

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2011

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Alistar Engin sous marin autonome d'inspection

1. Calcul de la réduction de volume

Hypothèse : évolution linéaire de la variation de volume avec la profondeur (c'est déjà le cas de la pression hydrostatique). Le sujet ne mentionne rien sur l'éventuel gradient de salinité ou de température qui pourrait influencer.

$$\Delta V = V_0 - V_{3000} \quad \text{Or} \quad V_{3000} = a \cdot 3000 + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{-(1977,2 - 1974,6)}{250} = -0,0104 \quad \text{et}$$

$$b = 1977$$

$$\text{d'où} \quad \Delta V = V_0 - V_{3000} = 1977,2 - 1946 = 31,2 \quad \text{dm}^3$$

2. Masse du lest :

On veut $\Phi = 0$ kg à 3000 mètres de profondeur soit $\Phi = 0 = \rho_{eau\ 3000} \cdot V_{auv\ 3000} - m_{auv}$.

Il faut déterminer la valeur de la masse volumique de l'eau à 3000 mètres de profondeur. Pour cela à nouveau une hypothèse de linéarité est nécessaire.

$$\rho_{eau\ 3000} = \frac{\rho_{eau\ 250} - \rho_{eau\ 100}}{250 - 100} * (3000 - 100) + \rho_{eau\ 100} = \frac{1028,3 - 1027,6}{250 - 100} * (3000 - 100) + 1027,6 = 1041,13 \quad \text{kg.m}^{-3}$$

$$\text{d'où} \quad m_{auv} = 1041,133 * 1,946 = 2026,045 \quad \text{kg}$$

On déduit la valeur du lest par soustraction de la masse initiale :

$$m_{lest} = 2026,045 - 1977,2 = 48,85 \quad \text{kg}$$

3. Estimation de la flottabilité en surface :

$\Phi_0 = \rho_0 \cdot V_{auv\ 0} - m_{auv} = 1025,6 \cdot 1,9772 - 2026,045 = 1,771 \quad \text{kg}$ Cette valeur ne satisfait pas le cahier des charges ($10 \pm 2 \quad \text{kg}$), il faut donc trouver une variable pour l'ajuster. Comme l'engin est considéré comme un milieu fermé (pas d'échange de matière), le seul paramètre sur lequel agir est le volume, gonflage/dégonflage d'un élément.

4. Plongée sans propulseur :

La flottabilité trouvée sans vessie externe est positive : cela signifie que l'engin flotte ! Pour plonger il faut diminuer cette flottabilité...en dégonflant la vessie vers l'intérieur. En partant de la position initiale avec une flottabilité de 10 kg, le mouvement de plongée peut s'amorcer en dégonflant la vessie externe et en transférant du fluide de l'arrière vers l'avant pour déplacer le centre de gravité de l'AUV et lui donner un angle d'assiette négatif.

5. Angle d'assiette statique :

Pour qu'il y ait équilibre statique de l'AUV soumis à deux actions mécaniques appliquées aux points G et C, il faut que le segment [GC] soit orienté suivant l'accélération de la pesanteur. Cela conduit à : $\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{X}_0 = 0$. En l'exprimant à l'aide de la figure de paramétrage, on obtient :

$$\tan \theta_0 = -\frac{X_C - X_G}{Z_C - Z_G}$$

Pour avoir un angle d'assiette nul en surface, il faut que $X_C = X_G$. Pour garantir la stabilité il faut que sous l'effet d'une perturbation le système retrouve sa position : $Z_C < Z_G$.

6. Résultante dynamique

$$\vec{R}_d(AUV/0) = m \cdot \vec{\Gamma}_{G \in I/0}$$

On commence par calculer la vitesse :

$$\vec{V}_{G \in I/0} = \vec{V}_{O \in I/0} + \vec{\Omega}_{I/0} \wedge \vec{OG} = (u(t) + \dot{\theta}(t) \cdot Z_G) \vec{X}_1 + (\omega(t) - \dot{\theta}(t) \cdot X_G) \vec{Z}_1$$

que l'on dérive par rapport au temps dans le repère R_0

$$\vec{\Gamma}_{G \in I/0} = (\dot{u}(t) + \ddot{\theta}(t) \cdot Z_G + \omega(t) \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot X_G) \vec{X}_1 + (\dot{\omega}(t) - \ddot{\theta}(t) X_G - u(t) \cdot \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot Z_G) \vec{Z}_1$$

