

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2012

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Chariot élévateur à bateaux

QL1 L'ensemble de solides { T4 ; T6 ; T7 ; T8 ; T9 ; T10 ; T11 } comporte 2 boucles indépendantes. On peut donc écrire 2 fermetures vectorielles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

La première équation donne une relation entre θ_1, θ_3 et μ .

La deuxième équation donne une relation entre θ_2 et θ_4 .

L'ensemble de solides { T4 ; T6 ; T7 ; T8 ; T9 ; T10 ; T11 } a 3 mobilités internes : rotations des pièces T9 ; T10 et T11 autour de leurs axes longitudinaux respectifs. Si l'on suppose que le système est isostatique, la mobilité utile est de 1 :

$$m_u = h - 6\gamma + N_c - m_i = 0 - 12 + 16 - 3 = 1$$

Un seul actionneur suffit donc.

QL2 On reprend la deuxième équation de fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD}$$

En projetant dans le repère R_{T6} :

$$\begin{cases} -a \cdot \cos(\theta_2) + b \cdot \sin(\theta_2) - f \cdot \sin(\theta_4) = -e + c \cdot \cos(\theta_1) - d \cdot \sin(\theta_1) \\ -a \cdot \sin(\theta_2) - b \cdot \cos(\theta_2) + f \cdot \cos(\theta_4) = 0 + c \cdot \sin(\theta_1) + d \cdot \cos(\theta_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - f \cdot \sin(\theta_4) = -e + c \\ -b + f \cdot \cos(\theta_4) = d \end{cases} \Rightarrow f = \sqrt{(a+c-e)^2 + (b+d)^2}$$

QL3 D'après le critère C108, il faut avoir $0 \leq \theta_1 \leq 30^\circ$. Ainsi, on doit avoir

$$0,777m \leq \mu \leq 1,09m$$

La course correspondante du vérin est donc de : $c_{\text{vérin}} = 1,09 - 0,777 \approx 0,3m$

Dans ces conditions, le critère C109 (temps d'ouverture de 5 s) est automatiquement vérifié car le vérin sort de 0,3m en 3,1s environ.

QL4 Pour que les 2 fourches s'ouvrent de façon symétrique, il faut avoir $\theta_1 = -\theta_2$. Or, d'après les courbes issues de la simulation, θ_1 vaut 30° quand θ_2 vaut -25° (on se restreint au $\theta_{1\text{max}}$ respectant le critère C108). Le critère C110 n'est donc pas strictement vérifié.

Sans modifier le mécanisme, il faut indiquer une flexibilité de $30 - 25 = 5^\circ$

On peut justifier de diminuer cette flexibilité pour faciliter le travail de l'opérateur. En effet, si les

fourches évoluent de façon symétrique, l'opérateur pourrait se contenter d'observer une seule fourche lors d'une prise de bateau.

D'autre part, l'égalité exacte des angles θ_1 et θ_2 n'est pas nécessaire car l'opérateur devra de toute façon manœuvrer le vérin latéral pour (re-)centrer les fourches sur le bateau.

QL5 Pour déterminer l'effort développé par le vérin T10+T11, il faut procéder en 5 étapes :

- Le solide T9 est soumis à 2 forces en D et E. Elles ont donc pour support la direction DE.
- Le vérin T10+T11 est soumis à 2 forces en A et B. Elles ont donc pour support la direction AB.
- Le solide T7 est soumis à 3 actions mécaniques (poids, action de T9 en E et action de T6 en F). L'équation du moment statique autour de l'axe (F, \vec{x}_{T7}) donne l'effort au point E.
- Enfin, le solide T8 est soumis à 4 actions mécaniques. L'équation du moment statique suivant l'axe (C, \vec{x}_{T8}) donne l'effort de T11 sur T8 en B.

QL6 La course du vérin étant d'environ 0,3m, l'effort maximum à développer pour le vérin est de 7200N.

QL7 On reprend la première fermeture géométrique :

$$\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA}$$

On projette dans le repère R_{T6} :

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu \cdot \sin(\theta_3) = -g \cdot \cos(\theta_1) - h \cdot \sin(\theta_1) + i \\ \mu \cdot \cos(\theta_3) = -g \cdot \sin(\theta_1) + h \cdot \cos(\theta_1) - j \end{cases}$$

