teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2012

Filière : MP

Épreuve : Physique et Sciences de l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Corrigé X-ENS P&SI 2012

1. Thermodynamique de la pompe à chaleur

1.1 Diagramme de Mollier

1. Par définition, $(\partial h/\partial T)_p = c_p$. La capacité calorifique des corps usuels étant *expérimentalement* positive, cela montre le résultat. Pour des systèmes autogravitants tels les trous noirs, $c_p < 0$.

2. L'enthalpie de vaporisation se lit, pour une pression donnée, comme la distance entre les lignes d'ébullition et de vapeur saturée.

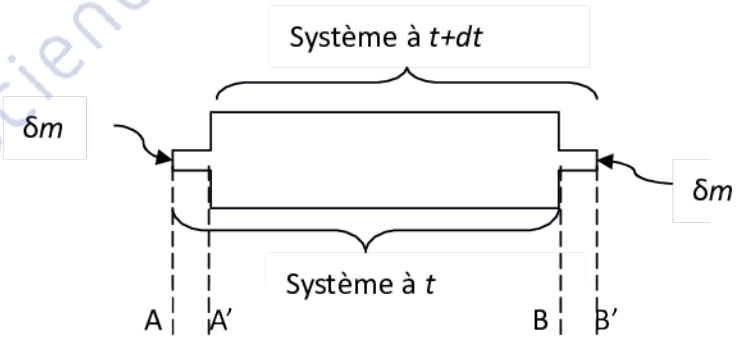
3. a) La phase liquide étant indilatable et incompressible, le volume massique ne dépend ni de T ni de p. Le fluide peut être alors considéré comme monovariant et son état ne dépend que de T. Alors $dh = c(T)\,dT$, et l'isotherme est une droite verticale.
   b) Pour un gaz parfait, $dh = c_p dT$. L'isotherme est une droite verticale.
   c) Lors du changement d'état, le fluide est monovariant : p ne dépend que de T. Donc une isotherme est une isobare. L'isotherme est une droite horizontale.

4. $dh = Tds + vdp$.

5. Pour une isentropique, $ds = 0$, donc $dh = v\,dp = pv\,d(ln\,p)$. Comme $pv > 0$, on en déduit que la pente des isentropiques est positive.

6. De même $ds = -\frac{v}{T}\,dp = -\frac{pv}{T}d(\ln p)$: la pente des isentropiques est négative.

7. Soit δm la masse qui traverse le système pendant dt. Considérons le système fermé situé entre entre A et B à t et entre A' et B' à $t + dt$:



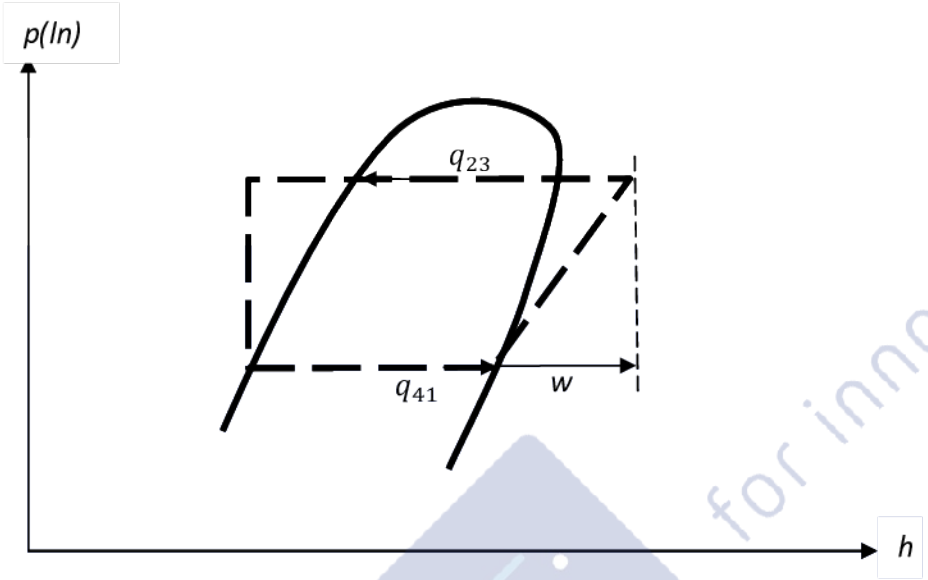
- $dU = U_{A'B'} - U_{AB} = U_{BB'} - U_{AA'} = (u_B - u_A)\delta m$, où u représente l'énergie interne massique du fluide, car le régime est permanent, donc $U_{A'B}$ est constant.
- D' après le premier principe, $dU = (w + q)\delta m + \delta W_{pression}$, avec $\delta W_{pression} = p_A \delta V_A - p_B \delta V_B = (p_A v_A - p_B v_B)\delta m$
- $h = u + pv$ conduit au résultat demandé.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

