

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2011

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

ROBOT DE CONSOLIDATION DE PAROIS ROCHEUSES

II - VERIFICATION DES CRITERES DE LA FONCTION FT 23 « ENFONCER LE TRAIN DE TUBES »

Question 1. Equilibre statique de l'ensemble {plateforme + train de tubes}

L'ensemble $\Sigma = \{\text{plateforme + train de tubes}\}$ étant supposé en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen, le bilan des actions mécaniques étant fourni dans l'énoncé, on projette l'équation du moment statique appliqué à Σ au point H sur la direction \vec{y}_0 :

$$(\overline{HG} \wedge -P \cdot \vec{z}_0 + \overline{HA} \wedge N_A \cdot \vec{z} + \overline{HB} \wedge N_B \cdot \vec{z} + \overline{HE} \wedge F \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y}_0 = 0$$

$$\frac{d}{2} P \cos \alpha - d N_B - \frac{2d}{3} F = 0$$

L'ensemble reste en équilibre tant que l'effort normal en B reste positif ou à la limite nul :

$$N_B \geq 0 \Rightarrow F \leq \frac{3}{4} P \cos \alpha$$

A.N. : Dans le cas où la paroi est de pente 45 degrés, $F \leq 14850 \text{ N}$ permet d'assurer la stabilité du robot et est supérieure à la valeur minimale exigée par le cahier des charges ; 10000 N.

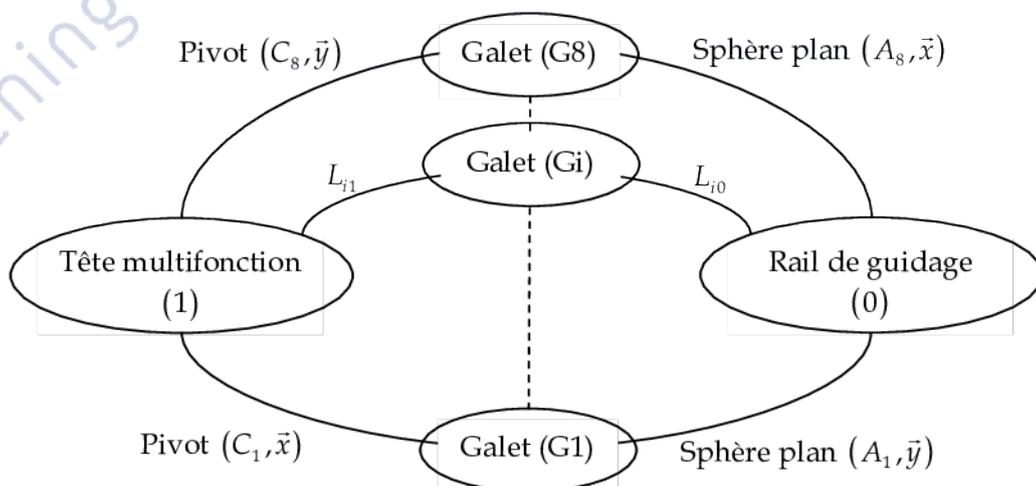
A.N. : Dans le cas où la paroi est de pente 80 degrés, $F \leq 3650 \text{ N}$ permet d'assurer la stabilité du robot et est supérieure à la valeur minimale exigée par le cahier des charges ; 3000 N.

L'effort de forage doit être compensé par la composante perpendiculaire à la paroi du poids du robot, composante nulle dans le cas d'une paroi verticale : le forage est alors impossible.

Question 2. Degré d'hyperstatisme de la liaison entre le rail-guide (0) et la tête multifonction

a) Graphe de liaison

Les huit galets établissent huit liaisons en parallèle, générant $N_c = 7$ cycles cinématiques indépendants dans l'assemblage de la tête multifonction et des rails de guidage.



Les liaisons d'un galet (G_i) avec la tête multifonction d'une part et avec un rail de guidage d'autre part sont :

- pour $i \in \{1;3;5;7\}$; L_{i1} : liaison pivot (C_i, \vec{x}) ; L_{i0} : liaison sphère plan de normale (A_i, \vec{y}).
 - pour $i \in \{2;4;6;8\}$; L_{i1} : liaison pivot (C_i, \vec{y}) ; L_{i0} : liaison sphère plan de normale (A_i, \vec{x}).
- b) Liaison équivalente : il s'agit d'une liaison glissière d'axe \vec{z} .
- c) Degré d'hyperstatisme :

On applique la formule de mobilité : $m - h = I_c - E_c$.

$m_u = 1$: translation suivant \vec{z} ; $m_i = 8$: rotation des galets sur leur axe ; $m = m_u + m_i = 9$

$$I_c = \underbrace{8 \times 1}_{8 \text{ pivot}} + \underbrace{8 \times 5}_{8 \text{ sphère plan}} = 48 ; E_c = \underbrace{7 \times 6}_{7 \text{ cycles cinématiques}} = 42$$

$$h = m - I_c + E_c = 3$$

d) Intérêt de la solution :

Cet hyperstatisme d'ordre 3 révèle la présence de trois galets supplémentaires par rapport à une solution isostatique. On obtient une plus grande rigidité dans la définition de l'axe de translation du chariot, ce qui améliore le respect de la contrainte d'alignement de l'axe de la foreuse avec l'axe du forage.

Par ailleurs, notons que cet hyperstatisme est obtenu au détriment d'une plus grande précision à apporter aux usinages et au montage de l'ensemble.

III - VERIFICATION DES CRITERES DE LA FONCTION FT 2211 « SAISIR LES TUBES »