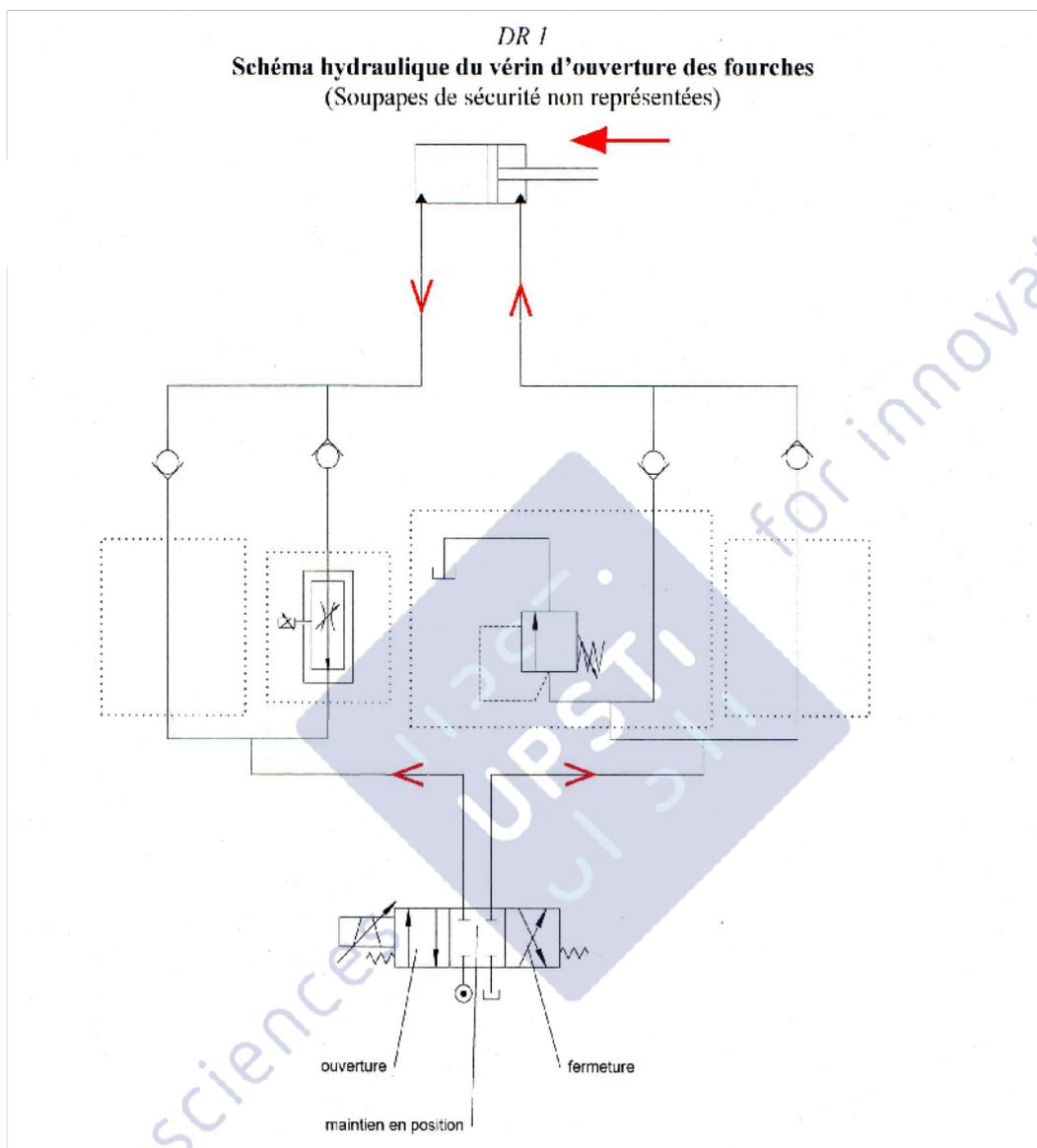
$$\Rightarrow \mu^2 = (i - g \cdot \cos(\theta_1) - h \cdot \sin(\theta_1))^2 + (h \cdot \cos(\theta_1) - g \cdot \sin(\theta_1) - j)^2$$

On dérive :

$$\Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{\mu} \mu}{(i - g \cdot \cos(\theta_1) - h \cdot \sin(\theta_1))(g \cdot \sin(\theta_1) - h \cdot \cos(\theta_1)) + (h \cdot \cos(\theta_1) - g \cdot \sin(\theta_1) - j)(-h \cdot \sin(\theta_1) - g \cdot \cos(\theta_1))}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{\mu} \mu}{i(g \cdot \sin(\theta_1) - h \cdot \cos(\theta_1)) + j(h \cdot \sin(\theta_1) + g \cdot \cos(\theta_1))}$$

QL8



QL9 Le critère C107 impose une vitesse angulaire maximale des fourches de $0,2 \text{ rad/s}$.
D'après la figure 8, on choisira donc une vitesse de sortie de tige du vérin inférieure ou égale à $0,1 \text{ m/s}$: $\dot{\mu} < 0,1 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour $\dot{\mu} = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$, les fourches pourront s'ouvrir de 30° en 5 s ($0,15 * 5 = 0,75 \text{ rad} \approx 43^\circ$). Par contre pour $\dot{\mu} = 0,05 \text{ m.s}^{-1}$, les fourches ne pourront pas s'ouvrir de 30° en 5 s ($0,08 * 5 = 0,4 \text{ rad} \approx 23^\circ$).

Il faut régler le régulateur de débit à $q_{\text{régul.}} = S_{\text{vérin}} \cdot \dot{\mu} = 0,13 \text{ l.s}^{-1}$ (avec $\dot{\mu} = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$).

QL10 On isole l'ensemble : { bateau ; S ; chaîne ; T12 ; T4 }

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble dans le référentiel terrestre supposé

galiléen :

$$P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = \frac{dEc}{dt}$$

Calcul des puissances :

$$P_{\text{ext}} = F_v \cdot V_{H,T4/R_0} - m_{T4} \cdot g \cdot V_{H,T4/R_0} - (m_B + m_S) \cdot g \cdot V_{G_B, \text{bateau}/R_0}$$

$$\text{donc } P_{\text{ext}} = \left\{ \frac{1}{2} (F_v - m_{T4} \cdot g) - (m_B + m_S) \cdot g \right\} \cdot V_{G_B, \text{bateau}/R_0}$$

- $P_{\text{int}} = 0$ car les liaisons sont parfaites et la chaîne non dissipative.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble :

$$Ec = \frac{1}{2} (m_b + m_S) V_{G_B, \text{bateau}/R_0}^2 + \frac{1}{2} (m_{T4}) V_{H,T4/R_0}^2 + \frac{1}{2} I_{T12} \omega_{T12/R_0}^2$$

$$\text{donc } Ec = \left(\frac{1}{2} (m_b + m_S) + \frac{1}{8} m_{T4} + \frac{1}{2 R_{T12}^2} I_{T12} \right) \cdot V_{G_B, \text{bateau}/R_0}^2$$

On note $\gamma = \frac{dV_{G_B, \text{bateau}/R_0}}{dt}$ l'accélération galiléenne du bateau.