8. Comme $w + q = 0$ lors de la détente, d'après 7. , la transformation est bien isenthalpique.

9. La compression est isentropique, ce qui permet de tracer le diagramme (par exemple : les limites gauche et droite du cycle sont mal définies par le texte).

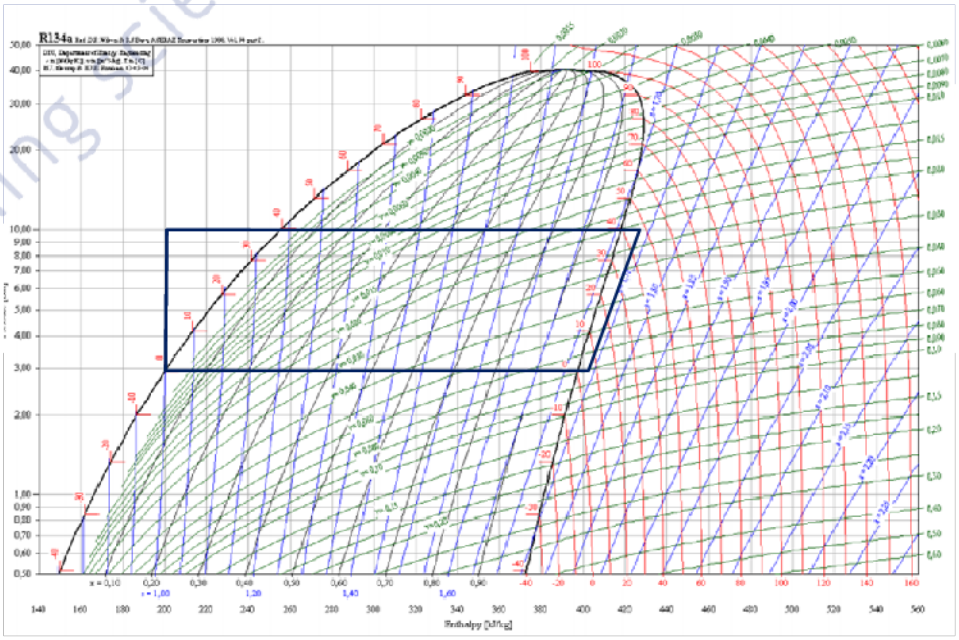


10. $w + q_{23} + q_{41} = 0$ sur un cycle.

11. Par définition l'efficacité est le rapport de l'énergie récupérée $(-q_{23})$ sur l'énergie fournie (w) , d'où le résultat. La figure de 9. prouve que $\eta > 1$.

12. Pas de courbes relatives à la phase liquide, donc difficile de conclure; on peut supposer que si elles ne sont pas tracées, c'est que les isothermes sont implicitement verticales et que l'hypothèse incompressible et indilatable est correcte. Le gaz s'éloigne du modèle du gaz parfait car les isothermes ne sont pas verticales.

13.



Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

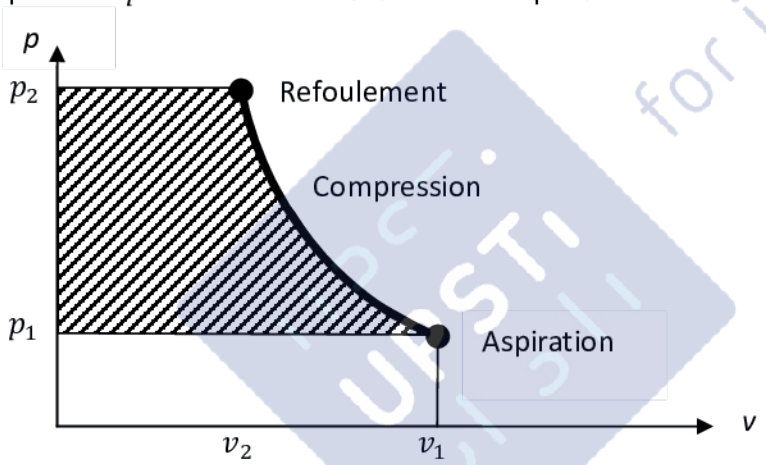
	1	2	3	4
h(kJ/kg)	400	425	200	200
p(MPa)	0,3	1	1	0,3
T(°C)	5	0	0	45
état	gaz	gaz	liquide	liquide

