation. Donner leurs valeurs extrêmes au cours du temps.

- On isole 3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_3, \vec{z}_0) :

$$C_{3v} + M_z = 0$$

$$C_{3v} = -M_z$$

Pour C_3 , il est difficile de trouver la valeur extrême. Je me contenterai de la

majorer : $|C_{3v\max}| < p_v \cdot [4a^2L + \pi hr^2]$

- On isole 2+3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_2, \vec{x}_0) :

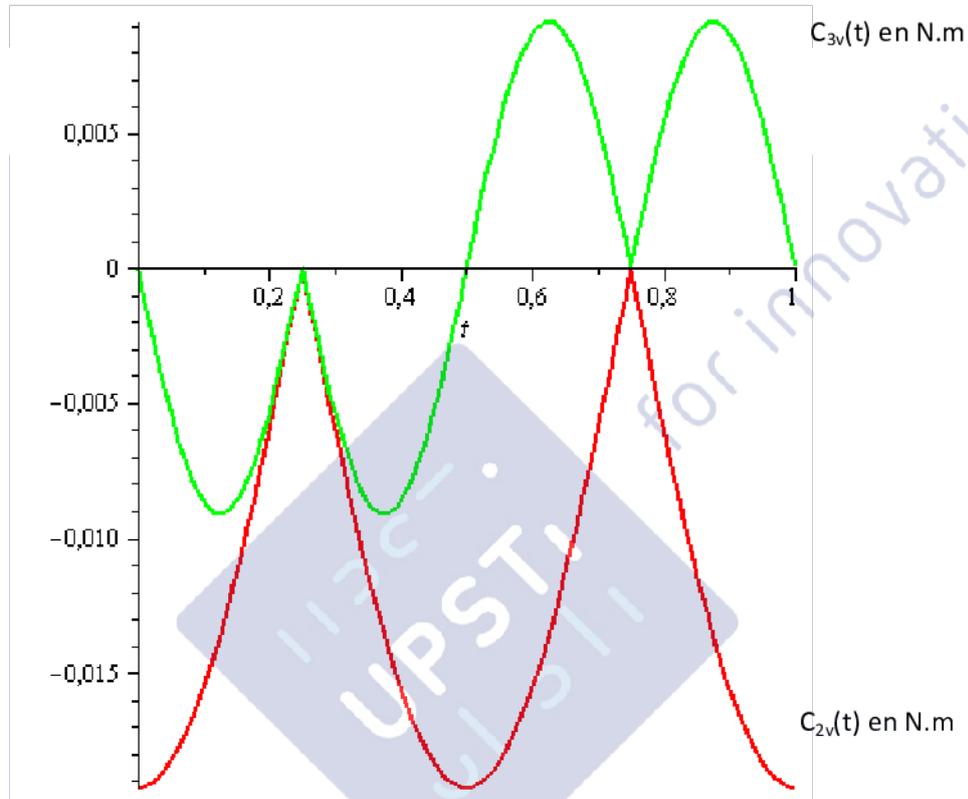
$$C_{2v} - aR_y = 0$$

$$C_{2v} = aR_y$$

Valeur extrême : $|C_{2v \max}| = p_v \cdot (4La + 2\pi r^2) a$

- On isole 1+2+3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_1, \vec{y}_0) :

$C_{v1} = 0$



Q26) Calculer ces mêmes couples pour le système STAB de Sirius actuel. Comparer leurs valeurs extrêmes à celles obtenues à la question précédente. On considérera que $\vec{O}_1O_2 = \vec{O}_2O_3 = a\vec{z}_2$.