Ainsi :

$$\left((m_b + m_S) + \frac{1}{4} m_{T4} + \frac{1}{R_{T12}^2} I_{T12} \right) \cdot V_{G_B, \text{bateau}/R_0} \cdot \gamma = \left\{ \frac{1}{2} (F_v - m_{T4} \cdot g) - (m_B + m_S) \cdot g \right\} \cdot V_{G_B, \text{bateau}/R_0}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\frac{1}{2} (F_v - m_{T4} \cdot g) - (m_B + m_S) \cdot g}{(m_b + m_S) + \frac{1}{4} m_{T4} + \frac{1}{R_{T12}^2} I_{T12}}$$

Cette valeur permet de valider le critère C103 car connaissant la vitesse de levage à atteindre en charge (cf. critère C102) et l'accélération, on peut connaître le temps du régime transitoire (

$$t = \frac{V_{\text{levage}}}{\gamma}).$$

QL11 Quand le chariot avance à vitesse constante ($\varphi_{\text{dec}} = 0$), il faut que l'angle $\varphi(t)$ soit nul. Il faut donc envoyer une consigne $\varphi_c = -\delta$.

QL12 On isole l'ensemble $\{ S2 ; T2 \}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen :

$$P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = \frac{dEc}{dt}$$

Calcul des puissances :

$$P_{\text{ext}} = p(t) \cdot S \cdot V_{B_1, T2/R_0} - \mu \cdot \dot{a} \cdot \dot{a} - m_{S2} \cdot g \cdot z_0 \cdot \frac{\rightarrow d\overline{O_1 G_{S_2}}}{dt}_{R_0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{ext} &= p(t) \cdot S \cdot \dot{\lambda} - \mu \cdot \dot{\alpha}^2 - m_{S2} \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot (-x_{G_{S2}} \vec{z}_{T3} + z_{G_{S2}} \vec{x}_{T3}) \\ \Rightarrow P_{ext} &= \frac{p(t) \cdot S}{k} \cdot \dot{\alpha} - \mu \cdot \dot{\alpha}^2 + m_{S2} \cdot g \cdot \dot{\alpha} \cdot (x_{G_{S2}} \cos \varphi + z_{G_{S2}} \sin \varphi) \\ \Rightarrow P_{ext} &= \dot{\alpha} \left(\frac{p(t) \cdot S}{k} - \mu \cdot \dot{\alpha} + m_{S2} \cdot g \cdot (x_{G_{S2}} \cos \varphi + z_{G_{S2}} \sin \varphi) \right) \end{aligned}$$

$P_{int} = 0$ car les liaisons internes à S2 sont parfaites.

Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble :

$$Ec(S_2/1) = \frac{1}{2} J_{S2} \cdot \omega_{S2/R0}^2 + \frac{1}{2} m_{S2} \overline{V_{G_{S2}, S_2/1}}^2 = \frac{1}{2} (J_{S2} + m_{S2} \sqrt{x_{G_{S2}}^2 + z_{G_{S2}}^2}) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2 \text{ avec}$$

$$J_{eq} = J_{S2} + m_{S2} \sqrt{x_{G_{S2}}^2 + z_{G_{S2}}^2}$$

On trouve donc, au final :

$$J_{eq} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t) \cdot S}{k} + m_{S2} \cdot g \cdot (x_{G_{S2}} \cos \varphi + z_{G_{S2}} \sin \varphi)$$

Si on suppose l'angle φ nul (situation de la question précédente), on retrouve bien l'expression demandée.

$$J_{eq} \text{ est égale à : } J_{eq} = J_{S2} + m_{S2} \sqrt{x_{G_{S2}}^2 + z_{G_{S2}}^2}$$

QL13 On trouve aisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2 \cdot B}{p \cdot V_0} \\ B = \frac{S}{k} \\ C = \frac{1}{p(\mu + J_{eq} p)} \\ D = k \cdot S \cdot p \end{array} \right.$$

Le couple résistant s'exprime par :

$$C_{R0} = m_{S2} \cdot g \cdot x_{G_{S2}}$$

QL14 Pour les pulsations inférieures à 20 rad/s, la servovalve garde un gain quasiment constant, et un déphasage inférieur (en valeur absolue) à 20°. Le diagramme de Bode du vérin montre qu'il se comporte comme un système fondamental de premier ordre, de pulsation caractéristique 1rad/s. A 20 rad/s, le gain est de -27dB et le déphasage de -85°. La dynamique de l'ensemble de ces deux composants est donc dictée par celle du vérin.

QL15 Dans la plage 0-20 rad/s, la servo-valve a un gain quasi-constant et un déphasage

quasi-nul : on peut la modéliser par le gain pur $K_{serv} \approx \frac{2}{1} = 2m^3.s^{-1}.A^{-1}$

QL16 On cherche la liaison équivalente à 2 liaisons linéaires rectilignes en parallèle (méthode statique) :

$$\{T_{F \rightarrow B}\} = \left\{ \begin{array}{c} F1_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B7} \\ M1_{O_{BT}}(F \rightarrow B) \end{array} \right\}_{O_{BT}} + \left\{ \begin{array}{c} F2_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B8} \\ M2_{O_{BT}}(F \rightarrow B) \end{array} \right\}_{O_{BT}}$$

avec $\begin{cases} M1_{O_{BT}(F \rightarrow B)} = M1_{I_{T7}(F \rightarrow B)} \vec{t}_{B7} + O_{BT} I_{T7} \wedge F1_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B7} \\ M2_{O_{BT}(F \rightarrow B)} = M2_{I_{T8}(F \rightarrow B)} \vec{t}_{B8} + O_{BT} I_{T8} \wedge F2_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B8} \end{cases}$

Soit encore : $\{T_{F \rightarrow B}\} = \left\{ \begin{array}{c} F1_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B7} + F2_{F \rightarrow B} \vec{n}_{B8} \\ M1_{I_{T7}(F \rightarrow B)} \vec{t}_{B7} + M2_{I_{T8}(F \rightarrow B)} \vec{t}_{B8} \end{array} \right\}$

En supposant raisonnablement que $\vec{d}_{B7} = \vec{d}_{B8}$, on voit que le torseur d'action mécanique global ne présente pas de composante de résultante et de composante de moment sur l'axe \vec{d}_{B7} . La liaison équivalente est une liaison pivot glissant d'axe (O_{BT}, \vec{d}_{B7})

QL17 $\vec{R}_{(F \rightarrow B)}$ doit être colinéaire à \vec{z}_{T3} car sinon le bateau risquerait de basculer ou de glisser le long des fourches.