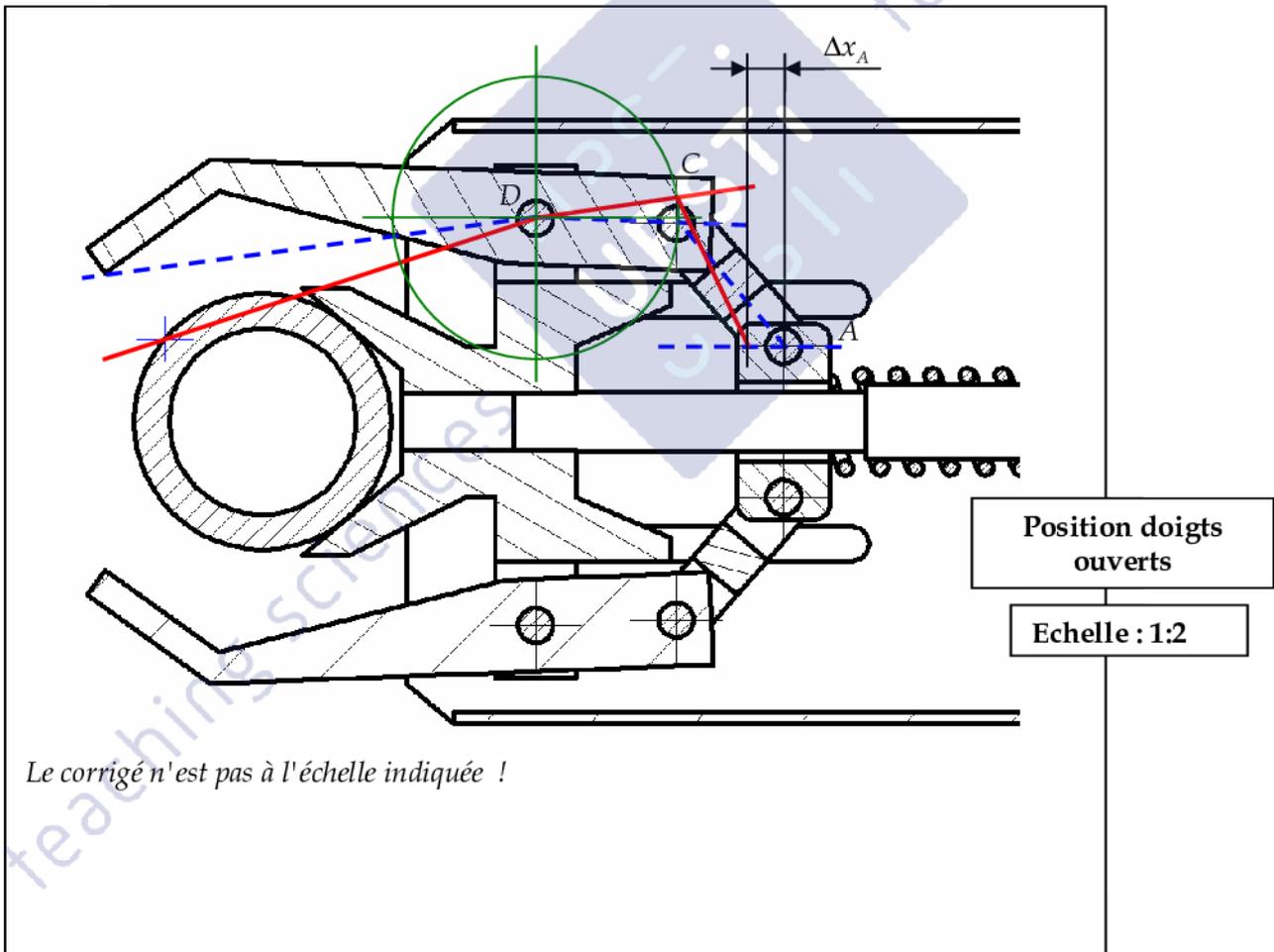
Question 3. Déplacement Δx_A

Remarque : Relativement à l'annexe 2 : les pions de guidage sont liés à la paume (et non au coulisseau) ; ils assurent le guidage en translation de la paume dans le corps et la mise en position de la paume au contact du tube sans pousser sur celui-ci.

Le doigt 1 pivote autour du point D dans le référentiel {paume 2 + corps} jusqu'à ce que son extrémité touche le tube ; dans ce mouvement, la trajectoire du point C est en arc de cercle de centre D , ce qui définit la position finale de C .

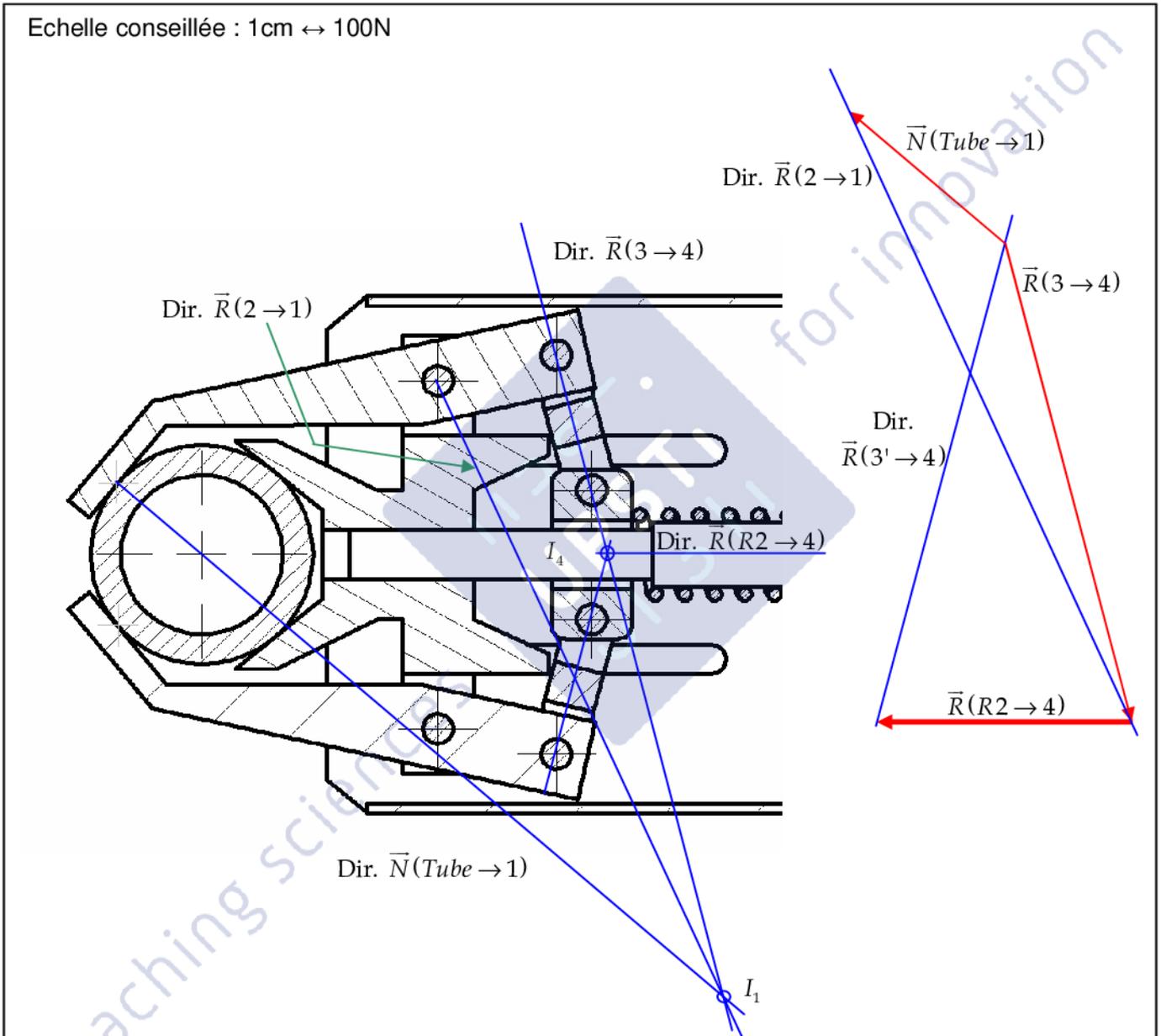
Le coulisseau 4 effectue une translation (horizontale sur le dessin) dans le référentiel {paume 2 + corps}; la position finale du point A est obtenue en reportant entre les points C et A la longueur de la bielle 3.

Compte tenu de l'échelle de représentation, on lit un déplacement du point A : $\Delta x_A = 1,6 \text{ cm}$.



Question 4. Force exercée par chaque doigt sur le tube

- La biellette 3, supposée en équilibre dans le référentiel corps galiléen, est soumise à l'action de deux forces : $\vec{N}(4 \rightarrow 3)$ et $\vec{N}(1 \rightarrow 3)$; ceux deux forces sont donc opposées sur la même droite d'action et de même module : $\vec{N}(4 \rightarrow 3) = -\vec{N}(1 \rightarrow 3)$.