On isole 3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_3, \vec{z}_3) :

$C_{3v} + M_z = 0$

$C_{3v} = -M_z$

On isole 2+3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_2, \vec{z}_2) :

$C_{2v} \vec{z}_2 + M_z \vec{z}_0 + \vec{O}_2G_3 \wedge R_y \vec{y}_0 = \vec{0}$

$C_{2v} + 0,97 * M_z + a((\vec{z}_2 + \vec{z}_3) \wedge R_y \vec{y}_0) \vec{z}_2 = 0$

$C_{2v} + 0,97.M_z - 0,13.a.R_y = 0$

$C_{2v} = -p_v [0,97.\sin(\theta_3 - \theta_{3n}) * [4a^2L + \pi hr^2] + 0,13.a.(4La + 2\pi r^2)] |\cos(\theta_3 - \theta_{3n})|$

On isole 1+2+3+4+5 et on écrit le moment dynamique autour de l'axe (O_1, \vec{z}_1) :

$$C_{1v} \vec{z}_1 + M_z \vec{z}_0 + \vec{O_1G_3} \wedge R_y \vec{y}_0 = \vec{0}$$

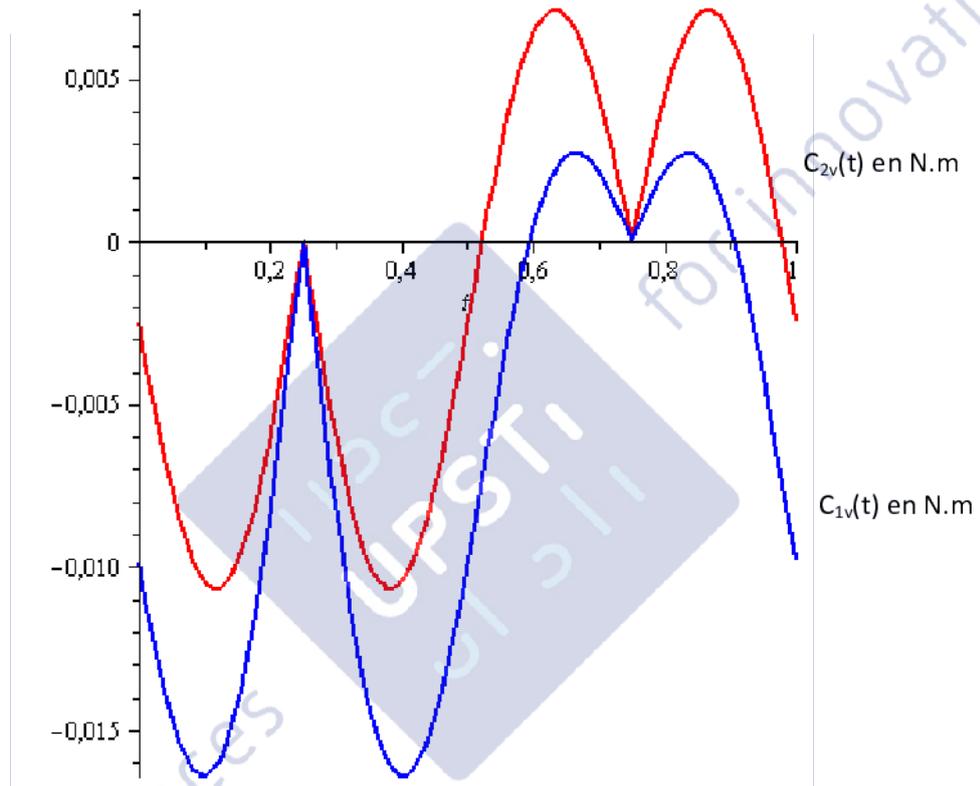
$$C_{1v} + 0,97 * M_z + a \left((2\vec{z}_2 + \vec{z}_3) \wedge R_y \vec{y}_0 \right) \vec{z}_1 = 0$$

$$C_{1v} + 0,97 M_z + a R_y \left[2(0,13\vec{z}_0 - 0,97\vec{x}_0) - \vec{x}_0 \right] \vec{z}_1 = 0$$

$$C_{1v} + 0,97 M_z + a R_y \left[2 * 0,13 * 0,97 - (2 * 0,97 + 1) * 0,26 \right] = 0$$