On isole le bateau. Le théorème de la résultante dynamique dans le référentiel galiléen projeté suivant l'axe \vec{x}_{T3} donne :

$$m_B \Gamma_{dec}(t) = -m_B g \sin \varphi_{dec}(t) + \vec{R}_{(F \rightarrow B)} \cdot \vec{x}_{T3}$$

$$\Gamma_{dec}(t) = -g \sin \varphi_{dec}(t)$$

QL18 Le rapport $\frac{\Gamma_{dec}(t)}{g}$ étant sûrement faible, on peut faire un développement limité au

premier ordre du sinus. On trouve donc la relation : $\Gamma_{dec}(t) = -g \varphi_{dec}(t)$

QL19 Critères du cahier des charges :

- Précision : Le système est précis (erreur statique nulle due à une fonction de transfert en boucle ouverte de classe 1).
- Rapidité : Le temps de réponse à 5% est d'environ $3,7s > 0,9s$. La rapidité n'est pas bonne.
- Amortissement : Il y a des dépassements. L'amortissement n'est pas bon.
- Stabilité : $M_\varphi \approx 20^\circ$ et $M_G \approx 8dB$. La stabilité n'est pas bonne.

QL20 Réglage du correcteur :

On règle la pulsation $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$ à une valeur légèrement plus grande que ω_{0dB} du système (ici environ 10-12 rad/s). Ensuite, on choisit la valeur de « a » rajoutant environ 15 ° ici (35°-20°) à

l'aide de la formule : $\varphi_c = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$

QI.21 Validation des critères du cahier des charges avec le système corrigé :

- Précision : Le système est toujours précis.
- Rapidité : Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,7s<0,9s. La rapidité est bonne.
- Amortissement : Il n'y a plus de dépassement. L'amortissement est bon.
- Stabilité : $M_\varphi \approx 50^\circ$ et $M_G \approx 14dB$. La stabilité est bonne.

QII.1

Rapports de réduction de la boîte de vitesses Powershift

	Ee débrayé Era débrayé	Ee débrayé Era embrayé	Ee embrayé Era embrayé	Ee embrayé Era débrayé
Ema débrayé	Pas de transmission	$\frac{-Ze1.Zra2}{Zra1.Zs2} = -0,93$	Bloqué	$\frac{-Ze2}{Zs2} = -0,65$
Ema embrayé	$\frac{Ze1.Zma2}{Zma1.Zs2} = 0,8$	Bloqué	Bloqué	Bloqué

QII.2 On isole le chariot des roues jusqu'à l'embrayage.

On suppose que le sol est horizontal et que le frottement de roulement roues/sol est négligé.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel terrestre galiléen durant la phase 1, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M_{ensemble} vit(t)^2 \right) = P_{ext} + P_{int}$$

avec $P_{ext} = C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} = C_{mpe} \cdot t \cdot \omega_{mpe}$ et $P_{int} = C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} (\eta_G - 1) = C_{mpe} \cdot t \cdot \omega_{mpe} (\eta_G - 1)$

Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M_{ensemble} vit(t)^2 \right) = C_{mpe} \cdot t \cdot \omega_{pe} \cdot \eta_G$$

En intégrant, on trouve :

$$vit(t) = \sqrt{\frac{C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} \cdot \eta_G}{M_{ensemble}} \cdot t}$$

Pour que les arbres d'entrée et de sortie de l'embrayage tournent à la même vitesse, il faut :

$$vit(1s) = R_{roue} \cdot \omega_{roue} = R_{roue} \cdot r_s \cdot \omega_{mpe} \cdot r_{bl}$$

Or $vit(1s) = \sqrt{\frac{C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} \cdot \eta_G}{M_{ensemble}}}$

Par conséquent : $vit(1s) = \sqrt{\frac{C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} \cdot \eta_G}{M_{ensemble}}} = R_{roue} \cdot r_s \cdot r_{bl} \cdot \omega_{mpe}$

$$\Rightarrow r_s = \frac{1}{R_{roue} \cdot r_{bl}} \sqrt{\frac{C_{mpe} \cdot \eta_G}{M_{ensemble} \cdot \omega_{mpe}}}$$

A.N. : $\Rightarrow r_s = \frac{1}{24,0 \cdot 0,0254 \cdot 0,65} \sqrt{\frac{1226,08}{13000 \cdot \frac{1050 \cdot \pi}{30}}} = 0,0661$

QII.3 Pour déterminer la position du chariot, on intègre l'expression de $vit(t)$:

$$pos(t) = \sqrt{\frac{C_{mpe} \cdot \omega_{mpe} \cdot \eta_G}{M}} \cdot \frac{t^2}{2}$$

QII.4 Phase 2 :

En reprenant la démarche utilisée dans la question II.2, on peut écrire, pour la phase 2 :

$$M \cdot vit(t) \cdot \frac{dvit(t)}{dt} = \eta_G \cdot r_p \cdot C_{mot} \cdot \omega_{mot} \text{ avec } vit(t) = r_s \cdot r_{bl} \cdot \omega_{mot} \cdot R_{roue}$$

Attention, le temps t ici correspond au temps écoulé depuis le début de la phase 2.