On obtient par identification :

$$A_1 = m \cdot (\dot{u}(t) + \omega(t) \dot{\theta}(t) - X_G \cdot \dot{\theta}^2(t) + Z_G \cdot \ddot{\theta}(t))$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = m \cdot (\dot{\omega}(t) - \ddot{\theta}(t) X_G - u(t) \cdot \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot Z_G)$$

7. Moment dynamique au point O:

Seule la composante suivant (O, \vec{Y}_0) est demandée, on peut donc la calculer directement :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_O(AUV/0) \cdot \vec{Y}_0 &= \vec{\delta}_G \cdot \vec{Y}_0 + \vec{R}_d(AUV/0) \wedge \vec{GO} \cdot \vec{Y}_0 \\ &= B \cdot \ddot{\theta}(t) + m \cdot Z_G (\dot{u}(t) + \ddot{\theta}(t) \cdot Z_G + \omega(t) \cdot \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot X_G) - m \cdot X_G (\dot{\omega}(t) - \ddot{\theta}(t) \cdot X_G - u(t) \cdot \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot Z_G) \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\delta_1 = B + m \cdot Z_G^2 + m \cdot X_G^2$$

$$\delta_2 = m \cdot (Z_G \cdot \omega(t) + X_G \cdot u(t))$$

$$\delta_3 = m \cdot Z_G$$

$$\delta_4 = -m \cdot X_G$$

8. Équations scalaires du mouvement

Il faut prendre la projection de la résultante sur \vec{Z}_1 :

$$m \cdot (\dot{\omega}(t) - \ddot{\theta}(t) \cdot X_G - u(t) \cdot \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^2(t) \cdot Z_G) = R_{zga} + R_{zp} + R_{zh}$$

et celle de l'équation de moment suivant (O, \vec{Y}_0)

$$\delta_1 \cdot \ddot{\theta}(t) + \delta_2 \cdot \dot{\theta}(t) + \delta_3 \cdot \dot{u}(t) + \delta_4 \dot{\omega} = M_{ga} + M_p + M_h$$

9. Respect du cahier des charges

A partir de $t=800s$, on constate que les composantes de vitesse demeurent constantes ainsi que l'angle d'assiette.

- Profondeur : rien ne s'oppose à ce qu'elle soit atteinte.
- Dérive : le premier graphe indique une dérive de 900m pour 450m de profondeur, vu la nature du mouvement on obtient une dérive de 6000m à 3000m de profondeur ; critère satisfait
- Temps de descente :

on peut déterminer la composante de vitesse suivant \vec{Z}_0 ,

$$V_z = -u(t) \sin(\theta(t)) + \omega(t) \cos(\theta(t)) = -0,46 \cdot \sin(-4,5) + 0,18 \cdot \cos(-4,5) = 0,22 \text{ m.s}^{-1}$$

Soit pour parcourir 3000m une durée de 3h52min < 4h : critère satisfait.

Ou bien à partir de la trajectoire et d'une estimation de la vitesse en déduire le temps :

longueur : $\sqrt{(6000^2 + 3000^2)} = 6708 \text{ m}$ vitesse : $\sqrt{(0,46^2 + 0,19^2)} = 0,49 \text{ m.s}^{-1}$
soit un temps de $6708/0,49 \approx 3\text{h } 46 \text{ min}$

- Oscillations d'assiette hors transitoire : A partir de 500s il n'y a plus d'oscillations : critère satisfait.