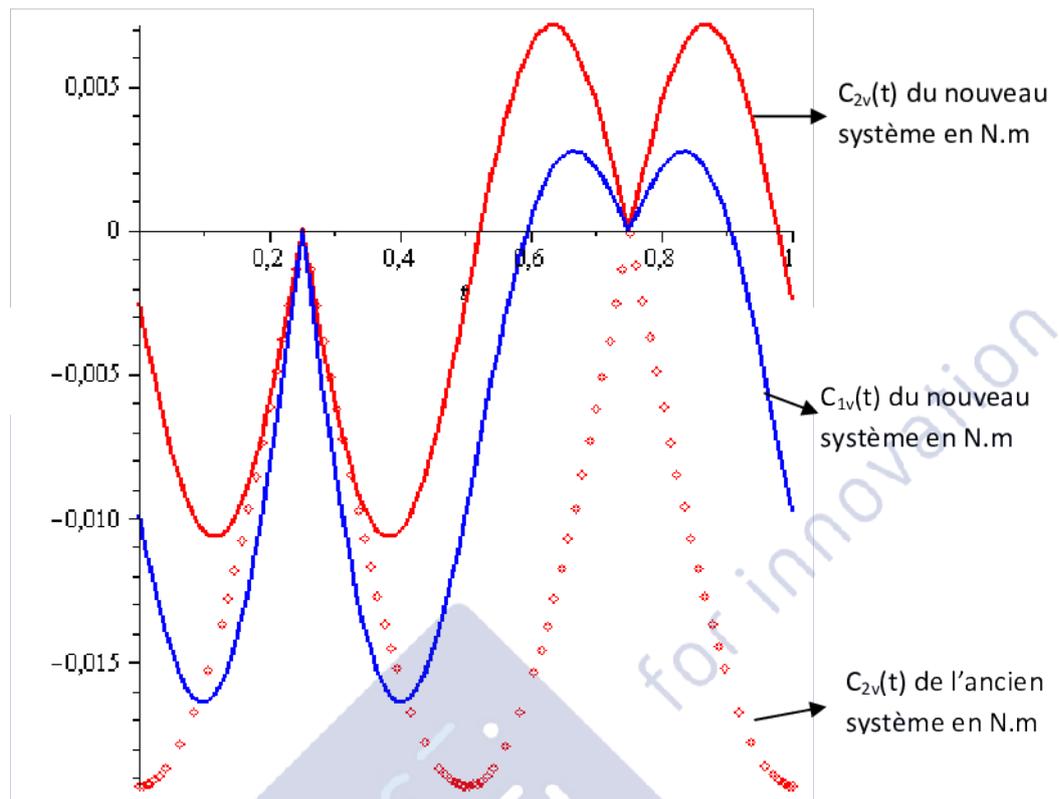
$$C_{1v} + 0,97 M_z - 0,51 a R_y = 0$$

$$C_{1v} = -p_v \cdot \left[0,97 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_{3n}) * \left[4a^2 L + \pi h r^2 \right] + 0,51 a \cdot (4La + 2\pi r^2) \right] \left| \cos(\theta_3 - \theta_{3n}) \right|$$



Q27) Conclure sur l'intérêt de la technologie utilisée dans le Sirius actuel.

Comparaison des couples entre l'ancien système et le nouveau :



Dans le nouveau système, les moteurs ont besoin de fournir moins de couple.

Q28) Déterminer, en fonction des données, les matrices d'inertie des solides 3, 4 et 5 constituant le système OBS de Sirius. Ces matrices seront exprimées au centre de gravité G_i et dans la base propre b_i de chacun des solides.

Attention : Question hors programme en PSI. Extrait du programme : « Les calculs des éléments d'inertie (matrice d'inertie, centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation. »

- Matrice d'inertie de 3 :

$$[I_{G_3,3}] = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} (2a)^2 + (2a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2L)^2 + (2a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2L)^2 + (2a)^2 \end{bmatrix}_{G_3, b_3}$$

$$[I_{G_3,3}] = \frac{M}{3} \begin{bmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 + a^2 \end{bmatrix}_{G_3, b_3}$$

- Matrice d'inertie de 4 ou 5 (i=4 ou 5 dans les équations ci-dessous) :

$$[I_{G_1,i}] = m \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4} \end{bmatrix}_{G_1, b_1}$$

Q29) On suppose que $\theta_3 = \theta_4 = 0$. En déduire la matrice d'inertie globale du système OBS, au point G_3 et dans la base b_3 .