Ainsi : $M \cdot vit(t) \cdot \frac{dvit(t)}{dt} = \eta_G \cdot r_p \cdot \left(a \frac{vit(t)}{r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue}} + b \right) \cdot \frac{vit(t)}{r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue}}$

$$\Rightarrow M \cdot \frac{dvit(t)}{dt} = \eta_G \cdot r_p \cdot \left(a \frac{vit(t)}{r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue}} + b \right) \cdot \frac{1}{r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue}}$$

$$\Rightarrow \frac{M \cdot (r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue})^2}{\eta_G \cdot r_p \cdot a} \cdot \frac{dvit(t)}{dt} - vit(t) = \frac{r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue} \cdot b}{a}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 1 à résoudre.

$$\Rightarrow vit(t) = \frac{-r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue} \cdot b}{a} + K_1 \cdot e^{\frac{\eta_G \cdot r_p \cdot a}{M \cdot (r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue})^2} t}$$

avec K_1 une constante à déterminer à l'instant initial

($vit(0) = vit(finphase1)$).

Pour la position, on intègre : $pos(t) = \frac{-r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue} \cdot b}{a} t + K_1 \frac{M \cdot (r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue})^2}{\eta_G \cdot r_p \cdot a} \cdot e^{\frac{\eta_G \cdot r_p \cdot a}{M \cdot (r_s \cdot r_{bl} \cdot R_{roue})^2} t} + K_2$

($pos(0) = pos(finphase1)$).

Phase 3 :

Durant cette phase, le moteur n'entraîne plus le chariot. On a donc :

$$M.vit(t). \frac{dvit(t)}{dt} = 0$$

Le chariot se déplace à vitesse constante, et donc l'évolution de la position $pos(t)$ est linéaire.

Phase 4 :

Durant cette phase, la configuration est la même que durant la phase 2. Seul le rapport r_{b1} est changé en r_{b2} .

$$\Rightarrow vit(t) = \frac{-r_s \cdot r_{b2} \cdot R_{roue} \cdot b}{a} + K'_1 \cdot e^{\frac{\eta_G \cdot r_p \cdot a}{M \cdot (r_s \cdot r_{b2} \cdot R_{roue})^2} t}$$

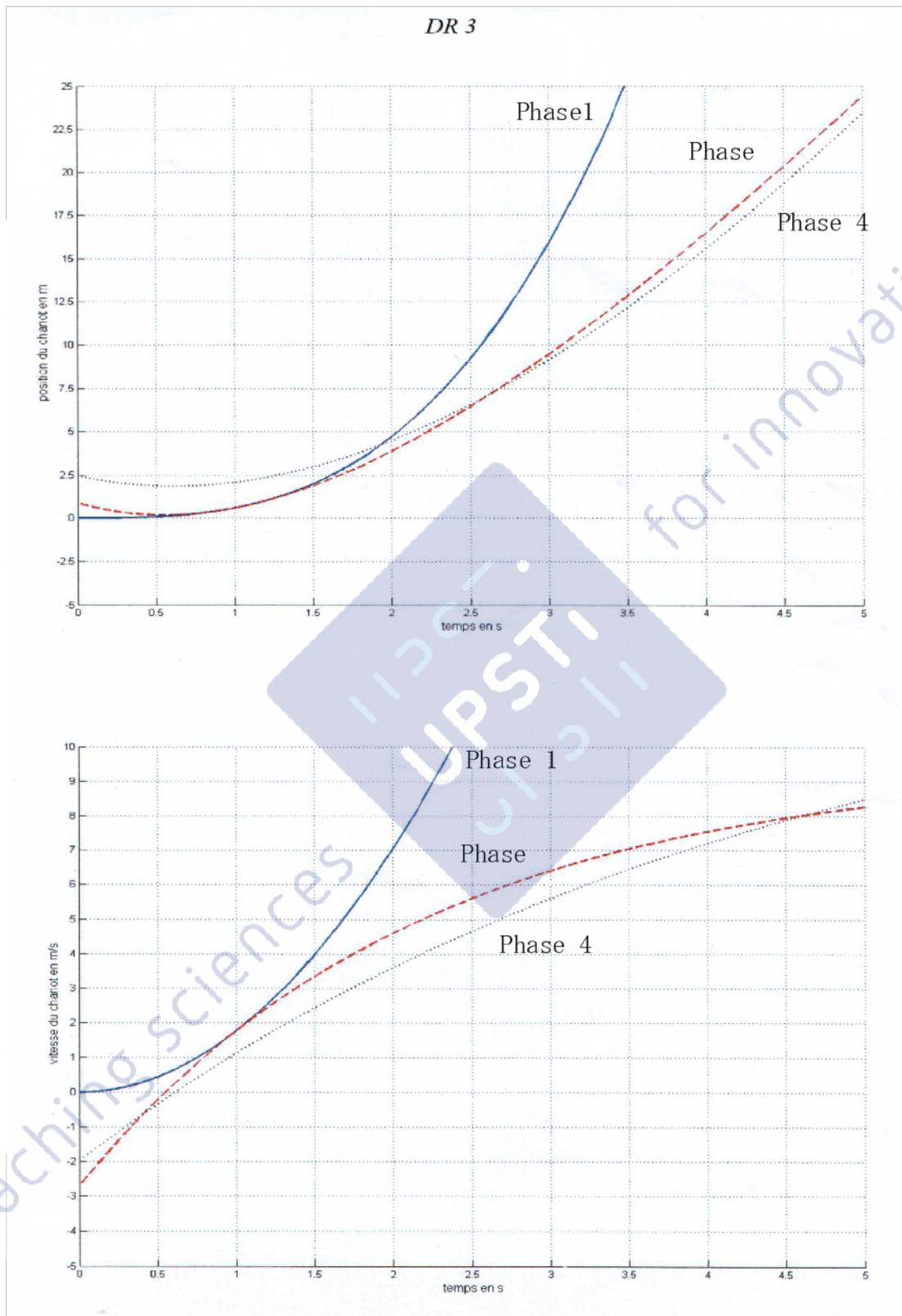
$$pos(t) = \frac{-r_s \cdot r_{b2} \cdot R_{roue} \cdot b}{a} t + K'_1 \frac{M \cdot (r_s \cdot r_{b2} \cdot R_{roue})^2}{\eta_G \cdot r_p \cdot a} \cdot e^{\frac{\eta_G \cdot r_p \cdot a}{M \cdot (r_s \cdot r_{b2} \cdot R_{roue})^2} t} + K'_2$$

Les constantes se déterminent toujours avec les conditions initiales.