14. $\eta \simeq \frac{225}{25} = 9$. pour le cycle de Carnot (deux isothermes et deux adiabatiques) d'un cycle fonctionnant entre $T_1 = T_c$ et $T_3 = T_F (> T_c\ !)$, on aurait $\eta = \frac{-q_c}{-q_F - q_c} = \frac{T_F}{T_c - T_F} = \frac{273}{-5} \simeq -55$.
La contradiction vient du fait que le cycle de Carnot est nécessairement moteur avec les températures choisies. La machine présente l'intérêt d'augmenter la vitesse des échanges.

15. $P = d_m \times (-q_{23})$. AN : $d_m = \frac{4}{225} \simeq 18\, g.s^{-1}$.

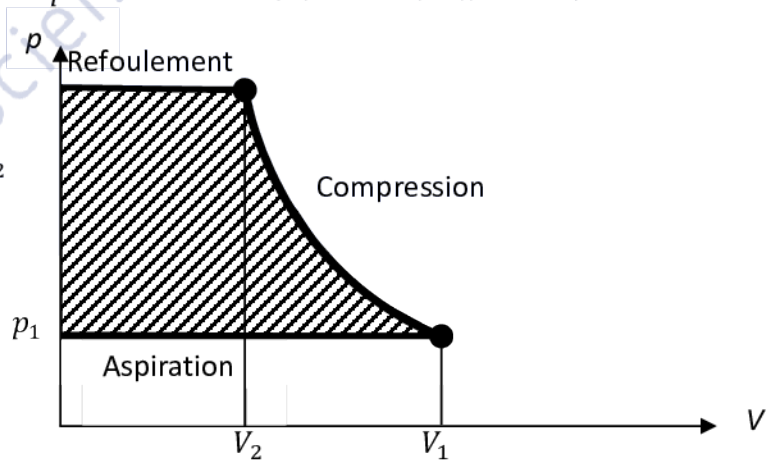
1.3 Cycle du compresseur

16. Diagramme pression p en fonction du volume massique v



Si on représente la pression p en fonction du volume massique v, les temps d'aspiration et de refoulement son réduits à des points.

Diagramme pression p en fonction du volume de la chambre V



17. Le travail massique fourni par le compresseur vaut :
- $-p_1 v_1$ pendant l'aspiration,
- L'aire(>0) entre la courbe de compression et l'axe $p = 0$ pendant la compression,
- $+p_2 v_2$ pendant le refoulement.

Au total on trouve l'aire hachurée sur le diagramme de la question 16.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

18. Cette aire vaut $\int_{p_1}^{p_2} v\,dp = vp^{\frac{1}{\gamma}} \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\gamma}}\,dp = [v_2p_2 - v_1p_1]/\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)$.

19. $T_2 = T_1(P_1/P_2)^{\frac{1}{\gamma}-1} = 278 \times (0{,}3)^{-0{,}12} \equiv 43°C$, en accord avec les mesures précédentes.

2. Différentes technologies de compresseur

2.1 Dispositif Bielle Manivelle « classique »

20. Analyse géométrique

a) Loi d'entrée/sortie :

La fermeture géométrique sur la chaîne 0-1-2-3-0 donne : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B0} = \vec{0}$

soit $e\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 - x_3\vec{x}_0 = \vec{0}$

et par projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$: $\quad e.\cos\theta_1 + l.\cos\theta_2 - x_3 = 0$