- Le coulisseau 4 est en équilibre dans le référentiel galiléen sous l'action de trois forces non parallèles et coplanaires : $\vec{R}(3 \rightarrow 4) = -\vec{R}(4 \rightarrow 3)$ de direction connue, $\vec{R}(3' \rightarrow 4)$ symétrique de $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ par rapport à l'axe médian horizontal de la pince et $\vec{R}(R2 \rightarrow 4)$ connue ; ces trois forces se coupent alors en un point I_4 et leur somme vectorielle est nulle.
- Le doigt 1 est en équilibre dans le référentiel galiléen sous l'action de trois forces non parallèles et coplanaires : $\vec{R}(3 \rightarrow 1) = -\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ connue, $\vec{N}(Tube \rightarrow 1)$ dirigée vers le centre du tube et $\vec{R}(2 \rightarrow 1)$; ces trois forces se coupent alors en un point I_1 et leur somme vectorielle est nulle.

La résolution graphique conduit au résultat : $\|\vec{N}(Tube \rightarrow 1)\| = 320 \text{ N}$.

Question 5. Vérification du critère « maintien lors du transfert d'un tube »

Le problème n'est plus considéré comme plan. Le soulèvement du tube est assuré par les forces tangentielles d'adhérence, les efforts normaux au tube étant les forces $\vec{N}(i \rightarrow Tube)$ ($\vec{N}(1 \rightarrow Tube) = -\vec{N}(Tube \rightarrow 1)$ déterminée à la question précédente).

Le tube durant son transport, est soumis à cinq forces :

$$\vec{R}(1 \rightarrow tube), \vec{R}(2 \rightarrow tube), \vec{R}(1' \rightarrow tube), \vec{R}'(2 \rightarrow tube) \text{ et } \vec{R}(g \rightarrow tube)$$

Chaque force de contact est la somme d'un vecteur radial $\vec{N}(i \rightarrow tube)$ et d'un vecteur tangentiel vertical $T(1 \rightarrow tube) \cdot \vec{z}$. L'action de la pesanteur s'écrit : $\vec{R}(g \rightarrow tube) = -P_T \cdot \vec{z}$.

Si on suppose :

1. que les prises de contact des doigts et de la paume avec le tube se font selon la normale aux différents points de contact,
2. que les points de contact des doigts et de la paume sont placés symétriquement de part et d'autre du tube (ce n'est pas tout à fait le cas sur les figures fournies),

on peut alors affirmer que les quatre efforts normaux sont dirigés vers le centre du tube et ont même norme.

La projection sur l'axe du tube du théorème de la résultante statique appliqué au tube supposé en équilibre dans le référentiel galiléen s'écrit :

$$T(2 \rightarrow tube) + T'(2 \rightarrow tube) + T(1 \rightarrow tube) + T(1' \rightarrow tube) - P_T = 0$$

A la limite du glissement, on relie l'effort tangentiel à l'effort normal en chaque point de contact par la relation : $\frac{T(i \rightarrow Tube)}{\|\vec{N}(i \rightarrow Tube)\|} = f$. L'adhérence reste vérifiée tant que la relation suivante est vraie :

$$P_T \leq 4 \cdot T(1 \rightarrow tube), \text{ soit encore } P_T \leq 4 f \cdot \|\vec{N}(1 \rightarrow Tube)\|$$

A.N. : $4 f \cdot \|\vec{N}(1 \rightarrow Tube)\| = 384 \text{ N}$; cette valeur est supérieure à la valeur requise par le cahier des charges : 350 N. Le tube est bien maintenu durant le transport.

Question 6. Vérification du critère « Maintien de la prise lors de l'extraction (...) »

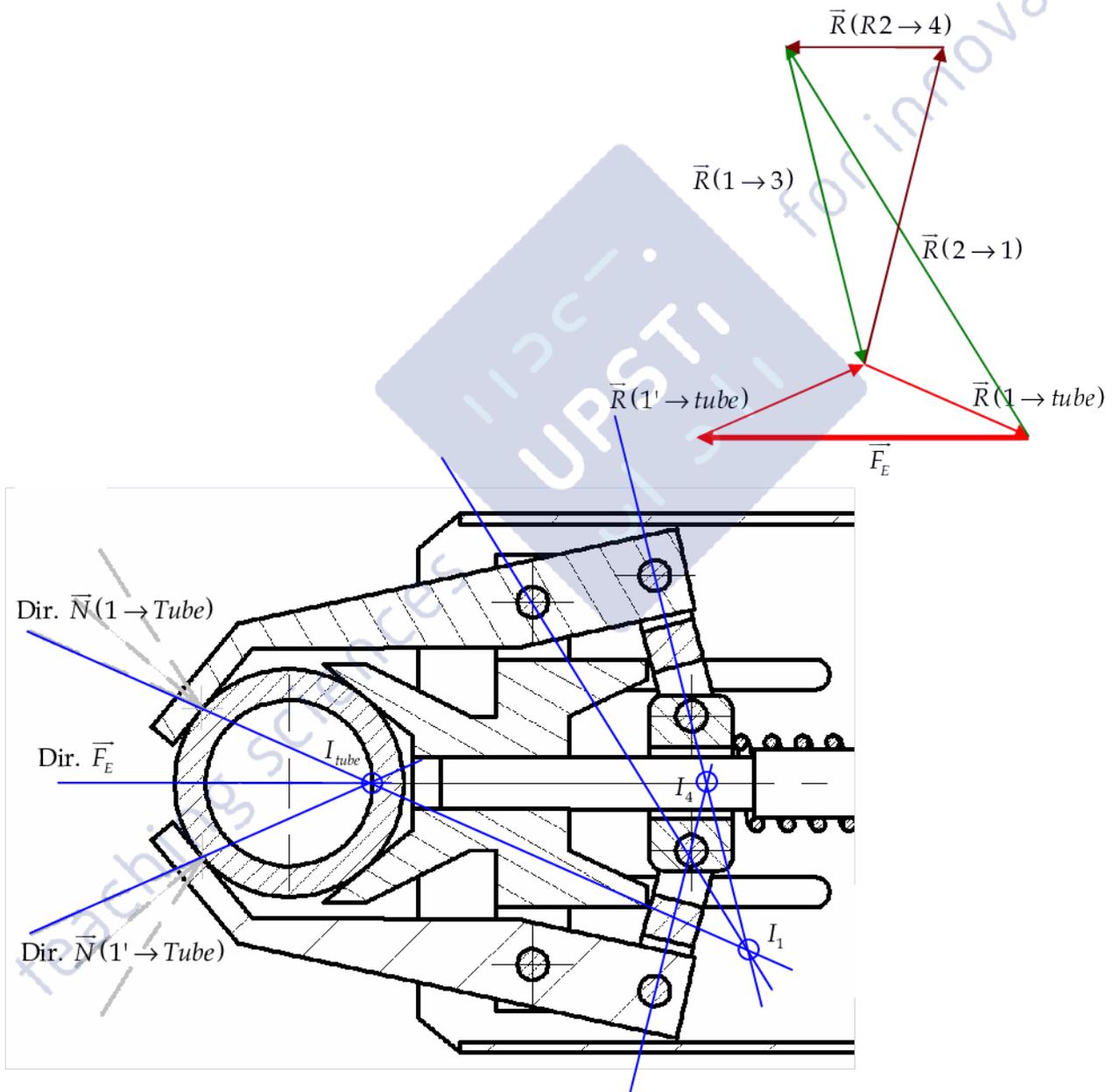
Pour cette question, on se place dans les conditions limites de l'extraction du tube :

- effort nul de la paume sur le tube ;
- effort des doigts sur le tube à la limite du glissement ; ceci entraîne que la direction des forces de contact entre le tube et les doigts, $\vec{R}(1 \rightarrow tube)$ et $\vec{R}(1' \rightarrow tube)$, soient sur le cône d'adhérence et s'opposant au mouvement relatif entre ces composants.