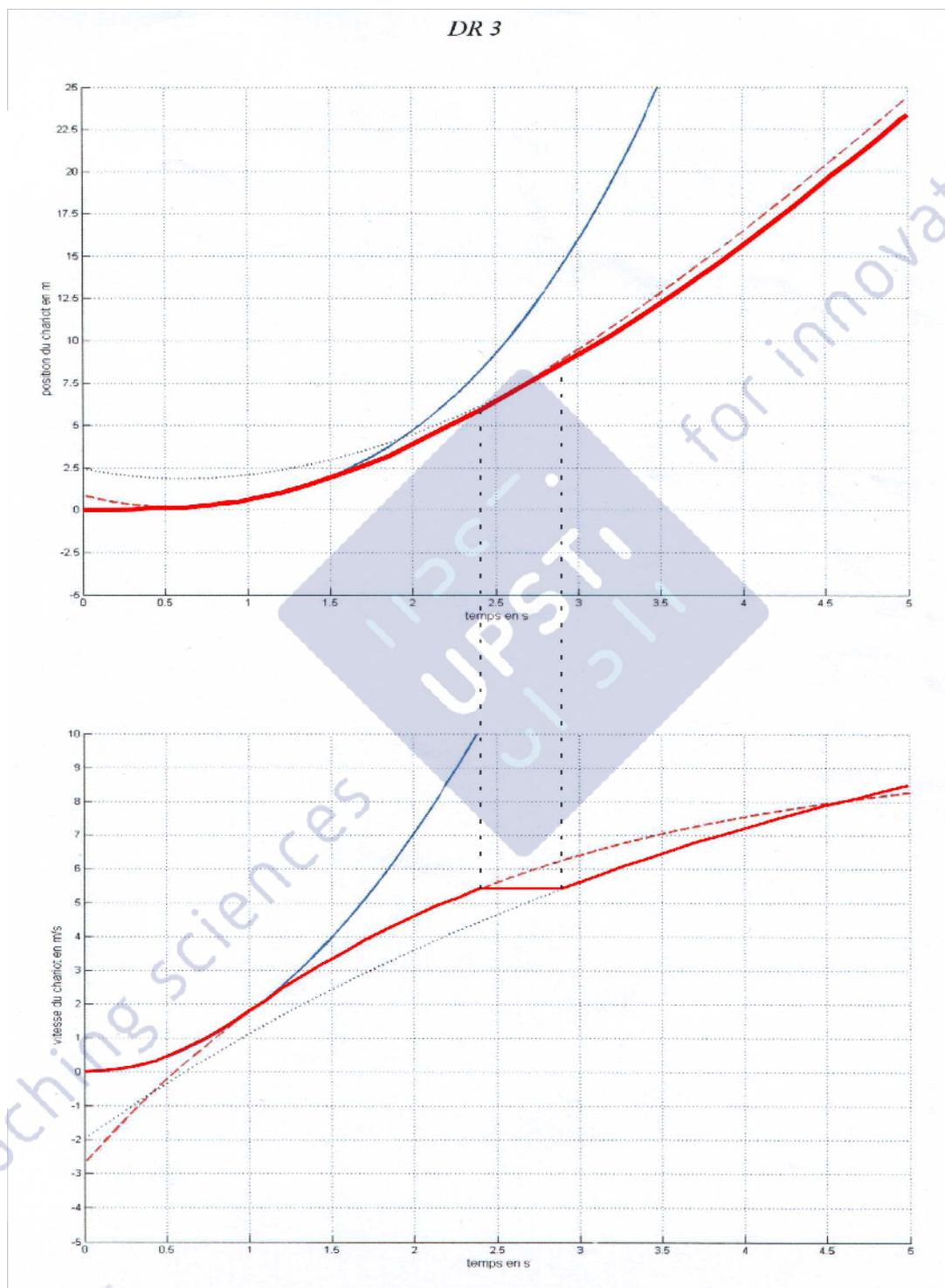
QII.5

Les courbes bleues correspondent à la phase 1 car vitesse et position partent de 0.

Les courbes pointillées rouge correspondent à la phase 2 car à $t=1s$ elles sont tangentes aux courbes bleues.



QII.6 D'après la figure 22, le passage de la phase 2 à la phase 3 s'effectue à la vitesse de 5,4m/s. On remarque sur ce même graphique que la vitesse de rotation du moteur passe de 3200tr/min à 2200tr/min en 0,5s.



QII.7 D'après le graphique précédent, le chariot a une vitesse de 8,5 m/s au bout de 5 secondes. En regardant la figure 22, ceci correspond à une vitesse de rotation du moteur de 3500tr/min. Le moteur fonctionnerait donc au dessus de la zone préconisée sur la figure 19. Néanmoins, avec ce modèle le chariot parcourt 23m en 5s, ce qui est supérieur au cahier des charges donné.

QII.8 Au regard de la figure 19, la loi d'évolution du couple moteur en fonction du régime moteur n'est pas linéaire. L'approximation faite dans cette étude est assez grande : le couple moteur sur la figure 19 est supérieur à l'approximation utilisée. En affinant la loi d'évolution du couple moteur, on devrait trouver une vitesse de rotation du moteur inférieur à 3200tr/min, tout en validant toujours les 15m parcourus en 5s.

QIII.1. Recherche du centre de gravité de l'ensemble Σ :

$$(m_T + m_1 + m_C) \cdot \vec{OG} = m_T \cdot \vec{OG}_T + m_1 \cdot \vec{OG}_1 + m_C \cdot \vec{OG}_C$$

G étant confondu avec le point O, on a :

$$0 = m_T \cdot x_{G_T} + m_1 \cdot x_{G_1} + m_C \cdot x_{G_C}$$

$$\text{Donc } x_{G_C} = \frac{-m_T \cdot x_{G_T} - m_1 \cdot x_{G_1}}{m_C}$$

QIII.2. On isole $\{\Sigma, B\}$.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids du bateau
- Poids de Σ
- Action du sol sur chaque roue

Résultante dynamique :

$$-(M + m_B) \cdot \text{dec}_x \vec{x}_1 = \sum_{i=1}^4 (-T_i \vec{x}_1 + N_i \vec{z}_1) - (M + m_B) g \vec{z}_1$$

Calcul du moment dynamique :

Pour Σ :

$$\vec{\sigma}_{O, \Sigma / R_1} = [I_{O, \Sigma}] \vec{\omega}_{\Sigma / R_1} = \vec{0} \text{ donc}$$

$$\vec{\delta}_{I_4, \Sigma / R_1} = \vec{\delta}_{O, \Sigma / R_1} - I_4 \vec{O} \wedge M \text{dec}_x \vec{x}_1 = -\left(\frac{-2L}{3} \vec{x}_1 + h \vec{z}_1\right) \wedge M \text{dec}_x \vec{x}_1 = -h \cdot M \cdot \text{dec}_x \vec{y}_1$$

Pour B :

$$\vec{\sigma}_{G_B, B / R_1} = [I_{G_B, B}] \vec{\omega}_{B / R_1} = \vec{0} \text{ donc}$$

$$\vec{\delta}_{I_4, B / R_1} = \vec{\delta}_{G_B, B / R_1} - I_4 \vec{G}_B \wedge m_B \text{dec}_x \vec{x}_1 = -\left[\left(x_{G_B} - \frac{2L}{3}\right) \vec{x}_1 + (z_{G_B} + h) \vec{z}_1\right] \wedge m_B \text{dec}_x \vec{x}_1 = -(z_{G_B} + h) m_B \cdot \text{dec}_x \vec{y}_1$$

Moment dynamique autour de l'axe (I_4, \vec{y}_1) :

$$-dec_x (M.h + m_B \cdot z_{G_B}) = x_{G_B} m_B g - \frac{2L}{3} Mg + L(T_1 + T_2)$$

QIII.3. Les équations précédentes comportent 8 inconnues (T_i et N_i). Avec l'hypothèse de symétrie, on divise le nombre d'inconnues par 2. Enfin, en supposant que les roues arrière décollent, on retire encore 2 inconnues. Il en reste donc 2. Au final, des 3 équations précédentes, 2 seront utiles pour déterminer les actions du sol sur le chariot. La dernière permettra de déterminer la décélération limite.

QIII.4. Avec les hypothèses précédentes, on peut écrire :

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ N_1 = N_2 \\ T_4 = T_3 \\ N_4 = N_3 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} -(M + m_B) dec_x \vec{x}_1 = (-2.(T_1 + T_4)\vec{x}_1 + 2.(N_1 + N_4)\vec{z}_1) - (M + m_B)g \vec{z}_1 \\ -dec_x (M.h + m_B \cdot z_{G_B}) = x_{G_B} m_B g - \frac{2L}{3} Mg + 2.L.T_1 \end{cases}$$

Quand les roues arrière perdent le contact avec le sol, T_1 s'annule, donc :

$$-dec_x = \frac{x_{G_B} m_B g - \frac{2L}{3} Mg}{M.h + m_B \cdot z_{G_B}}$$

QIII.5. On se place à la limite du basculement. Ainsi $T_1 = N_1 = 0$.

L'équation de la résultante dynamique s'écrit donc :

$$-(M + m_B) dec_x \vec{x}_1 = (-2.T_4 \vec{x}_1 + 2.N_4 \vec{z}_1) - (M + m_B)g \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(M + m_B) dec_x = -2.T_4 \\ 0 = 2.N_4 - (M + m_B)g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_4 = \frac{(M + m_B) dec_x}{2} \\ N_4 = \frac{(M + m_B)g}{2} \end{cases}$$

Pour finir, il suffit de comparer le rapport $\frac{T_4}{N_4}$ avec f :

$$\frac{T_4}{N_4} = \frac{dec_x}{g} \text{ donc si } \frac{dec_x}{g} \leq f \text{ le basculement aura lieu avant le glissement. Sinon, ce sera l'inverse.}$$

QIII.6. L'ensemble $\{\Sigma, B\}$ risque de basculer autour de l'axe (I_2, \vec{x}_1) . Il faut donc écrire l'équation du moment dynamique autour de cet axe.

QIII.7. Calcul du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}_{G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\} / R_0} &= \left[I_{G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\}} \right] \overrightarrow{\Omega}_{\{\Sigma, B\}} = \left[I_{G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\}} \right] \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{\sigma}_{G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\} / R_0} &= \dot{\alpha} (-E_1 \vec{x}_1 + C_1 \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} &= \dot{\alpha} (-E_1 \vec{x}_1 + C_1 \vec{z}_0) + I_2 \vec{G}_{\Sigma B} \wedge (M + m_B) \mathcal{V} \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{I_2 G_{\Sigma B}} = \overrightarrow{I_2 O} + \overrightarrow{OG_{\Sigma B}} = \left(\frac{L}{3} + x_{G_{\Sigma B}}\right) \vec{x}_1 + (E + y_{G_{\Sigma B}}) \vec{y}_1 + (h + z_{G_{\Sigma B}}) \vec{z}_1$

$$\overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} = \dot{\alpha} (-E_1 \vec{x}_1 + C_1 \vec{z}_0) + (M + m_B) V \left[-(E + y_{G_{\Sigma B}}) \vec{z}_1 + (h + z_{G_{\Sigma B}}) \vec{y}_1 \right]$$