Il faut déplacer les matrices d'inertie des solides 4 et 5 au point G_3 . On utilise le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned} [I_{G_3,4}] &= [I_{G_4,4}] + m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r+L)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r+L)^2 \end{bmatrix}_{b_3} \\ &= m \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2}{2} + 2rL + L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} + \frac{5r^2}{4} + 2rL + L^2 \end{bmatrix}_{G_3, b_3} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} [I_{G_3,5}] &= [I_{G_5,5}] + m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r+L)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r+L)^2 \end{bmatrix}_{b_3} \\ &= m \begin{bmatrix} \frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2}{2} + 2rL + L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} + \frac{5r^2}{4} + 2rL + L^2 \end{bmatrix}_{G_3, b_3} \end{aligned}$$

En définitive, on trouve :

$$[I_{G_3,3+4+5}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 + 2m\left(\frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}M(L^2 + a^2) + 2m\left(\frac{3r^2}{2} + 2rL + L^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(L^2 + a^2) + 2m\left(\frac{h^2}{12} + \frac{5r^2}{4} + 2rL + L^2\right) \end{bmatrix}_{G_3, b_3}$$

$$\begin{cases} A_{345} = \frac{2}{3}Ma^2 + 2m\left(\frac{h^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right) = 0,851kg.m^2 \\ B_{345} = \frac{1}{3}M(L^2 + a^2) + 2m\left(\frac{3r^2}{2} + 2rL + L^2\right) = 9,94kg.m^2 \\ C_{345} = \frac{1}{3}M(L^2 + a^2) + 2m\left(\frac{h^2}{12} + \frac{5r^2}{4} + 2rL + L^2\right) = 9,95kg.m^2 \end{cases}$$

Q30) Indiquer quel(s) type(s) de déséquilibre (statique et/ou dynamique) sont induits par chacun des deux phénomènes PH1 et PH2.

Le phénomène PH1 induit un déséquilibre statique (et aussi dynamique car le dépôt de givre peut induire des produits d'inertie, mais cet effet est sûrement négligeable ici).

Le phénomène PH2 induit un déséquilibre dynamique (il n'y a pas de déséquilibre statique dans ce cas car les centres d'inertie de 4 et 5 ne bougent pas).

Q31) Donner alors l'expression du moment dynamique de l'ensemble {3+4+5} au point O_3 . En déduire l'expression du couple fourni par le moteur 3 ainsi que celle des moments transmis dans la liaison pivot entre les pièces 2 et 3. Ne pas oublier de prendre en compte le régime transitoire.

On suppose être dans une phase durant laquelle le système OBS tourne autour d'un axe fixe (le système STAB réalisant sa fonction).

Le moment dynamique de l'ensemble {3+4+5} est donc :

$$\vec{\delta}_{G_{3,3+4+5}/b_0} = \tilde{D}_{345}\omega^2\vec{x}_3 - \tilde{D}_{345}\dot{\omega}\vec{y}_3 + \tilde{C}_{345}\dot{\omega}\vec{z}_3$$

En projetant dans la base b_{30} , on obtient :

$$\vec{\delta}_{G_{3,3+4+5}/b_0} = (\tilde{D}_{345}\omega^2 \cdot \cos(\theta_3) + \tilde{D}_{345}\dot{\omega} \cdot \sin(\theta_3))\vec{x}_{30} + (\tilde{D}_{345}\omega^2 \cdot \sin(\theta_3) - \tilde{D}_{345}\dot{\omega} \cdot \cos(\theta_3))\vec{y}_{30} + \tilde{C}_{345}\dot{\omega}\vec{z}_{30}$$

On en déduit le couple C_3 :

$$C_3 = \tilde{C}_{345}\dot{\omega}$$

Q32) Identifier les réponses a, b et c (correspondance avec les cas 1, 2 et 3) en justifiant vos réponses.