$e.\sin\theta_1 + l.\sin\theta_2 = 0$

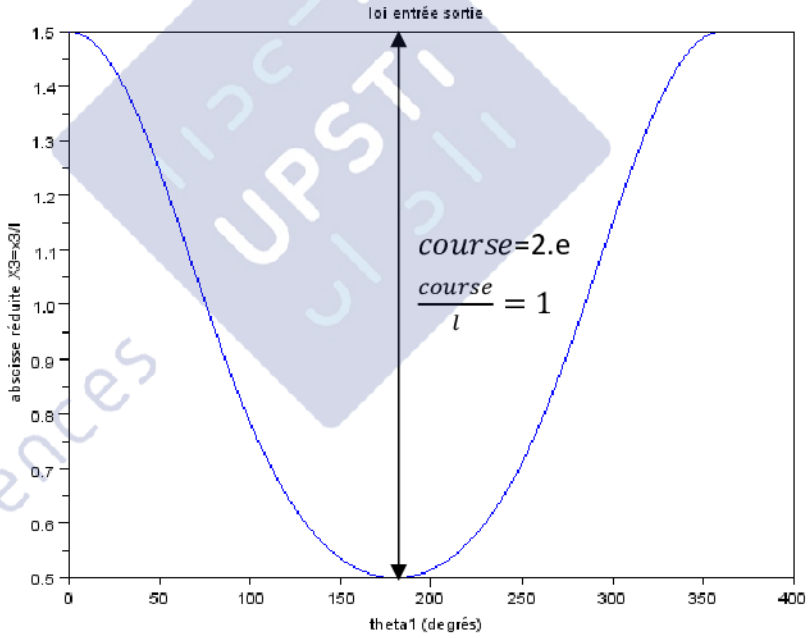
Soit $l^2 = (x_3 - e.\cos\theta_1)^2 + (e.\sin\theta_1)^2$ et $x_3 = e.\cos\theta_1 + \sqrt{l^2 - (e.\sin\theta_1)^2}$

$x_3 = l.\left(k.\cos\theta_1 + \sqrt{1-(k.\sin\theta_1)^2}\right)$

b) Pour $k = \frac{1}{2}$ on a : $x_3 = l.\left(\frac{1}{2}.\cos\theta_1 + \sqrt{1-\frac{1}{4}(\sin\theta_1)^2}\right)$

$x_{3,maxi} = e + l$

$X_{3,maxi} = \frac{3}{2}$



$x_{3,mini} = e - l$

$X_{3,mini} = \frac{1}{2}$

c) La cylindrée s'écrit : $V = S.c = S.(x_{3,maxi} - x_{3,mini})$ avec S la section du piston et c la course.

$x_{3,maxi} = l.(1+k)$; $x_{3,maxi} = l.(1-k)$

Soit $V = \pi.\frac{D^2}{4}.2.k.l$; $\quad \boxed{V = \pi.\frac{D^2}{2}.k.l}$

21. Analyse cinématique

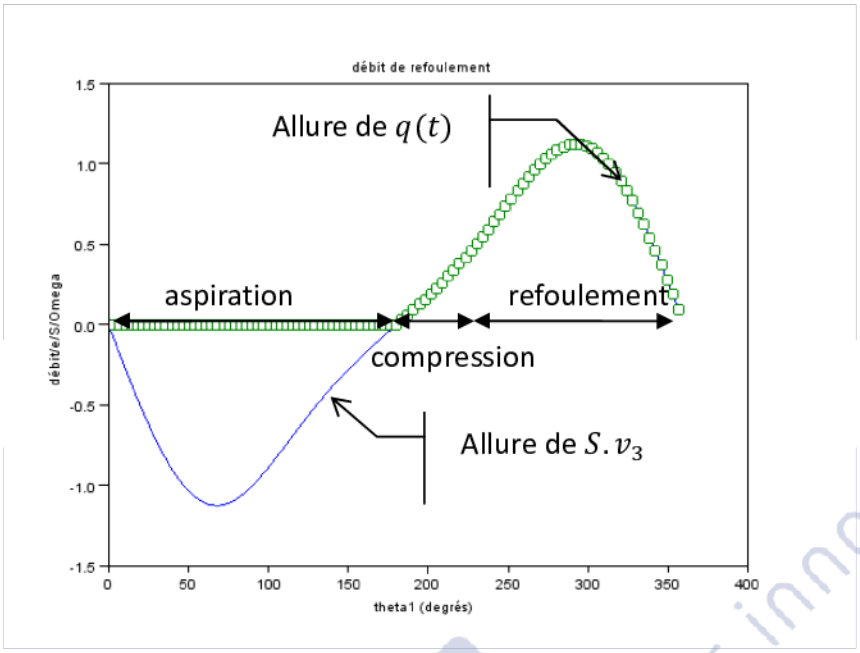
La vitesse de translation du piston par rapport au bâti est :

$v_3 = \dot{x}_3 = -e.\Omega.\sin\theta_1\left(1 + \frac{k.\cos\theta_1}{\sqrt{1-(k.\sin\theta_1)^2}}\right)$

Si on néglige la phase de compression (voir courbe de débit), le débit instantané de refoulement s'écrit : $q = S.v_3$ si $v_3 > 0$, q=0 si $v_3 < 0$.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Allure du débit de refoulement :



Cette allure suppose que les clapets de refoulement s'ouvrent en $\theta_1 = \pi$. En réalité, la phase d'admission est suivie d'une phase de compression, puis la phase de refoulement. Les clapets de refoulement s'ouvrent donc en θ_1 légèrement supérieur à π.