Calcul du moment dynamique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \vec{x}_1 &= \frac{d \overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \vec{x}_1}{dt} + (M + m_B) \left(\overrightarrow{V}_{I_2 / R_0} \wedge \overrightarrow{V}_{G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\} / R_0} \right) \cdot \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{\delta}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \vec{x}_1 &= \frac{d \left(\overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \vec{x}_1 \right)}{dt} - \overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \frac{d \vec{x}_1}{dt} \\ \overrightarrow{\delta}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \vec{x}_1 &= -E_1 \ddot{\alpha} - \overrightarrow{\sigma}_{I_2, \{\Sigma, B\} / R_0} \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -E_1 \ddot{\alpha} - \dot{\alpha} (M + m_B) V (h + z_{G_{\Sigma B}}) \end{aligned}$$

=0 car $\overrightarrow{V}_{I_2 / R_0}$ est porté par \vec{x}_1

Le moment dynamique autour de l'axe (I_2, \vec{x}_1) donne :

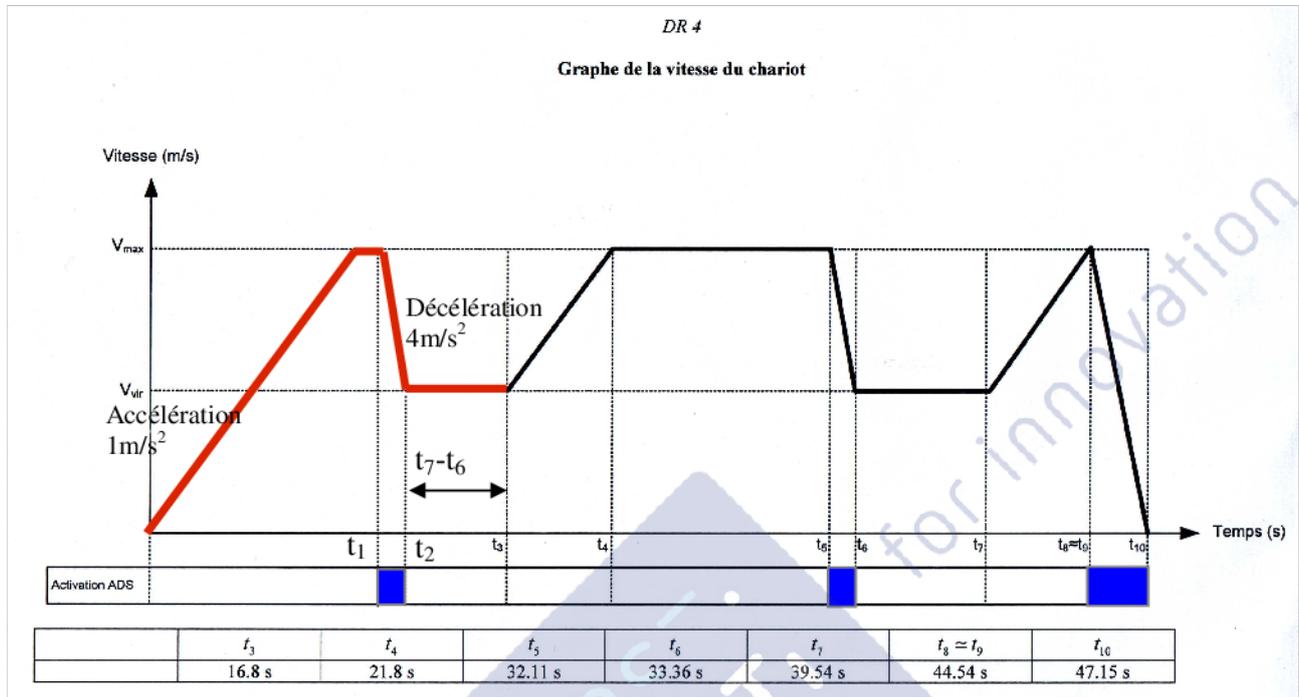
$$-E_1 \ddot{\alpha} - \dot{\alpha} (M + m_B) V (h + z_{G_{\Sigma B}}) = 2E \cdot (N_1 + N_4) - (E + y_{G_{\Sigma B}}) (M + m_B) g$$

$$\Rightarrow -E_1 \frac{\dot{V}}{\rho} - (M + m_B) \frac{V^2}{\rho} (h + z_{G_{\Sigma B}}) = 2E \cdot (N_1 + N_4) - (E + y_{G_{\Sigma B}}) (M + m_B) g$$

A vitesse V constante, et en prenant $N_1 = N_4 = 0$, la vitesse limite du basculement latéral est :

$$V = \sqrt{\rho g \frac{E + y_{G_{\Sigma B}}}{h + z_{G_{\Sigma B}}}}$$

QIII.8.



La phase 1 a lieu jusque $t = t_2$. La phase 2 a lieu entre les instants t_2 et t_3 .

QIII.9.

Point atteint	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Instant	$t = 0$	t_2	t_3	t_6	t_7	t_{10}

QIII.10. L'activation du système ADS se fait dans les intervalles de temps : $[t_1; t_2]$, $[t_5; t_6]$ et $[t_9; t_{10}]$.

QIII.11. Le cahier des charges de la figure 2 indique que le chariot doit pouvoir mettre à l'eau 16 bateaux par heure. Ceci lui impose de mettre un bateau dans l'eau en moins de $\frac{3600}{16} = 225$ s. Pour valider ce critère, il faut compter deux fois le temps t_{10} du trajet (aller-retour) et le temps de chargement/déchargement t_c .

$$t_{\text{cycle}} = 2 \cdot t_{10} + t_c = 2 \cdot 47.15 + 80 = 174.3 \text{ s} < 225 \text{ s}$$

Le chariot peut suivre la cadence demandée dans le cahier des charges.