10. Phase de déplacement horizontal

Dans cette phase : $\theta(t)=0$ $\omega(t)=0$ $W_{ct}=0$, ainsi on obtient en partant de l'équation de mouvement donnée :

$$m \cdot \dot{u}(t) = R_{xp} - \rho a_{11} \cdot \dot{u}(t) - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x (u(t) - U_{ct})^2$$

11. Schéma bloc

Afin de compléter le schéma bloc, il faut exprimer l'équation précédente sous la forme :

$$\dot{u}(t) = \left[R_{xp} - \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x (u(t) - U_{ct})^2 \right] \frac{1}{(m + \rho a_{11})} \quad (\text{voir schéma en fin de document})$$

12. Non linéarité du modèle dynamique

L'équation obtenue fait apparaître le carré de la vitesse, ce qui n'est pas compatible avec la notion de linéarité.

13. Torseur de l'action d'un propulseur

Avec le paramétrage fourni et l'angle $\beta = 45^\circ$ on obtient :

$$E_1 \left\{ \begin{array}{c} P_1 \cdot \vec{X}_{31} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 + P_1 \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{Y}_1 - \vec{Z}_1) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

14. Torseur de l'action des propulseurs arrière :

Par analogie avec le calcul précédent et en tenant compte de la disposition spatiale des propulseurs on obtient :

$$\begin{array}{l} E_2 \left\{ \begin{array}{c} P_2 \cdot \vec{X}_{32} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \\ E_3 \left\{ \begin{array}{c} P_3 \cdot \vec{X}_{33} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \\ E_4 \left\{ \begin{array}{c} P_4 \cdot \vec{X}_{32} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \end{array} = \left\{ \begin{array}{c} P_2 \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 + P_2 \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{Y}_1 + \vec{Z}_1) \\ \vec{0} \\ P_3 \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 + P_3 \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{Y}_1 + \vec{Z}_1) \\ \vec{0} \\ P_4 \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 + P_4 \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\vec{Y}_1 - \vec{Z}_1) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Donc en considérant $P_1 = P_4 = P + dP$ et $P_2 = P_3 = P - dP$ le torseur en M s'écrit :

$${}_M \{ T_{Par \rightarrow AUV} \} = \begin{Bmatrix} 4.P \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 - 4.dP \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{Z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En l'exprimant en O :

$${}_O \{ T_{Par \rightarrow AUV} \} = \begin{Bmatrix} 4.P \cdot \cos(\alpha) \vec{X}_1 - 4.dP \cdot \sin(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{Z}_1 \\ -2.dP \cdot \sin(\alpha) \sqrt{2} \cdot X_M \cdot \vec{Y}_1 \end{Bmatrix}$$

15. Gain du répartiteur de poussée :

si $X = TY$ alors $Y = T^{-1}X$. Dans ce cas on lit directement d'après la matrice fournie

$$P = R_{xp} \cdot 0,2628 \quad \text{et le schéma bloc donne} \quad K = \frac{R_{xp}}{P} = \frac{1}{0,2628} = 3,81 \quad .$$

16. Tableau récapitulatif :

La matrice par lecture permet de remplir le tableau, en considérant que P_i dépend de P et dP :

	Rxp	Ryp	Rzp	Lp	Mp	Np
P_1	✓		✓		✓	
P_2	✓		✓		✓	
P_3	✓		✓		✓	
P_4	✓		✓		✓	
P_{vg}		✓	✓	✓	✓	✓
P_{vd}		✓	✓	✓	✓	✓
P_{Lav}		✓				✓
P_{Lar}		✓				✓

Remarque : j'ai du mal à interpréter le fait que P_{vg} et P_{vd} conduisent à une composante suivant Ryp et une suivant Np.

Si on utilise les différents torseurs d'action mécanique, on peut voir les termes non nuls de la matrice T, ce qui conduit à :

$$T = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

Si l'on inverse la matrice (avec Matlab par exemple) on obtient :
 $T^{-1} =$

0.2628	0	0	0	0	0
0	0	0.1326	0	-0.4081	0
0	-0.0165	0.5579	-0.6944	-0.1783	-0.1204
0	0.0165	0.5579	0.6944	-0.1783	0.1204
0	0.4737	0	0	0	0.4032
0	0.5262	0	0	0	-0.4032

» $\text{inv}(T^{-1})$

T =

3.8052	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0001	1.0001
0	-0.8739	1.0001	1.0001	0	0
0	0	-0.7200	0.7200	-0.2501	0.1800
0	-2.7343	0.3249	0.3249	0	0
0	0	0	0	1.3052	-1.1750

On retrouve la même forme qu'avec les torseurs d'action mécanique et on constate que Ryp ne dépend que des propulseurs latéraux...ainsi que Np, ce qui me ferait changer le tableau réponse.