22. Analyse dynamique

a) isolons le piston 3 ; Bilan d'actions mécaniques extérieures :

- $\{F(0 \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}(0 \to 3) \\ \overrightarrow{M_B}(0 \to 3) \end{matrix}\right\}_B$ action mécanique du bâti 0 sur le piston (liaison pivot glissante) ;
- $\{F(2 \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}(2 \to 3) \\ \overrightarrow{M_B}(0 \to 3) \end{matrix}\right\}_B$ action mécanique de la bielle 2 sur le piston (liaison pivot) ;
- $\{F(fluide \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} -p.S.\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$ action mécanique du fluide sur le piston ;
- Poids négligé.

Si on fait l'hypothèse que les liaisons sont parfaites et le problème plan :

- $\{F(0 \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}(0 \to 3) = Y_0\vec{y}_0 \\ \overrightarrow{M_B}(0 \to 3) = M_0\vec{z}_0 \end{matrix}\right\}_B$;
- $\{F(2 \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}(2 \to 3) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$;
- $\{F(fluide \to 3)\} = \left\{\begin{matrix} -p.S.\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$.

b) L'effort de pression sur le piston est : $\left\|\vec{F}(fluide \to 3)\right\| = p.S = 10^6.\pi.\frac{0{,}04^2}{4} = 1\,257\ N$

La norme de la résultante dynamique du piston par rapport au bâti galiléen, est $M.\|\vec{a}(G_3,3/0)\| = M.\ddot{x}_3$ soit $M.\|\vec{a}(G_3,3/0)\| \sim M.e.\Omega^2 = 0{,}64.0{,}02.\left(1\,800.\frac{\pi}{30}\right)^2 = 455\ N$

On ne peut donc pas négliger les effets dynamiques devant les forces de pression.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

c) L'isolement du piston 3 dénombre 4 inconnues de liaisons Y_0, M_0, et $\vec{F}(2 \to 3) = X_{2\to3}\vec{x}_0 + Y_{2\to3}\vec{y}_0$, pour 3 équations issues du PFD.

Le Théorème de la Résultante Dynamique projeté sur $\vec{x}_0$ permet de déterminer $X_{2\to3}$: $X_{2\to3} - p.S = M.\ddot{x}_3$ mais ce seul bilan ne permet pas de déterminer $Y_{2\to3}$: toute autre projection du TRD, et toute équation issue du Théorème du Moment Dynamique fait intervenir les inconnues de liaison entre la bâti 0 et le piston 3.

Pour déterminer $Y_{2\to3}$, il faut isoler la bielle 2. Le bilan d'actions mécaniques est :

- $\{F(3 \to 2)\} = -\begin{Bmatrix} \vec{F}(2 \to 3) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$;
- $\{F(1 \to 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}(1 \to 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$.

L'ensemble des 2 isolements permet d'écrire 6 équations issues du PFD (3 pour l'isolement de 2 et 3 pour l'isolement de 3) pour un total de 6 inconnues de liaisons ($X_{2\to3}, Y_{2\to3}, X_{1\to2}, Y_{1\to2}, X_{2\to3}, Y_{2\to3}, Y_0$ et M_0.

23. $\sin\theta_2 = -\mathrm{k}.\sin\theta_1$ (question 21)
L'angle bielle-piston maximal est $\theta_{2maxi} = \arcsin k$ soit ici $\boxed{\theta_{2maxi} = 30°.}$

Problèmes :
- Effort axial insuffisant pour contrer la pression et entraîner en mouvement le piston ;
- Efforts importants au contact piston-bâti (efforts normaux) d'où des risques d'usure prématurés.