Dans ces conditions, on doit vérifier que l'effort exercé par le ressort R2 est suffisant pour maintenir la prise du tube. On procède en trois étapes :

1. Le tube est en équilibre dans le référentiel galiléen sous l'action de trois forces non parallèles et coplanaires : $\vec{R}(1 \rightarrow tube)$ de direction connue, $\vec{R}(1' \rightarrow tube)$ de direction connue et \vec{F}_E force nécessaire à l'extraction du tube du carrousel ; ces trois forces se coupent alors en un point I_{tube} et leur somme vectorielle est nulle.

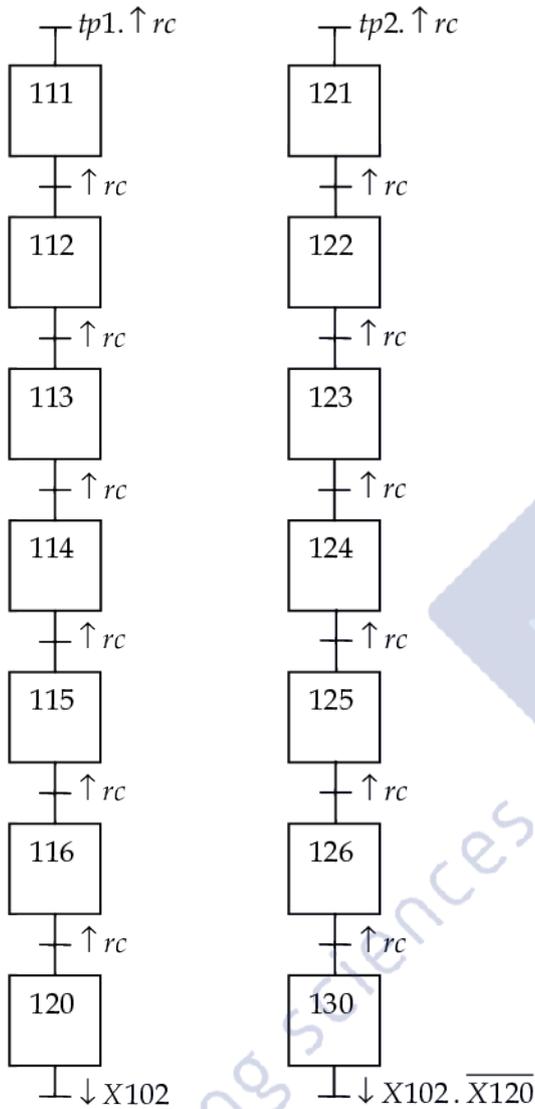
- Le doigt 1 est en équilibre dans le référentiel galiléen sous l'action de trois forces non parallèles et coplanaires : $\vec{N}(3 \rightarrow 1)$ de direction connue (l'axe de la bielle 3, comme vu à la question 4), $\vec{R}(tube \rightarrow 1) = -\vec{R}(1 \rightarrow tube)$ déterminée précédemment et $\vec{R}(2 \rightarrow 1)$; ces trois forces se coupent alors en un point I_1 et leur somme vectorielle est nulle.
- Le coulisseau 4 est en équilibre dans le référentiel galiléen sous l'action de trois forces non parallèles et coplanaires : $\vec{R}(3 \rightarrow 4) = \vec{R}(1 \rightarrow 3)$ déterminée précédemment, $\vec{R}(3' \rightarrow 4)$ symétrique de $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ par rapport à l'axe médian horizontal de la pince et $\vec{R}(R2 \rightarrow 4)$ horizontale sur la figure ; ces trois forces se coupent alors en un point I_4 et leur somme vectorielle est nulle.



La résolution graphique conduit au résultat : $\|\vec{R}(R2 \rightarrow 4)\| = 240 \text{ N}$. Cette valeur minimale assurant l'extraction du tube est inférieure à l'effort exercé par le ressort R2 : 403 N ; le critère est vérifié.

IV - VERIFICATION DES CRITERES DE LA FONCTION FT 24 « GERER LE FORAGE AUTOMATISE »

Question 7. Graficets " Rangée1 " et " Rangée 2 "