17. Manœuvrabilité optimale :

Pour une descente verticale avec un angle d'assiette nul, il faut utiliser les propulseurs verticaux avec la même poussée. Dans ce cas les composantes de résultante suivant \vec{Y}_1 se compensent, ainsi que les composantes de moment suivant \vec{X}_1 et \vec{Z}_1 . Cependant les composantes de moment suivant \vec{Y}_1 ne sont pas compensées. Pour éventuellement les compenser je ne vois que l'utilisation du SARFA en modifiant la position du centre de gravité, mais cette compensation sera lente.

18. Schéma bloc du modèle de la commande en poussée :

D'après l'équation de la poussée fournie, on peut écrire,

$P(t) = \rho \delta_1 D^4 n \left[n - \frac{\delta_2}{\delta_1 \cdot D} (u(t) - Uct) \right]$, ce qui permet de compléter les blocs (voir le schéma en fin de document)

19. Critère de précision :

Il est possible de se placer dans le cas d'un schéma bloc à retour unitaire, et dans ce cas l'erreur et l'écart sont semblables et le théorème de la valeur finale donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \epsilon(p) = \frac{\tilde{u}_c}{1 + K_{FTBO}} \quad \text{avec} \quad K_{FTBO} = K_{capt} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad \epsilon(p) = \tilde{u}_c(p) - \tilde{u}(p)$$

L'application numérique conduit à : $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0,68 \cdot \tilde{u}_c$. Soit avec la définition donnée de l'erreur

$\frac{\tilde{u}_c - \tilde{u}}{\tilde{u}_c} \cdot 100 = 68\%$. Cette valeur est incompatible avec le critère du cahier des charges qui stipule 1%.

20. Valeur du correcteur :

Précision :

Dans le cas d'un correcteur de type proportionnel, le seul changement est la valeur du gain, on aura donc : $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \epsilon(p) = \frac{\tilde{u}_c}{1 + K_{FTBO}}$ avec $K_{FTBO} = K_{cor} \cdot K_{capt} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3}$. Pour respecter le cahier des charges il faut :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \epsilon(p) = \frac{\tilde{u}_c}{1 + K_{FTBO}} \leq 0,01 \cdot \tilde{u}_c \quad , \text{ et donc } K_{cor} \geq \frac{1 - 0,01}{0,01} \cdot K_{capt} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 211$$

Dépassement : ayant un 1er ordre bouclé par un retour unitaire la FTBF est d'ordre 1, le critère de zéro dépassement est vérifié.

Temps de réponse : il faut déterminer la constante de temps du système bouclé, soit

$\tau_{FTBF} = \frac{\tau_{FTBO}}{1 + K_{FTBO}}$ et trouver la valeur du gain du correcteur qui permet de satisfaire le temps de réponse à 5%, soit $3 \cdot \tau_{FTBF} \leq 5s$ donc $3 \cdot \frac{\tau}{1 + K_{capt} \cdot G \cdot K_{cor} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \leq 5$ ce qui conduit à

$$K_{cor} \geq \frac{3 \cdot \frac{\tau}{5} - 1}{K_{capt} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 11,9$$

En conclusion la valeur permettant de satisfaire l'ensemble des critères est $K_{cor} \geq 211$.

21. Annulation de l'impact de la perturbation

Pour annuler l'impact de la perturbation il faut placer un correcteur possédant une intégration en amont de celle-ci dans le processus.

22. Compensation du pôle :

Si l'on choisit un correcteur de type proportionnel intégral, la fonction de transfert est de la forme :

$$C(p) = K_{cor} \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K_{cor} \cdot \frac{T_i p + 1}{T_i p} \quad .$$

La FTBF s'écrit : $FTBF(p) = \frac{K_{capt} \cdot G \cdot K_{cor} \cdot (T_i p + 1) \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{T_i p \cdot (1 + 11p) + K_{capt} \cdot G \cdot K_{cor} \cdot (T_i p + 1) \cdot 5 \cdot 10^{-3}}$

On observe dans la FTBF un terme au numérateur de zéro $\frac{-1}{T_i}$. Pour compenser le pôle de la FTBO, il suffit de donner une valeur identique à T_i soit : $T_i = \tau = 11 \text{ s}$. Dans ce cas la FTBF se simplifie et devient :

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{K_{capt} \cdot K_{cor} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3}} p}$$

On détermine la valeur du gain permettant de satisfaire le temps de réponse à 5%, soit :

$$\frac{T_i}{K_{capt} \cdot K_{cor} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot 3 \leq 5s \quad \text{l'application numérique conduit à :}$$

$$k_{cor} \geq 3 \cdot \frac{\tau}{5 \cdot K_{capt} \cdot G \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 14,04$$

Conclusion : avec $T_i = \tau = 11$ et $K_{cor} \geq 14,04$ on obtient un système qui ne comporte pas de dépassement, dont le temps de réponse à 5% est inférieur à 5s et dont la précision telle quelle est définie est inférieure à 1% (l'erreur est nulle car le gain statique de la FTBF vaut 1).

23. Répartition de la puissance :

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système complet et en supposant que la puissance des efforts intérieurs au système se réduit à celle des propulseurs on peut écrire :

$$\frac{dE_c(AUV/R_g)}{dt} = P(ext \rightarrow AUV) + P_{int}$$

Terme de l'énergie cinétique : $\frac{dE_c(AUV/R_g)}{dt} = m \cdot \dot{u}(t) \cdot u(t)$

Terme de puissance : traînée hydrodynamique soit $\{V_{AUV/0}\} \times \{T_{ext \rightarrow AUV}\} = u(t) \cdot \vec{X}_0 \cdot (R_{xt} \cdot \vec{X}_0)$

Ainsi on peut exprimer la puissance des propulseurs :

$$P_{propulseur}(t) = m \cdot \dot{u}(t) \cdot u(t) + \rho \cdot a_{11} \cdot \dot{u}(t) \cdot u(t) + \frac{1}{2} \rho S_{réf} C_x u^3(t)$$

Les termes dépendant de la variation de la vitesse correspondent à la mise en mouvement, et le terme ne dépendant que de la vitesse correspond au maintien.

Pour l'application numérique, on se place dans le cas le plus défavorable, soit au moment où l'on atteint la vitesse maximale. Dans ce cas on obtient :

$$P_{propulseur} = (((1977 + 40) + 1036 \cdot 0,155) \cdot \frac{2,06}{5} + \frac{1}{2} \cdot 1036 \cdot 1,114 \cdot 0,32 \cdot 2,06^2) \cdot 2,06$$

$$P_{propulseur} = 3462,39 W \approx 3,47 kW$$

D'après le cahier des charges chaque propulseur peut fournir $1,2 kW$, soit pour les 4 une puissance maximale de $4,8 kW$. Le critère de puissance maximale est donc vérifié.

24. Puissance consommée en phase exploration

En négligeant la phase d'accélération, on ne considère plus que le terme de maintien à vitesse constante, l'application numérique conduit à :

$$P_{\text{propulseur}} = \frac{1}{2} \rho \cdot S_{\text{réf}} \cdot C_x \cdot u^3(t) \approx 201 \text{ W} \quad \text{avec} \quad u(t) = 1,028 \text{ m.s}^{-1}$$

25. Autonomie :

énergie nécessaire au déplacement : $P_{\text{propulseur}} * \text{durée} = 200 \cdot 24 = 4,83 \text{ kWh}$

énergie nécessaire à l'inspection : $P_{\text{acquisition}} * \text{durée} = 150 \cdot 24 = 3,6 \text{ kWh}$

énergie nécessaire au SARFA : 10% du total embarqué soit 2kWh

énergie nécessaire à la communication : 10% du total embarqué soit 2kWh

Énergie totale nécessaire : $P_{\text{totale}} \approx 12,5 \text{ kWh}$

On constate qu'il demeure une marge de sécurité non négligeable $\approx 7,5 \text{ kWh}$

Schéma bloc de la commande :