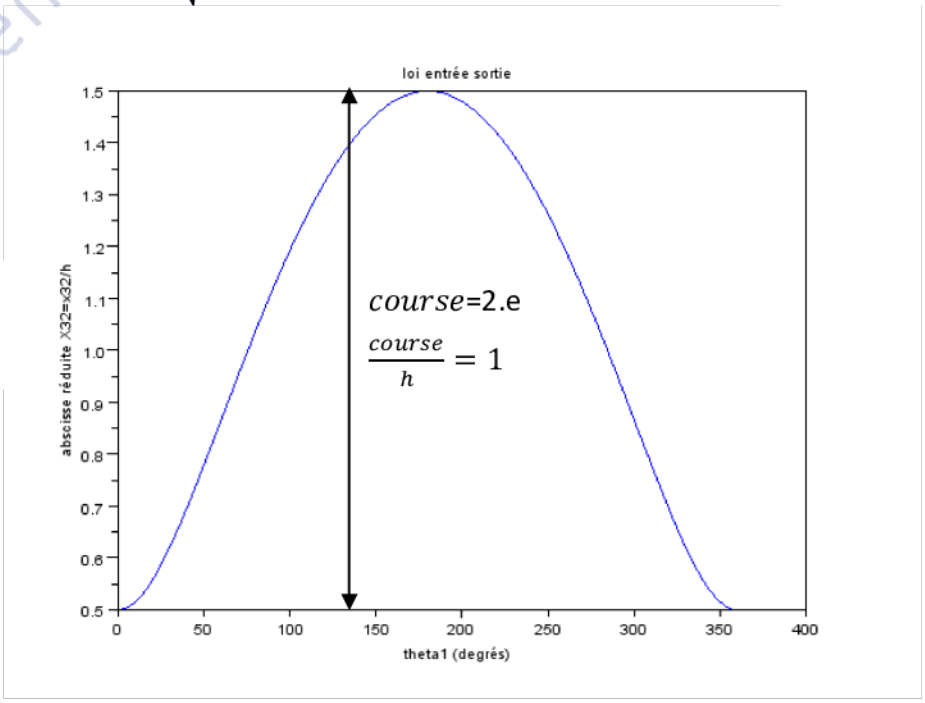
2.2 Dispositif à piston oscillant

24. La loi d'entrée-sortie s'écrit désormais :
$e.\cos\theta_1 + x_{32}.\cos\theta_2 - h = 0$
$e.\sin\theta_1 + x_{32}.\sin\theta_2 = 0$
Soit ${x_{32}}^2 = (h - e.\cos\theta_1)^2 + (e.\sin\theta_1)^2$ et $x_{32} = \sqrt{h^2 + e^2 - 2.e.h.\cos\theta_1}$
$x_{32} = h\sqrt{1 + q^2 - 2.q.\cos\theta_1}$

Allure de $X_{32} = \frac{x_{32}}{h}$ pour $q = \frac{1}{2}$: $x_{32} = h\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_1}$

$x_{3,maxi} = e + h$

$X_{3,maxi} = \frac{3}{2}$



$x_{3,mini} = h - e$

$X_{3,mini} = \frac{1}{2}$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

2.3 Comparaison des deux dispositifs

25. Un piston classique subit des variations d'accélération plus importantes que pour un piston oscillant. On aura donc des vibrations et risques d'usure.

3. Contrôle en température

3.1 Première modélisation

26.

a) Équation différentielle :

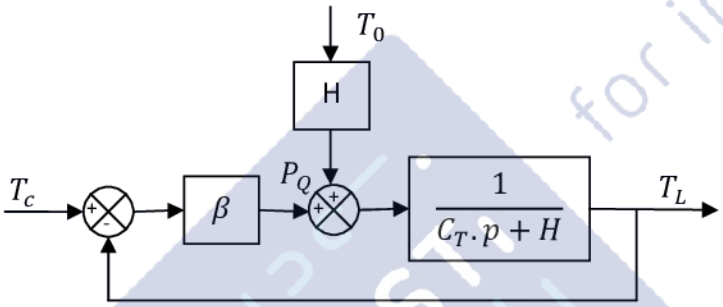
Le premier principe de thermodynamique donne : $C_T.\frac{dT_L}{dt} = P_Q(t) - \Phi(t)$

avec $P_Q(t) = \beta.\left(T_c - T_L(t)\right)$ et $\Phi(t) = H.(T_L(t) - T_0)$

Soit $C_T.\frac{dT_L}{dt} = \beta.\left(T_c - T_L(t)\right) - H.(T_L(t) - T_0) = -(\beta + H).T_L(t) + \beta.T_c + H.T_0$

D'où dans le domaine de Laplace : $\boxed{(C_T.p + H).T_L(p) = \beta.\left(T_c(p) - T_L(p)\right) + H.T_0}$

On en déduit le schéma bloc :



La fonction de transfert en boucle fermée est $\frac{T_L(p)}{T_c(p)} = \frac{\beta}{C_T.p+\beta+H}$ stable si $\beta > -H$.