Le cas 1 (aucun déséquilibre) n'induit aucune oscillation en fonctionnement. Il correspond donc aux réponses a.

Le cas 2 (dépôt de givre) induit un déséquilibre statique. Il correspond donc à la réponse c car les couples ne sont pas nuls au départ.

Le cas 3 (inclinaison des têtes) induit un déséquilibre dynamique. Il correspond donc à la réponse b.

Q33) Donner les valeurs maximales de ces couples pour le cas 3, dans la phase de scrutation et en régime permanent.

Sur le système OBS, les couples C_{1d} , C_{2d} et C_{3d} sont respectivement sur les axes \vec{z}_1 , \vec{z}_2 , et \vec{z}_3 .

D'après les courbes de la figure 12, le couple subit par la tête dans le cas 3 a 3 composantes dans la base b_{30} . Cependant, à la vue des valeurs numériques, on négligera en première approximation les composantes suivant \vec{x}_{30} et \vec{y}_{30} .

En projetant sur \vec{z}_3 , \vec{z}_2 , et \vec{z}_1 , on obtient donc :

$$\begin{cases} C_{3d_max} = 10,5 N.m \\ C_{2d_max} = 10,5 * 0,97 \approx 10,5 N.m \\ C_{1d_max} = 10,5 * 0,97 \approx 10,5 N.m \end{cases}$$

Q34) Déterminer l'ensemble des paramètres $(t_0, t_1, t_2, \omega_{corr}^{max})$ de la loi permettant de compenser l'amplitude de tangage souhaitée, tout en respectant le cahier des charges et en minimisant le temps de compensation.

Au cours du cycle, on doit compenser le tangage ψ_i , donc :

$$\left(\frac{t_0}{2} + (t_1 - t_0) + \frac{t_2 - t_1}{2} \right) * \omega_{corr}^{max} = \psi_i$$

Compensation de vitesse angulaire maximum : $\omega_{corr}^{max} = 0,5 rad.s^{-1}$

Compensation d'accélération angulaire maximum : $\frac{\omega_{corr}^{max}}{t_0} = \frac{\omega_{corr}^{max}}{t_2 - t_1} = 5 rad.s^{-2}$

De ces équations, on trouve :

$$\begin{cases} \omega_{corr}^{max} = 0,5 rad.s^{-1} \\ t_0 = 0,1s \\ t_1 = 0,367s \\ t_2 = 0,467s \end{cases}$$

Q35) Donner une démarche permettant d'obtenir l'expression des couples moteur à fournir sur les 3 axes du système STAB, afin de compenser cette perturbation. Aucun calcul n'est demandé.

La loi de commande de la figure 13 correspond à la vitesse de rotation autour de l'axe \vec{y}_3 pour ramener \vec{z}_3 colinéaire à \vec{z}_G . On connaît donc le mouvement et on cherche les couples. Il faut déterminer en premier les expressions des rotations sur

chacun des axes. Ensuite il faut faire la même chose que dans la question 26, en utilisant la loi de mouvement déterminée juste avant.

Q36) Choisir dans la documentation (Annexe 2) une motorisation permettant de vérifier les performances de compensation de tangage requises. Prendre le même motoréducteur pour les 3 axes. Justifier les critères de choix retenus.

D'après la figure 14, il faut que le motoréducteur choisi puisse tourner à $2,2 \text{ rad.s}^{-1} = 21 \text{ tours.mn}^{-1}$ et fournir un couple au moins égal à 120 N.m.

Aucun moteur n'a ces caractéristiques directement. Il faut ajouter un réducteur.

La puissance nécessaire est de : $P = 2,2 * 120 = 264 \text{ W}$.

Ensuite, les moteurs proposés ont une vitesse de rotation nominale de 3000 tr/min pour la plupart. On trouve donc le rapport de réduction du réducteur :

$$r = \frac{21}{3000} = 7.10^{-3}$$

En supposant que le réducteur a un rendement de 1, on peut calculer le couple nécessaire en entrée du réducteur : $C = 120 * r = 0,84 \text{ N.m}$

Par conséquent, le moteur P3 de puissance 400W (P30B06040DXS11M) pouvant fournir un couple de 1,27N.m conviendrait.

Q37) Proposer une démarche qui permettrait de vérifier que cette motorisation permet d'atteindre les performances de compensation de l'ensemble des perturbations (vent, rotation des têtes sensorielles, dépôt de givre, tangage, roulis) subies par Sirius.

Dans un premier temps, on peut supposer qu'il n'y a pas de couplage entre chaque situation étudiée. Il suffit dans ce cas d'étudier chaque situation indépendamment des autres.

Cependant, le problème réel est plus complexe. On se rend vite compte que l'hypothèse de non couplage citée ci-dessus est discutable. Pour affiner la conception, il faudra utiliser l'outil informatique pour étudier plusieurs situations. On se contentera sûrement d'une résolution numérique du problème (les équations étant non linéaires).

Partie 4

Q38) Déterminer la valeur de la vitesse angulaire notée « ?? » du cahier des charges.

D'après le cahier des charges, la fréquence de rafraichissement des informations est de 1 Hz. Il faut donc tourner de 360° en 1 seconde, ce qui correspond à une vitesse de rotation $\omega = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$

- Q39)** Déterminer, en le justifiant, le nombre de dents des satellites de chaque étage de réduction, et indiquer s'il est possible d'en mettre 3 par étage, positionnés tous les 120° .

Le nombre de dents d'un pignon est proportionnel à son diamètre. Par conséquent, l'équation $D_{arbre} + 2 * D_{satellite} = D_{couronne}$ peut s'écrire aussi :

$$Z_{arbre} + 2 * Z_{satellite} = Z_{couronne}$$

$$\text{Donc : } Z_{satellite} = \frac{Z_{couronne} - Z_{arbre}}{2} = 7 \text{ dents}$$

Pour savoir si on peut mettre 3 satellites, il faut comparer leur encombrement avec la place disponible : $3 * D_{satellite} < \pi (D_{arbre} + D_{satellite})$ ou encore

$$3 * Z_{satellite} < \pi (Z_{arbre} + Z_{satellite})$$

$$\begin{cases} 3 * Z_{satellite} = 21 \\ \pi (Z_{arbre} + Z_{satellite}) = 59,7 \end{cases}$$

Il y a donc la place de mettre 3 satellites à 120° .

Autre possibilité de réponse :

Il est possible de la part du concepteur du sujet qu'il veuille comme réponse la possibilité de monter les 3 satellites exactement à 120° -> règle du haricot. Dans ce cas on doit avoir :

$$\frac{Z_p}{3} + \frac{Z_c}{3} \text{ entier}$$

$$\text{Ici } \frac{Z_p}{3} + \frac{Z_c}{3} = 12,67$$

Il est donc impossible de monter les 3 satellites à 120° exactement.

- Q40)** En ne considérant qu'un satellite par étage de réduction, et en modélisant le contact entre les dents des engrenages par des liaisons linéaires rectilignes, calculer le degré d'hyperstaticité du modèle du réducteur à double train épicycloïdal. Proposer un autre modèle qui soit isostatique.

Le réducteur a 1 mobilité utile, 0 interne. Il possède 4 boucles indépendantes.

L'hyperstatisme vaut donc :

$$h = m + 6\gamma - N_c = 1 + 6 * 4 - (5 * 1 + 4 * 4) = 4$$

Pour rendre le système isostatique, il suffit de modéliser chaque engrènement par une liaison ponctuelle :

$$h = m + 6\gamma - N_c = 1 + 6 * 4 - (5 * 1 + 5 * 4) = 0$$

- Q41)** Déterminer, en le justifiant, la valeur numérique de la constante K_5 .

K_5 est le rapport de réduction global du réducteur.