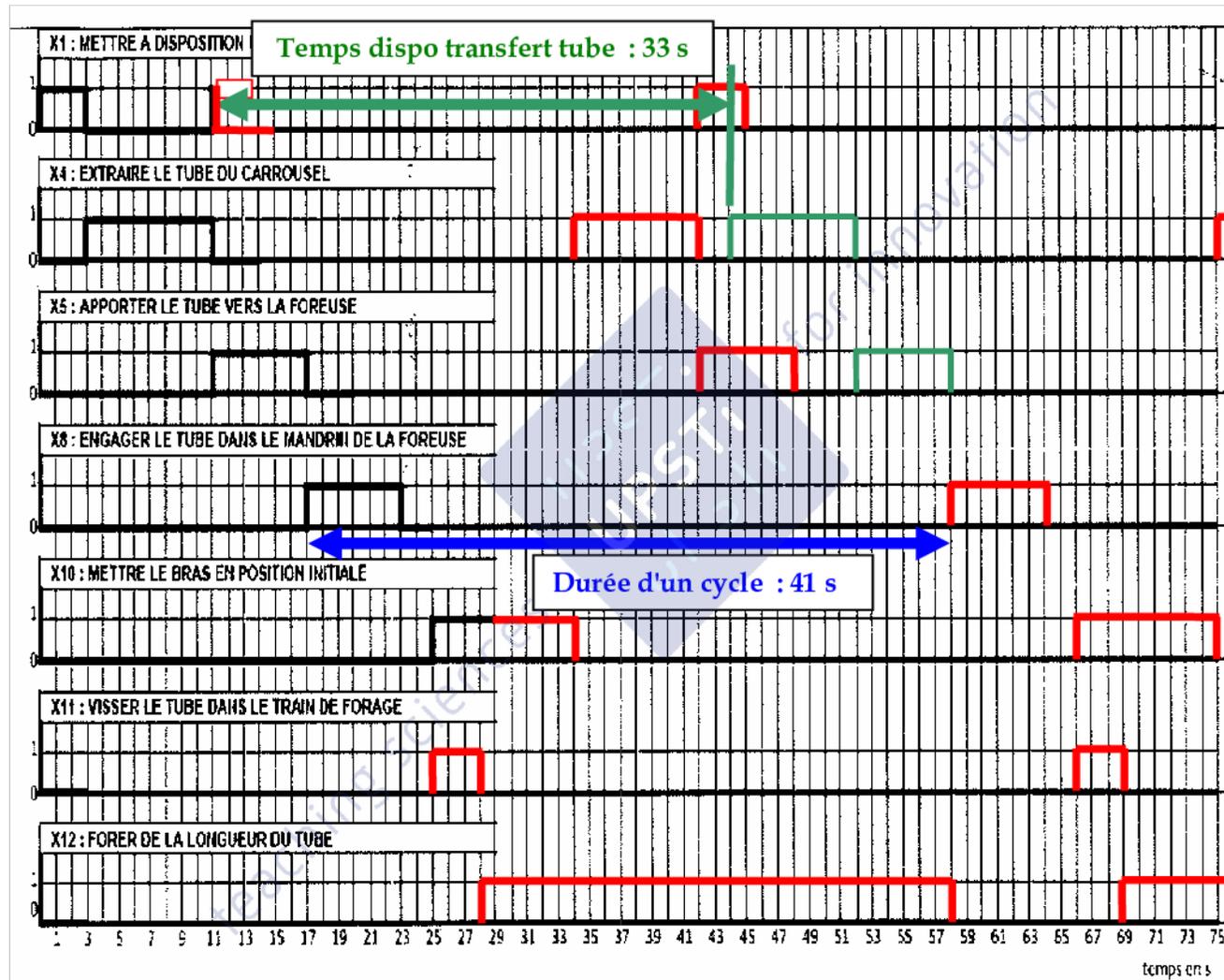
Question 8. Réceptivité 1,2 et 3

Réceptivité 1 : X201

Réceptivité 2 : X300

Réceptivité 3 : X210

Question 9. Chronogramme



Question 10. Temps de cycle

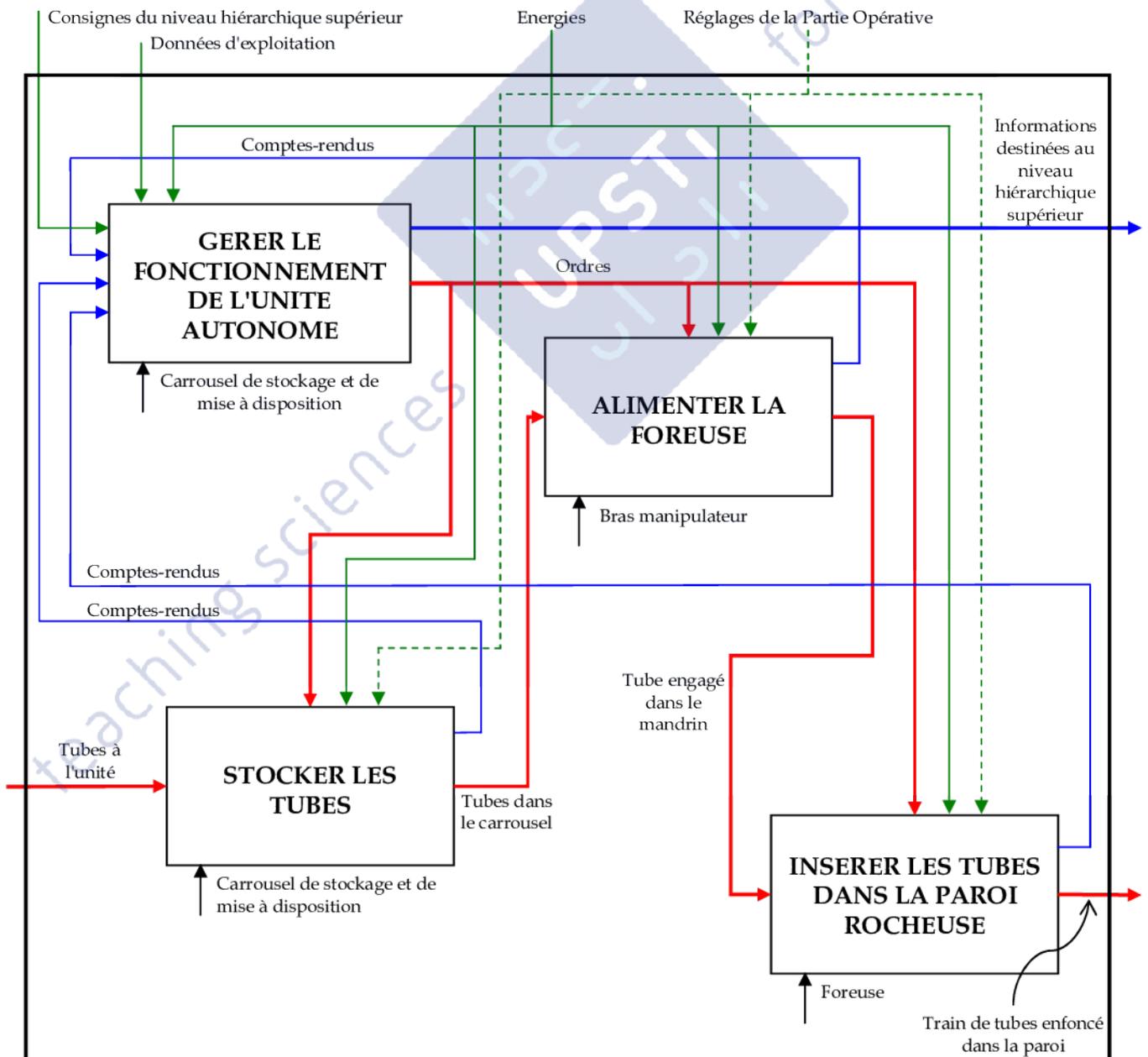
Le temps de cycle est l'intervalle de temps entre l'engagement de deux tubes successifs dans la foreuse, soit 41 secondes.

Question 11. Influence du nombre de secteurs vides sur le temps de cycle

Compte tenu du temps d'extraction d'un tube de carrousel et du délai d'amenée du tube vers la foreuse, l'intervalle de temps disponible entre deux extractions de tube, sans influence sur le temps de cycle, est de 33 secondes.

Le temps de cycle commence à se rallonger lorsque le carrousel présente 11 rangées de tubes successives vides.

Question 12. Diagramme SADT de niveau A0



V - FT 12 « POSITIONNER ET STABILISER LA PLATE-FORME »

FT 121 « Eviter le couplage entre les fréquences »

Question 13. Equilibre de la plate-forme

On isole la plate-forme 1 (inclus ce qu'elle supporte), soumise à :

- l'action de la pesanteur $\vec{R}(g \rightarrow 1) = -m g \cdot \vec{z}_0$
- l'action des câbles, de direction \vec{x} , donc non prise en compte dans ce problème plan de normale \vec{x}
- les actions des pieds 2 et 3 : $\{2 \rightarrow 1\}$ et $\{3 \rightarrow 1\}$
- l'action mécanique due au forage : $\{forage \rightarrow 1\}$

Dans ce problème plan, le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la plate-forme en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\{D(1/0)\} = \{g \rightarrow 1\} + \{forage \rightarrow 1\} + \{2 \rightarrow 1\} + \{3 \rightarrow 1\}$$

En écrivant l'équation du moment dynamique en I et en projetant les théorèmes généraux dans la base vectorielle $(\vec{X}, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$, on obtient trois équations scalaires :

$$\begin{aligned} m \vec{a}(G_1, 1/0) \cdot \vec{Y}_1 &= -m g \vec{z}_0 \cdot \vec{Y}_1 + F \vec{z} \cdot \vec{Y}_1 + \vec{R}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{Z}_1 + \vec{R}(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{Z}_1 \\ m \vec{a}(G_1, 1/0) \cdot \vec{Z}_1 &= -m g \vec{z}_0 \cdot \vec{Z}_1 + F \vec{z} \cdot \vec{Z}_1 + \vec{R}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{Z}_1 + \vec{R}(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{Z}_1 \\ \delta(I, 1/0) \cdot \vec{X} &= (\vec{IG}_1 \wedge -m g \vec{z}_0) \cdot \vec{X} + C_f \vec{z} \cdot \vec{X} + (\vec{ID}_1 \wedge \vec{R}(2 \rightarrow 1)) \cdot \vec{X} + (\vec{IC}_1 \wedge \vec{R}(3 \rightarrow 1)) \cdot \vec{X} \end{aligned}$$

Question 14. Eléments cinétiques

- $m \vec{a}(G_1, 1/0) = m \frac{d^2}{dt^2} (y \cdot \vec{Y} + z \cdot \vec{Z} + a \cdot \vec{Z}_1) \Big|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$; $\frac{d}{dt} \vec{Z}_1 = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{Y}_1$ et $\frac{d}{dt} \vec{Y}_1 = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{Z}_1$;
 $m \vec{a}(G_1, 1/0) = m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \vec{Y} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \vec{Z} - a \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \vec{Y}_1 + \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 \cdot \vec{Z}_1 \right) \right)$, vecteur que l'on projette dans la

base (\vec{Y}_1, \vec{Z}_1)

$$\begin{cases} m \vec{a}(G_1, 1/0) \cdot \vec{Y}_1 = m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \sin \theta - a \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \\ m \vec{a}(G_1, 1/0) \cdot \vec{Z}_1 = m \left(-\frac{d^2 y}{dt^2} \sin \theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \cos \theta - a \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^2 \right) \end{cases}$$

- $\delta(I, 1/0) \cdot \vec{X} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(I, 1/0) \Big|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \cdot \vec{X} + m (\vec{V}(I/0) \wedge \vec{V}(G_1, 1/0)) \cdot \vec{X}$
 $\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(I, 1/0) \Big|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \cdot \vec{X} = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(I, 1/0) \cdot \vec{X}) - \vec{\sigma}(I, 1/0) \cdot \frac{d}{dt} \vec{X} \Big|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$

- $\vec{\sigma}(I,1/0) = I_1(pf) \vec{\Omega}(1/0) + m \overline{IG_1} \wedge \vec{V}(I,1/0)$
- $\vec{\sigma}(I,1/0) \cdot \vec{X} = A \frac{d\theta}{dt} + m \left(a \cdot \vec{Z}_1 \wedge \left(\frac{dy}{dt} \cdot \vec{Y} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{Z} \right) \right) \cdot \vec{X}$
- $\vec{\sigma}(I,1/0) \cdot \vec{X} = A \frac{d\theta}{dt} - ma \left(\frac{dy}{dt} \cos\theta + \frac{dz}{dt} \sin\theta \right)$
- $\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(I,1/0) \cdot \vec{X}) = A \frac{d^2\theta}{dt^2} - ma \left(\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] \cos\theta + \left[\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] \sin\theta \right)$
- $(\vec{V}(I/0) \wedge \vec{V}(G_1,1/0)) \cdot \vec{X} = (\vec{V}(I/0) \wedge [\vec{V}(I/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{IG_1}]) \cdot \vec{X}$
- $(\vec{V}(I/0) \wedge \vec{V}(G_1,1/0)) \cdot \vec{X} = (\vec{V}(I/0) \wedge [\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{IG_1}]) \cdot \vec{X}$
- $(\vec{V}(I/0) \wedge \vec{V}(G_1,1/0)) \cdot \vec{X} = \left(\frac{dy}{dt} \cdot \vec{Y} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{Z} \right) \wedge \left(-a \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{Y}_1 \right) \cdot \vec{X}$
- $(\vec{V}(I/0) \wedge \vec{V}(G_1,1/0)) \cdot \vec{X} = -a \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \sin\theta - \frac{dz}{dt} \cos\theta \right)$
- $\vec{\delta}(I,1/0) \cdot \vec{X} = A \frac{d^2\theta}{dt^2} - ma \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cos\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \sin\theta \right)$

Question 15. Linéarisation des termes de cinétique

On linéarise les équations en θ et on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur à 1 pour les déformations et leurs variations (hypothèse s'appuyant vraisemblablement sur des vibrations basse fréquence) :

- $\begin{cases} m \vec{a}(G_1,1/0) \cdot \vec{Y}_1 \cong m \left(\frac{d^2y}{dt^2} - a \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ m \vec{a}(G_1,1/0) \cdot \vec{Z}_1 \cong m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$
- $\vec{\delta}(I,1/0) \cdot \vec{X} \cong A \frac{d^2\theta}{dt^2} - ma \frac{d^2y(t)}{dt^2}$

Question 16. Forme matricielle des termes de cinétique

$$[M] \begin{bmatrix} \frac{d^2q}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m & -ma \\ m & 0 & 0 \\ 0 & -ma & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{bmatrix}$$

Question 17. Interprétation de l'équation matricielle de la dynamique

$$[M] \begin{bmatrix} \frac{d^2 z}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 0 & 0 \\ 2b\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients d'amortissement, liés aux vitesses : } [C]} \begin{bmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \cos \alpha \\ 2k & 0 & 0 \\ -2bk & 2bk & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients d'élasticité (raideurs), liés aux déplacements : } [K]} \begin{bmatrix} z \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = [F]$$

Question 18. Interprétation du couplage des équations de la dynamique

Les équations issues de l'écriture matricielle sont :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} - ma \frac{d^2 \theta}{dt^2} - mg \cos \alpha \theta = F_1 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\mu \frac{dz}{dt} + 2kz = F_2 \\ A \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ma \frac{d^2 y}{dt^2} + 2b\mu \frac{dz}{dt} - 2bkz + 2bky = M_3 \end{cases}$$

On observe :

1. Les déplacements verticaux (direction Z) ne sont pas influencés par les déplacements horizontaux (direction Y) et la rotation de la plate-forme ;
2. Les déplacements horizontaux sont très couplés avec la rotation
3. L'amortissement de la rotation est effectué par les déplacements horizontaux et verticaux (comportement attendu, puisque les pertes d'énergies sont concentrées dans les pieds de la plate-forme)

Question 19. Inversibilité de la matrice [M]

Une matrice carrée est inversible si son déterminant est non nul.

Dans le cas de la matrice de masses, $\det \begin{bmatrix} 0 & m & -ma \\ m & 0 & 0 \\ 0 & -ma & A \end{bmatrix} = m^2 (A - ma^2)$.

En rappelant que $A = I_{(I, \bar{x})}(pf) = I_{(G, \bar{x})}(pf) + ma^2$ (théorème de Huygens) et que $I_{(G, \bar{x})}(pf) \neq 0$, on en déduit que le déterminant de cette matrice masse est non nul ; $[M]$ est inversible.

Question 20. Pulsations propres du système

On donne les valeurs propres de la matrice $[B]=[M]^{-1}[K]$: $3,3 \cdot 10^4$, $0,2 \cdot 10^5$ et $5,1 \cdot 10^5$ en unités S.I. Ceci conduit aux pulsations propres respectives : 182, 141 et 714 rad/s.

Les fréquences propres correspondantes sont : 29, 22 et 114 Hz . Ces trois fréquences sont propres ne sont pas dans l'intervalle $[0-20 \text{ Hz}]$; le critère de non couplage avec la fréquence de percussion est donc vérifié.

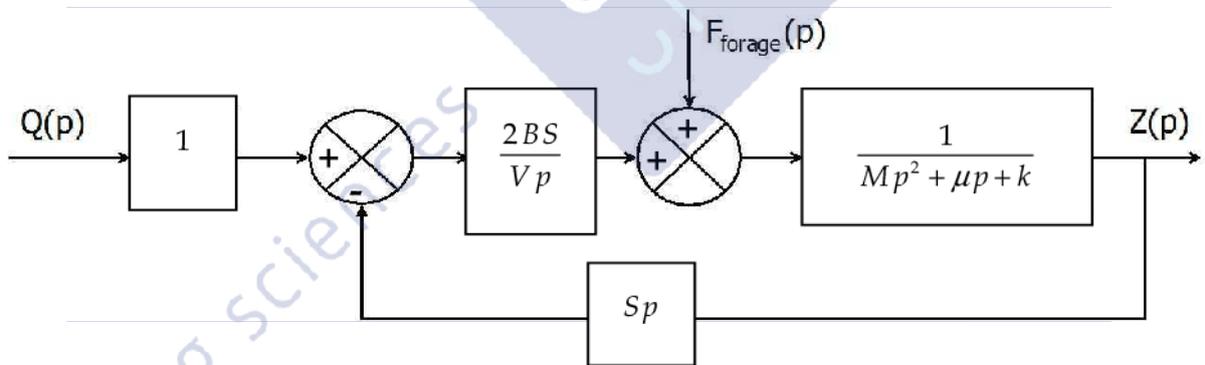
FT 122 « Mettre la plate-forme parallèle à la surface forée »

Question 21. Schéma bloc

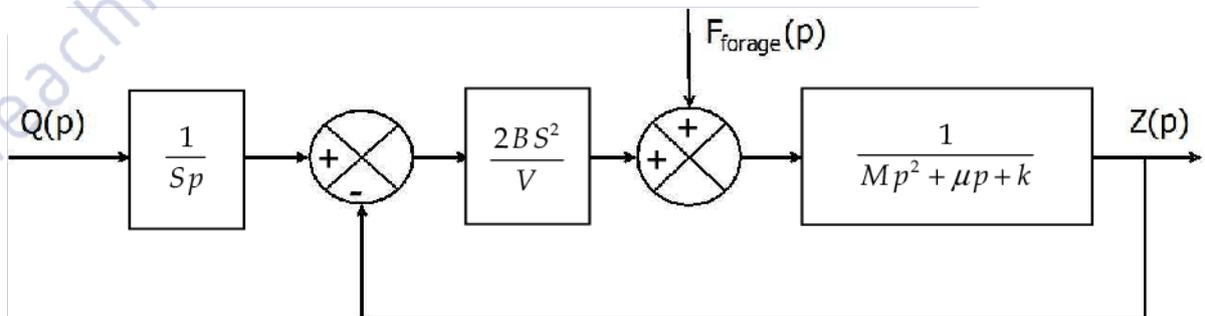
Les équations de comportement du vérin sont établies pour des petites variations de positions autour de la position centrale ($V_1 = V_2$). De ce fait (conditions initiales nulles sur les fonctions), on peut appliquer la Transformée de Laplace aux termes de ces équations :

$$\begin{cases} Q(p) = SpZ(p) + \frac{V}{2B}pP(p) \\ (Mp^2 + \mu p + k)Z(p) = SP(p) + F_{forage}(p) \end{cases}, \text{ soit encore } \begin{cases} P(p) = \frac{2B}{Vp} [Q(p) - SpZ(p)] \\ Z(p) = \frac{1}{Mp^2 + \mu p + k} (SP(p) + F_{forage}(p)) \end{cases}$$

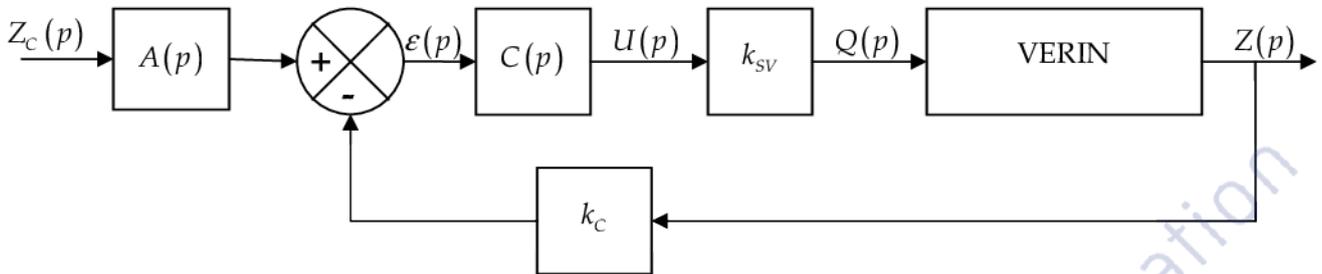
Les équations de comportement du vérin se schématisent comme ci-dessous :



On modifie ce schéma pour rendre le retour unitaire :



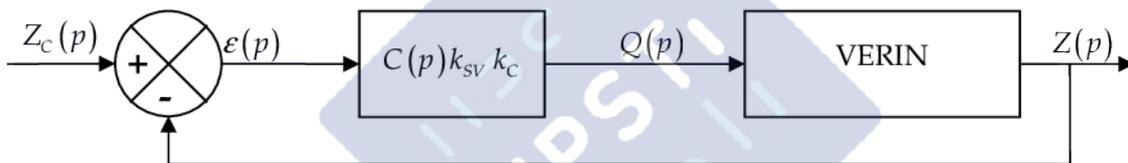
Question 22. Schéma bloc de l'asservissement



Dans le cas où la réponse $z(t)$ est égale à la consigne $z_c(t)$, on obtient un écart $\varepsilon(p)$ nul si l'adaptateur présente la même transmittance que le capteur de position :

$$A(p) = k_c$$

Question 23. Schéma à retour unitaire



Question 24. Précision statique

Le relevé du comportement en poursuite du système sous une entrée en échelon de 0,1 m fait apparaître une réponse oscillante amortie vers une position finale de 0,1 m, égale à la consigne ; l'erreur en régime établi est donc nulle : le système est précis.

Question 25. Respects des critères du cahier des charges

- Temps de réponse à 5%: il est défini à partir de l'instant où la réponse du système reste dans la fourchette $\pm 5\%$ de 0,1 m, soit l'intervalle $[0,095 ; 0,105]$ en m. Le graphique fait état d'un temps de réponse à 5% de 0,35 s : le critère rapidité n'est pas vérifié.
- Marge de phase : lue à la pulsation (Fréquence de environ 5 Hz) où le gain en dB s'annule, elle est de 80 degrés, valeur supérieure à celle prescrite dans le cahier des charges : le critère marge de phase est vérifié.
- Marge de gain : lue à la pulsation (fréquence de environ 20 Hz) où le déphasage atteint -180 degrés, elle est de 2 dB, valeur inférieure à celle demandée dans le cahier des charges : le critère marge de gain n'est pas vérifié.

Question 26. Caractéristiques de la résonance

1. En boucle ouverte : le prolongement de l'asymptote du gain en basse fréquence sous le pic de résonance (20 Hz) permet d'établir le facteur de surtension à 8 dB ;
soit un facteur de résonance de 2,5 pour une pulsation de résonance de 126 rad/s.
2. En boucle fermée, on observe une résonance de 11 dB à la fréquence 20 Hz ;
soit un facteur de résonance de 3,5 pour une pulsation de résonance de 126 rad/s.

Question 27. Filtre réjecteur de fonction de transfert

Le filtre réjecteur de résonance proposé est le rapport de deux polynômes du second ordre, de même

pulsation propre ω_0 et de taux d'amortissement inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$:
$$C(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2\xi_1 \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2\xi_2 \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

- Le dénominateur est résonant $\left(\xi_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de pulsation de résonance $\omega_{r,2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi_2^2}$
- Le numérateur présente « un puit » de gain ("symétrique" d'une résonance) du au coefficient $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, à la pulsation $\omega_{r,1} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$.

Cherchons à quelle pulsation se situent les extrema du module de cette fonction de transfert. Résoudre $\frac{d}{d\omega}|C(\omega)| = 0$ revient à chercher la pulsation ω qui vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi_1 \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi_2 \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 0, \text{ soit : } \frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{A^2 + B^2\xi_1^2}{A^2 + B^2\xi_2^2}} = 0 \quad \text{avec} \quad A = \omega_0^2 - \omega^2 \quad \text{et} \quad B = 2\omega\omega_0$$

Ceci conduit à l'équation :

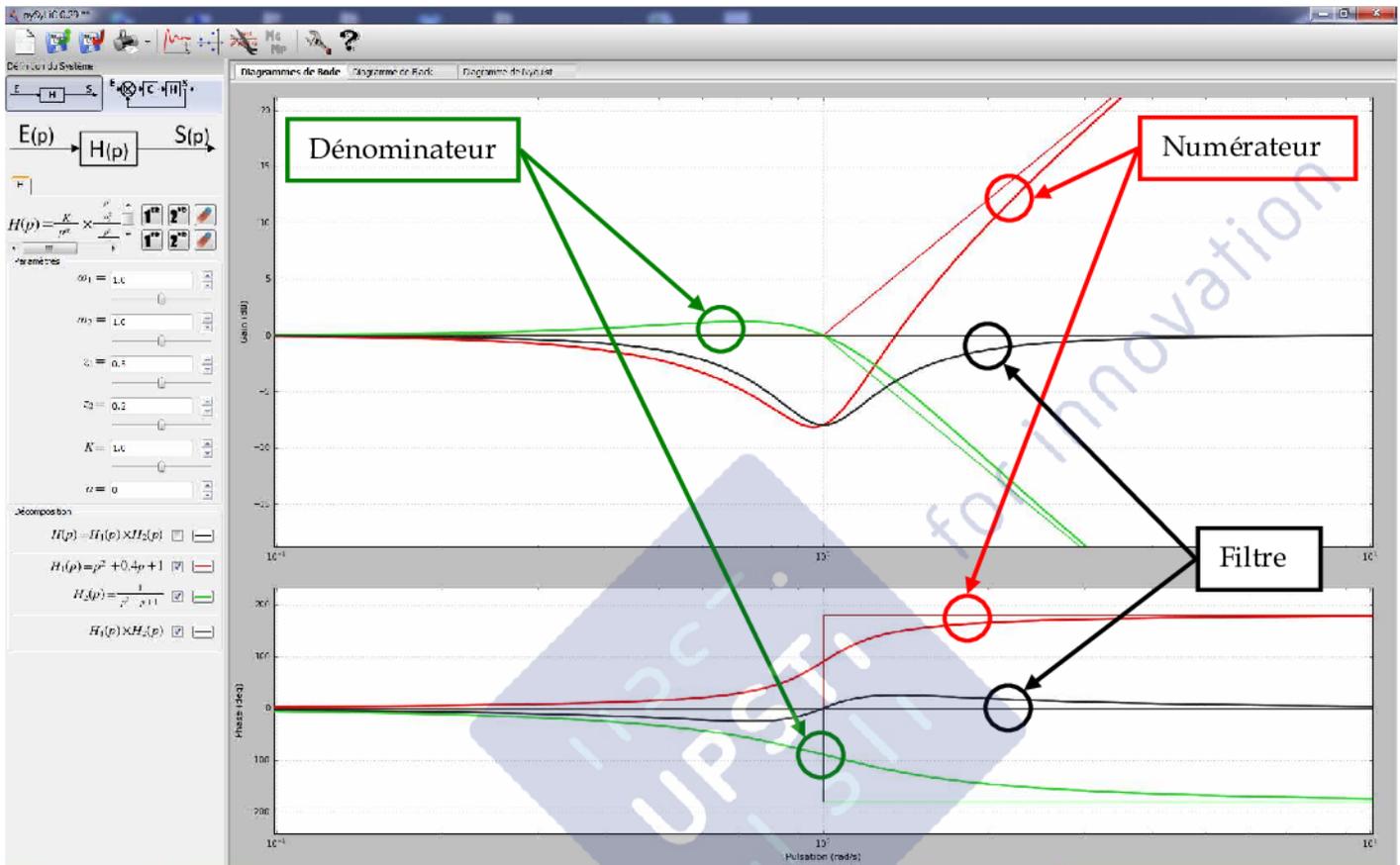
$$\left[2A \frac{dA}{d\omega} + 2B \frac{dB}{d\omega} \xi_1^2\right] [A^2 + B^2\xi_2^2] - \left[2A \frac{dA}{d\omega} + 2B \frac{dB}{d\omega} \xi_2^2\right] [A^2 + B^2\xi_1^2] = 0, \text{ soit encore :}$$

$$2AB(\xi_2^2 - \xi_1^2) \left[B \frac{dA}{d\omega} - A \frac{dB}{d\omega}\right] = 0, \text{ c'est-à-dire : } -8\omega\omega_0^2 (\xi_2^2 - \xi_1^2) (\omega_0^2 - \omega^2) (\omega_0^2 + \omega^2) = 0$$

L'extrema du correcteur qui nous intéresse se situe donc à la pulsation $\omega = \omega_0$ et son module est :

$$|C(\omega_0)| = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

Ce filtre est donc en mesure de corriger un gain à la pulsation ω_0 du correcteur (cf. figure ci-dessous établie avec PySylic et en adoptant les valeurs de la question 28).



Question 28. Réglage du paramètre ξ_1 du correcteur

Puisqu'on veut atténuer la résonance, il faut régler ξ_1 tel que $20 \log \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right) = -8 \text{ dB}$, ξ_2 étant imposé à 0,5.

On obtient $\xi_1 = 0,2$

Question 29. Critique du système corrigé

- Ecart statique : d'après le graphique donné en annexe 6, la réponse en régime établi à un échelon de 0,1 m est de 0,1 m : l'erreur statique est nulle. Le critère précision est vérifié.
- Temps de réponse à 5% : le graphique en annexe 6 fait état d'un temps de réponse à 5% de 0,073 s, inférieur aux 0,15 s préconisées : le critère rapidité est vérifié.
- Marge de phase : lue à la pulsation (Fréquence de 5 Hz) où le gain en dB s'annule, elle est de 75 degrés, valeur supérieure à celle prescrite dans le cahier des charges : le critère marge de phase est vérifié.
- Marge de gain : lue à la pulsation (fréquence de environ 21 Hz) où le déphasage atteint -180 degrés, elle est de 12 dB, valeur supérieure à celle demandée dans le cahier des charges : le critère marge de gain est vérifié.

FT 123 « Maintenir la plate-forme parallèle à la surface forée »

Question 30. Comportement du système en régulation

Le cahier des charges en régulation ne fait intervenir qu'une précision dynamique de 20 mm ; l'écart maximal observé sur la courbe en annexe 7 est inférieur à 0,06 mm : le cahier des charges est vérifié.

Question 31. Stabilité en régulation

- L'échelon de poussée est complètement rejeté par le système après quelques oscillations amorties : le système présente donc une certaine stabilité.
- Nous avons vu précédemment que les marges de stabilité du système sont suffisantes en poursuite ; la stabilité des systèmes en régulation est identique à celle en poursuite (pôles des fonctions de transfert identiques). Le système est stable en régulation.