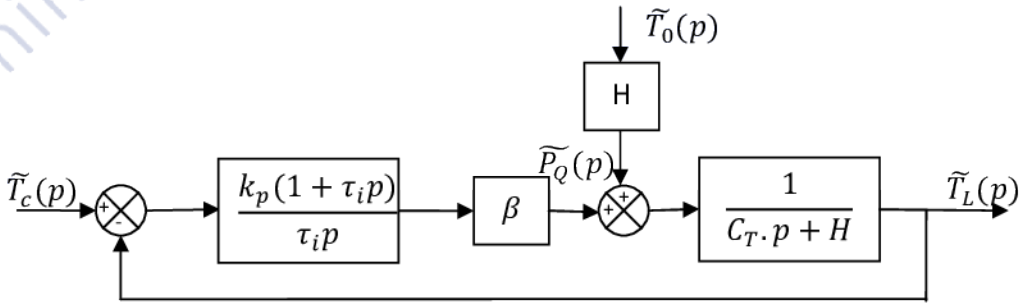
b) Erreur statique : $\delta_s = \frac{H}{H+\beta}.(T_c - T_0)$

L'erreur statique n'est pas nulle. Pour la réduire, il faut $\beta \gg H$.

En régime permanent, la température se stabilise à $T_{L\infty} < T_c$, point d'équilibre pour lequel la puissance fournie par la pompe (proportionnelle à $T_c - T_L$) devant compenser les fuites (proportionnelles à $T_L - T_0$) : $\beta.(T_c - T_{L\infty}) = H.(T_{L\infty} - T_0)$

27. Pour annuler cette erreur, il faut incorporer un correcteur intégral en amont de la perturbation. Ci-dessous le correcteur intégral s'écrit sous la forme $C(p) = \frac{k_p(1+\tau_i p)}{\tau_i p}$

k_p est ici sans unité, et τ_i est une constante de temps (en s).



Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

3.2 Deuxième modélisation

28. les équations du moteur sont dans le domaine de Laplace :

$J.p.\tilde{\Omega}(p) = \tilde{C_m}(p) - f_r.\tilde{\Omega}(p)$

$\tilde{C_m}(p) = K.\tilde{I}(p)$

$\tilde{V_c}(p) = R.\tilde{I}(p) + \tilde{E}(p)$

$\tilde{E}(p) = K.\tilde{\Omega}(p)$

D'où la fonction de transfert du moteur : $\frac{\tilde{\Omega}(p)}{\tilde{V_c}(p)} = \frac{\frac{K}{K^2+R.f_r}}{1+\frac{R.J}{K^2+R.f_r}.p}$

Soit $\frac{\tilde{\Omega}(p)}{\tilde{V_c}(p)} = \frac{k_e}{1+\tau_e.p}$, fonction de transfert du premier ordre avec $\boxed{k_e = \frac{K}{K^2+R.f_r}}$ et $\boxed{\tau_e = \frac{R.J}{K^2+R.f_r}}$

Si $R \to 0$, $k_e \to \frac{1}{K}$ et $\tau_e \to 0$, soit $\tilde{\Omega}(p) = \frac{1}{K}.\tilde{V_c}(p)$ puis $\tilde{P_Q}(p) = \frac{A}{K}.\tilde{V_c}(p)$

On retrouve l'hypothèse du premier modèle Q26 : $\tilde{P_Q}(p) = \alpha.\tilde{V_c}(p)$ avec $\alpha = \frac{A}{K}$

29. $\boxed{C(p) = \frac{\tilde{V_c}(p)}{\tilde{\varepsilon}(p)} = K_c + \frac{1}{T_i p}}$

Remarque : ici K_c s'exprime en V/K et T_i en K.s/V

30. $\tilde{P_Q}(p) = A.\tilde{\Omega}(p) = A.\frac{k_e}{1+\tau_e p}.\tilde{V_c}(p) = A.\frac{k_e}{1+\tau_e p}.C(p).\left(\tilde{T_c}(p) - \tilde{T_L}(p)\right)$