Déterminons le rapport de réduction d'un train épicycloïdal. On se place dans le repère lié au porte satellite (que l'on note « s », « 0 » est le bâti et « e » l'entrée) :

$$\frac{\omega_0 - \omega_s}{\omega_e - \omega_s} = (-1)^1 \frac{12}{26}$$

Donc $\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{6}{19}$

Le rapport de réduction global vaut alors :

$$K_5 = \left(\frac{6}{19}\right)^2 * \frac{5,3}{26,3} = 0,02$$

Q42) *L'inertie du moto-réducteur, ramenée sur l'axe moteur, est de $8,3 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$. Déterminer la valeur numérique de J_{eq} .*

$$J_{eq} = J_{\text{moto-réducteur}} + C_{345} * K_5^2$$

AN : $J_{eq} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

Q43) *Déterminer l'expression analytique des fonctions $H_3(p)$, $H_4(p)$ et K_6 .*

$$H_3(p) = \frac{K_c}{R + Lp}$$

$$H_4(p) = \frac{1}{J_{eq}p}$$

$$K_6 = K_c$$

Q44) *Proposer un modèle de comportement pour la fonction $H_2(p)$, en limitant le modèle aux fréquences inférieures à 100Hz. Enoncer et justifier les hypothèses retenues.*

100 Hz correspond à une pulsation $\omega = 200\pi \text{ rad.s}^{-1} = 628 \text{ rad.s}^{-1}$

Pour les pulsations inférieures à 628 rad/s, le déphasage est de -90° environ, et le déphasage descend à -20dB/décade .

On peut donc légitimement choisir un modèle du 1^{er} ordre pour la fonction $H_2(p)$.

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + Tp} = \frac{10^{72/20}}{1 + \frac{p}{65}}$$

Q45) *Déterminer les expressions littérales de $C(p)$, $H_u(p)$ et $H_c(p)$ en fonction de K_1 , $H_2(p)$, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5 et K_6 .*

$$\begin{cases} C(p) = K_1 \cdot H_2(p) \\ H_u(p) = \frac{H_3(p)H_4(p)}{1 + K_6 H_3(p)H_4(p)} \\ H_c(p) = \frac{H_4(p)}{1 + K_6 H_3(p)H_4(p)} \end{cases}$$

Q46) Conclure sur la capacité du système à satisfaire ou non le critère de vitesse angulaire du cahier des charges.

L'incertitude autorisée sur la vitesse angulaire est de $\pm 4\%$. Calculons l'écart statique (sans perturbation C_r).

La FTBO est de classe 0, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_3(t) = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \omega_c = \omega_c - \frac{1}{1 + K_{BO}} \omega_c$.

Pour satisfaire le cahier des charges, il faut que $\frac{1}{1 + K_{BO}} < 4\%$

$$\frac{1}{1 + K_{BO}} = \frac{1}{1 + 40 \cdot K_u \cdot K_r} = 0,16 > 4\%$$

Ce système ne satisfait pas le cahier des charges vis-à-vis du critère de vitesse angulaire.

Q47) Représenter les tracés asymptotiques et l'allure des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte entre $\Omega_3(p)$ et $\Omega_c(p)$.



Q48) Conclure sur la capacité du système à satisfaire ou non les critères de stabilité du cahier des charges.

La lecture du diagramme de Bode précédent donne :

Marge de phase

$$\omega_{co} = 81.03 \text{ rad/s}$$

$$M_p = 51.5 \text{ deg}$$

Marge de gain

$$\omega_{180} = 291.5 \text{ rad/s}$$

$$M_g = 20.25 \text{ dB}$$

Les marges de stabilité sont suffisantes.

Q49) Montrer que cette compensation de consigne ne modifie pas la stabilité du système.

Sans perturbation $C_r(p)$, la fonction de transfert du système s'écrit maintenant :

$$\frac{\Omega_3(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{(C(p) + K_s) \cdot H_u(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot H_u(p) \cdot K_r}$$

Ainsi, si le système de fonction de transfert $\frac{C(p) \cdot H_u(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot H_u(p) \cdot K_r}$ était stable, le

système avec compensation de consigne le sera aussi (i.e. $\frac{K_s \cdot H_u(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot H_u(p) \cdot K_r}$ sera

nécessairement stable) car les pôles resteront les mêmes.

Q50) En cas de perturbation nulle, conclure sur la capacité du système à satisfaire ou non le critère de vitesse angulaire.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_3(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\omega_c}{p} \left(\frac{(C(p) + K_s) \cdot H_u(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot H_u(p) \cdot K_r} \right) = \omega_c \frac{(40 + K_s) \cdot K_u \cdot K_r}{1 + 40 \cdot K_u \cdot K_r}$$

Par conséquent, si $K_s = \frac{1}{K_u \cdot K_r}$, le système sera précis ($\omega_3(\infty) = \omega_c$) :

$$\begin{cases} \frac{1}{K_u \cdot K_r} = 7,46 \text{ V.s} \\ K_s = 7,5 \text{ V.s} \end{cases}$$

L'écart par rapport à la vitesse angulaire de consigne est de 0,08%.

Q51) Déterminer la fonction $C_r(t)$ et justifier une origine physique expliquant l'allure retenue par ce modèle.

La transformée de Laplace donnée est celle d'un sinus :

$$L(A.\sin(\omega t)) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\begin{cases} A\omega = 3,2 \\ \omega^2 = 40 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = 0,5 N.m \\ \omega = 2\sqrt{10} = 6,32 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases}$$

$$\boxed{C_r(t) = 0,5 \sin(6,32t) u(t)} \text{ avec } u(t) \text{ la fonction échelon unitaire.}$$

Le vent étant supposé constant en direction et intensité, le modèle sinusoïdal retenu pour le couple résistant s'explique par la déformation de torsion du mât en fonctionnement.

On retrouve la pulsation de 6,32 rad/s (environ 1Hz) visible sur les courbes des couples figure 12 (en régime permanent)

Q52) Justifier la possibilité de négliger, en première approche, toutes les constantes de temps du système pour déterminer l'influence de $C_r(t)$ sur $\omega_3(t)$ lorsque l'entrée est un échelon de vitesse, et déterminer dans ce cas $\omega_3(t)$.

Le modèle de couple résistant choisi sollicite le système à la pulsation 6,32 rad/s. Autour de cette pulsation, le système a un gain approximativement constant (régime quasi statique) et un déphasage nul (cf diagramme de Bode). Il est donc raisonnable de modéliser le système comme un gain pur pour étudier l'influence du couple résistant.

En retirant toutes les constantes de temps du système, on a la relation :

$$\omega_3(t) = \frac{(40 + K_s).K_u.K_r}{1 + 40.K_u.K_r} \omega_c(t) - \frac{K_c.K_r}{1 + 40.K_u.K_r} C_r(t)$$

$$\omega_3(t) = \left(\frac{(40 + K_s).K_u.K_r}{1 + 40.K_u.K_r} \omega_c - \frac{K_c.K_r}{1 + 40.K_u.K_r} A.\sin(\omega t) \right) u(t)$$

$$\boxed{\omega_3(t) \approx \left(\omega_c - \frac{K_c.K_r}{1 + 40.K_u.K_r} A.\sin(\omega t) \right) u(t)}$$

Q53) Conclure quant à la capacité du système à satisfaire les critères du cahier des charges cités au début de cette partie, avec la structure par compensation de consigne.

Regardons si le terme dû au couple perturbateur induit une erreur de 4% par rapport à $\omega_c = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$:

$$\boxed{\frac{A.K_c.K_r}{(1 + 40.K_u.K_r)\omega_c} = \frac{0,5 * 44,4 * 0,02}{(1 + 40 * 6,7 * 0,02) * 2\pi} = 1\% < 4\%}$$

La vitesse angulaire reste bien dans les limites du cahier des charges, même avec une perturbation sinusoïdale $C_r(t)$.