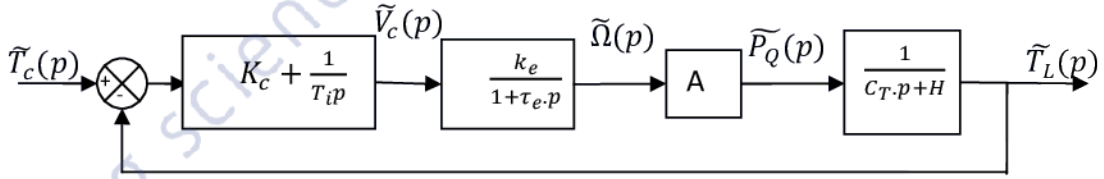
D'où $\boxed{\tilde{P_Q}(p) = A.\frac{k_e}{1+\tau_e p}.\left(K_c + \frac{1}{T_i p}\right).\left(\tilde{T_c}(p) - \tilde{T_L}(p)\right)}$

31. Bilan thermique :

- fuites thermiques: $\tilde{\Phi}(p) = H.\tilde{T_L}(p)$;
- puissance fournie : $\tilde{P_Q}(p)$

soit $C_T.p.\tilde{T_L}(p) = \tilde{P_Q}(p) - H.T_L(p)$

Le schéma bloc est :



32. La fonction de transfert en boucle fermée est : $H_{bf}(p) = \frac{\tilde{T_L}(p)}{\tilde{T_c}(p)} = \frac{A.\frac{k_e}{1+\tau_e p}.C(p).\frac{1}{C_T.p+H}}{1+A.\frac{k_e}{1+\tau_e p}C(p).\frac{1}{C_T.p+H}}$

Donc $H_{bf}(p) = \frac{A.k_e.\left(K_c+\frac{1}{T_i p}\right)}{A.k_e.\left(K_c+\frac{1}{T_i p}\right)+(C_T.p+H).(1+\tau_e.p)} = \frac{A.k_e.(K_c.T_i p+1)}{A.k_e.(K_c.T_i p+1)+T_i p.(C_T.p+H).(1+\tau_e.p)}$ est une fonction de transfert d'ordre 3.

Si $R \to 0$, alors $k_e \to \frac{1}{K}$ et $\tau_e \to 0$ et

$H_{bf}(p) = \frac{\tilde{T_L}(p)}{\tilde{T_c}(p)} = \frac{(K_c.T_i.p+1)}{1+T_i\left(\frac{K}{A}H+K_c\right).p+\frac{K}{A}.C_T.T_i.p^2}$ fonction de transfert du second ordre dont le carré du module du dénominateur est :

$D(\omega) = \left(1 - \frac{K}{A}.C_T.T_i\omega^2\right)^2 + T_i^2\left(\frac{K}{A}.H + K_c\right)^2.\omega^2$

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$D(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$ si $T_i{}^2\left(\frac{K}{A}.H + K_c\right)^2 = 2.\frac{K}{A}.C_T.T_i$

Soit $\boxed{T_i\left(\frac{K}{A}.H + K_c\right)^2 = 2.\frac{K}{A}.C_T}$

33. Si la condition précédente est vérifiée, alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{K.C_T.T_i}}$.

Si on remplace la constante de temps T_i par son expression précédente, on obtient :

$\omega_0{}^2 = \frac{A}{K.C_T.T_i} = \frac{A^2}{2.K^2.C_T{}^2}\left(\frac{K}{A}.H + K_c\right)^2$

$\omega_0 = \frac{A}{\sqrt{2}.K.C_T}\left(\frac{K}{A}.H + K_c\right)$

La fonction de transfert en boucle fermée est : $H_{bf}(p) = \frac{\widetilde{T_L}(p)}{\widetilde{T_c}(p)} = \frac{(K_c.T_i.p+1)}{1+T_i\left(\frac{K}{A}H+K_c\right).p+\frac{K}{A}.C_T.T_i.p^2}$

On a $H_{bf}(p) = \frac{\widetilde{T_L}(p)}{\widetilde{T_c}(p)} = \frac{(K_c.T_i.p+1)}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$ avec $\frac{2\xi}{\omega_0} = T_i\left(\frac{K}{A}H + K_c\right)$

$\xi = \frac{1}{2}\omega_0 T_i\left(\frac{K}{A}H + K_c\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La fonction de transfert en boucle fermée correspond à un second ordre de coefficient d'amortissement $\frac{\sqrt{2}}{2}$: en négligeant le zéro du numérateur, il s'agit d'un système peu oscillant (un seul dépassement de 5%) avec un temps de réponse minimal ($t_5\% = \frac{3}{\omega_0}$).

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI