

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2012

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

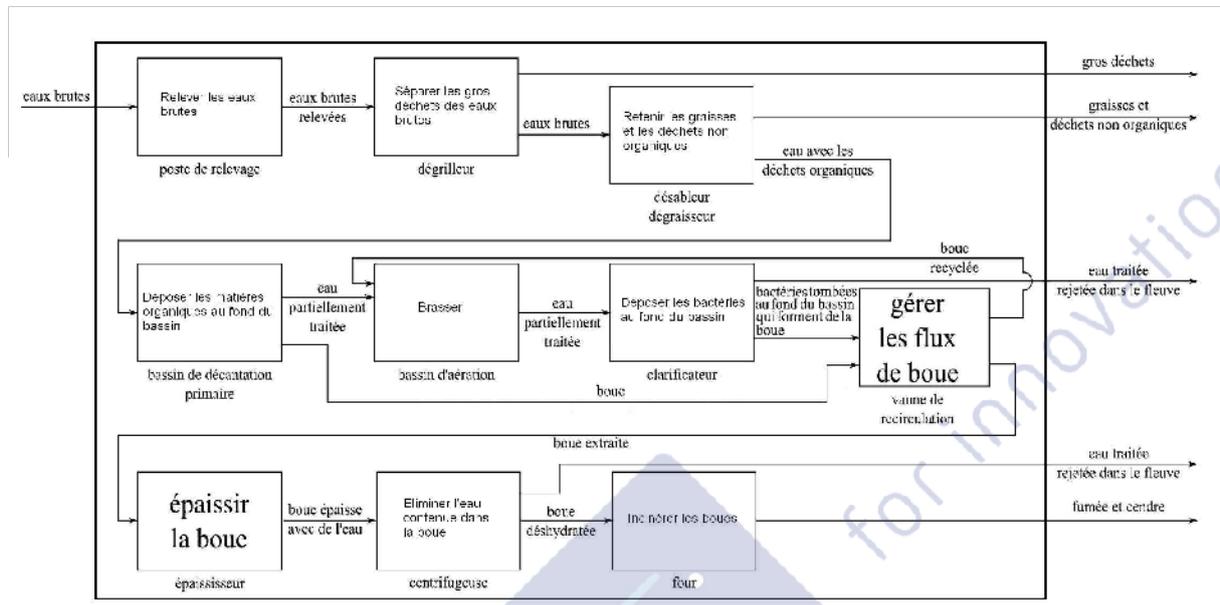
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Question 1 : compléter sur le document réponse DR1 la description SADT de l'organisation structurelle de la solution.



Question 2 : on supposera qu'en régime permanent l'accouplement élastique est homocinétique, c'est-à-dire que $\omega_v = \omega_r$. Donner la relation $\frac{\omega_v}{\omega_r}$ et la valeur de ω_v en rad.s^{-1} pour ω_m nominal. Conclure sur la capacité du moteur à permettre une vitesse de la vis $N_{v,max} = 30$ tours/min, correspondant à un débit d'environ $400 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

$$\frac{\omega_v}{\omega_m} = \frac{\omega_v}{\omega_r} \cdot \frac{\omega_r}{\omega_p} \cdot \frac{\omega_p}{\omega_m}$$

$$\frac{\omega_v}{\omega_m} = \lambda$$

Le moteur ayant une vitesse nominale de rotation de 978 tr/min, sa vitesse nominale de rotation exprimée en 1 est égale à :

$$\omega_{m,nom} = 978 \frac{\pi}{30}$$

$$\omega_{m,nom} = 102,4 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{\omega_v}{\omega_m} = \lambda \Rightarrow \omega_v = 3,2 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{\omega_v}{\omega_m} = \lambda \Rightarrow \frac{N_v}{N_m} = \lambda$$

$$N_v = \lambda N_m \quad N_v = 31 \text{ tours/min}$$

Or, $N_{v,max} = 30$ tours/min. Le moteur choisi permet donc d'obtenir la vitesse désirée.

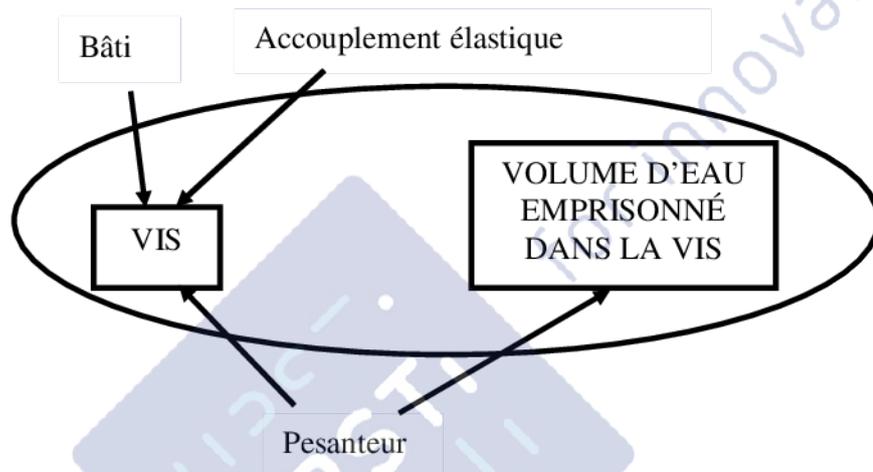
Question 3 : appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {vis ; volume d'eau emprisonné dans la vis} en régime permanent ($\omega_v = \text{cte}$) et en déduire

l'expression et la valeur numérique du couple à transmettre à la vis C_V nécessaire pour déplacer l'eau.

J'isole l'ensemble Σ {vis ; volume d'eau emprisonné dans la vis}.

La masse du volume d'eau emprisonné dans la vis pouvant être considérée comme constante, on peut appliquer le théorème de l'énergie en considérant que chaque particule élémentaire d'eau de masse dm_{eb} se déplace à la vitesse $\frac{p}{2\pi} \omega_v \vec{x}$ puisque

$$\{V_{eb/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \\ \frac{p}{2\pi} \omega_v \vec{x} \end{array} \right\}_O$$



Bilan des puissances fournies au système :

Le frottement entre la vis et l'eau étant négligé, la puissance des efforts intérieurs est nulle.

La liaison pivot entre la vis et le bâti étant parfaite, $P_{0 \rightarrow vis/0} = 0$.

Le centre d'inertie de la vis peut être considéré comme étant sur l'axe de rotation (qui est fixe) de celle-ci, $P_{pesanteur \rightarrow vis/0} = 0$.

$$P_{accouplement\acute{e}lastique \rightarrow vis/0} = C_v \omega_v$$

$$P_{pesanteur \rightarrow eau/0} = \int dm_{eb} \vec{g} \cdot \frac{p}{2\pi} \omega_v \vec{x} = -\frac{p}{2\pi} g \sin \alpha \omega_v \int dm_{eb} = -\frac{p}{2\pi} g \sin \alpha \omega_v m_{eb}$$

Détermination de l'énergie cinétique du système :

La vis ayant un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, en régime permanent son énergie cinétique sera constante.

Le mouvement de chaque particule d'eau étant modélisé par une translation proportionnelle à la vitesse de rotation de la vis, en régime permanent l'énergie cinétique du volume d'eau emprisonné dans la vis sera constante.

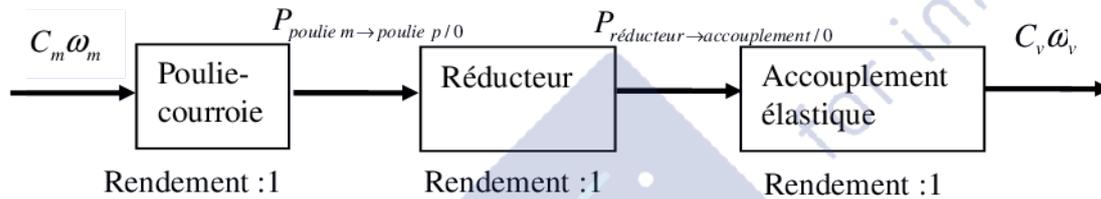
Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble Σ {vis ; volume d'eau emprisonné dans la vis} permet d'obtenir l'équation suivante :

$$C_v \omega_v - \frac{p}{2\pi} g \sin \alpha m_{eb} \omega_v = 0 \quad \boxed{C_v = \frac{pg \sin \alpha m_{eb}}{2\pi}}$$

$$C_v = \frac{pg \sin \alpha \rho_{eb} V_{pas} L_v}{2\pi \eta} = \frac{g \sin \alpha \rho_{eb} V_{pas} L_v}{2\pi} \quad \boxed{C_v = 3025,3 \text{ N.m}}$$

Question 4 : en utilisant les données de la chaîne cinématique (rendements, rapports de réduction), donner l'expression et la valeur numérique du couple moteur nécessaire pour assurer le débit maximal en régime permanent. Conclure quant à la capacité du moteur à atteindre ce couple.

Soit $P_{moteur \rightarrow poulie\ m/0} = C_m \omega_m$



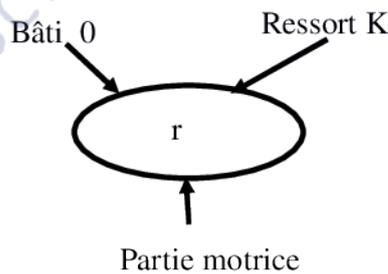
D'où : $C_v \omega_v = C_m \omega_m$ $\frac{C_v \omega_v}{\omega_m} = C_m$ $\boxed{C_m = \lambda C_v}$ $\boxed{C_m = 96 \text{ N.m}}$

Le moteur tournant à vitesse nominale, il faut donc comparer C_m à la valeur du couple nominal c'est-à-dire 400N.m. C_m étant inférieur à la valeur du couple nominal, on est assuré que le moteur est capable de fournir 96 N.m.

Question 5 : afin d'établir deux équations de mouvement reliant θ_r et θ_v , écrire :

- l'équation issue du théorème du moment dynamique suivant (O, \vec{x}) appliqué à r ;
- l'équation issue du théorème du moment dynamique suivant (O, \vec{x}) appliqué à v.

J'isole l'arbre r :



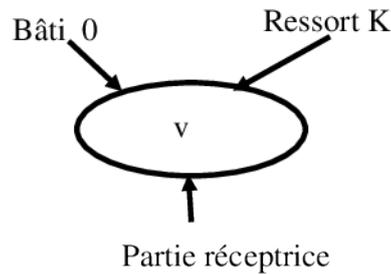
L'équation issue du théorème du moment dynamique suivant (O, \vec{x}) appliqué à r est :

$$\overrightarrow{\delta_{O,r/0}} \cdot \vec{x} = M_{O,0 \rightarrow r} \cdot \vec{x} + M_{O,K \rightarrow r} \cdot \vec{x} + M_{O,partie\ motrice \rightarrow r} \cdot \vec{x} = C_r - C$$

$\overrightarrow{\delta_{O,r/0}} \cdot \vec{x} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{O,r/0}} \right] \cdot \vec{x} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{\sigma_{O,r/0}} \cdot \vec{x}]$ car O est un point fixe et le vecteur \vec{x} est fixe par rapport au repère galiléen .

$$\overrightarrow{\sigma_{O,r/0}} \cdot \vec{x} = J_r \dot{\omega}_r \quad J_r \dot{\omega}_r = C_r - C \quad \text{d'où : } \boxed{J_r \ddot{\theta}_r = C_r - K(\theta_r - \theta_v)}$$

J'isole l'arbre v :



L'équation issue du théorème du moment dynamique suivant (O, \vec{x}) appliqué à v est :

$$\overrightarrow{\delta}_{O,v/0} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{M}_{O,0 \rightarrow v} \cdot \vec{x} + \overrightarrow{M}_{O,K \rightarrow v} \cdot \vec{x} + \overrightarrow{M}_{O,partie\ réceptrice \rightarrow v} \cdot \vec{x} = -C_v + C$$

$$\overrightarrow{\delta}_{O,v/0} \cdot \vec{x} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{O,v/0} \right] \cdot \vec{x} = \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{\sigma}_{O,v/0} \cdot \vec{x} \right] = J_v \dot{\omega}_v \quad \text{donc} \quad \boxed{J_v \ddot{\theta}_v = -C_v + K(\theta_r - \theta_v)}$$

Question 6 : en déduire l'équation différentielle de mouvement : $\Delta \ddot{\theta} + A \Delta \theta = B$.
Exprimer A et B en fonction des données de l'énoncé.

$$\Delta \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_r - \ddot{\theta}_v \quad \text{or, on a} \quad J_v(J_r \ddot{\theta}_r) - J_r(J_v \ddot{\theta}_v) = J_v(C_r - K(\theta_r - \theta_v)) - J_r(-C_v + K(\theta_r - \theta_v))$$

$$\text{D'où} \quad J_v J_r \Delta \ddot{\theta} = J_v(C_r - K(\Delta \theta)) - J_r(-C_v + K(\Delta \theta))$$

$$\boxed{\Delta \ddot{\theta} + K \frac{J_v + J_r}{J_v J_r} \Delta \theta = \frac{J_v C_r + J_r C_v}{J_v J_r}}$$

$$\boxed{A = K \frac{J_v + J_r}{J_v J_r}}$$

$$\boxed{B = \frac{J_v C_r + J_r C_v}{J_v J_r}}$$

Question 7 : tracer sur le document réponse DR2 la courbe de gain de la fonction $Ha(j\omega)$ pour une pulsation ω allant de 0,01 rad/s à 100 rad/s. Indiquer notamment la pulsation de résonance et vérifier le cahier des charges quant à cette pulsation (fonction FS2).

$$\text{La forme canonique de cette fonction de transfert est :} \quad Ha(p) = \frac{1}{J_v \omega_1^2} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_1^2}}$$

Gain statique :

$$\frac{1}{J_v \omega_1^2} = \frac{J}{J_v K} = \frac{J_v J_r}{J_v K (J_r + J_v)} = \frac{J_r}{K (J_r + J_v)} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$20 \log 3,5 \cdot 10^{-4} = -69 \text{ dB}$$

Pulsation propre non amortie, ce qui correspond à la pulsation de coupure :

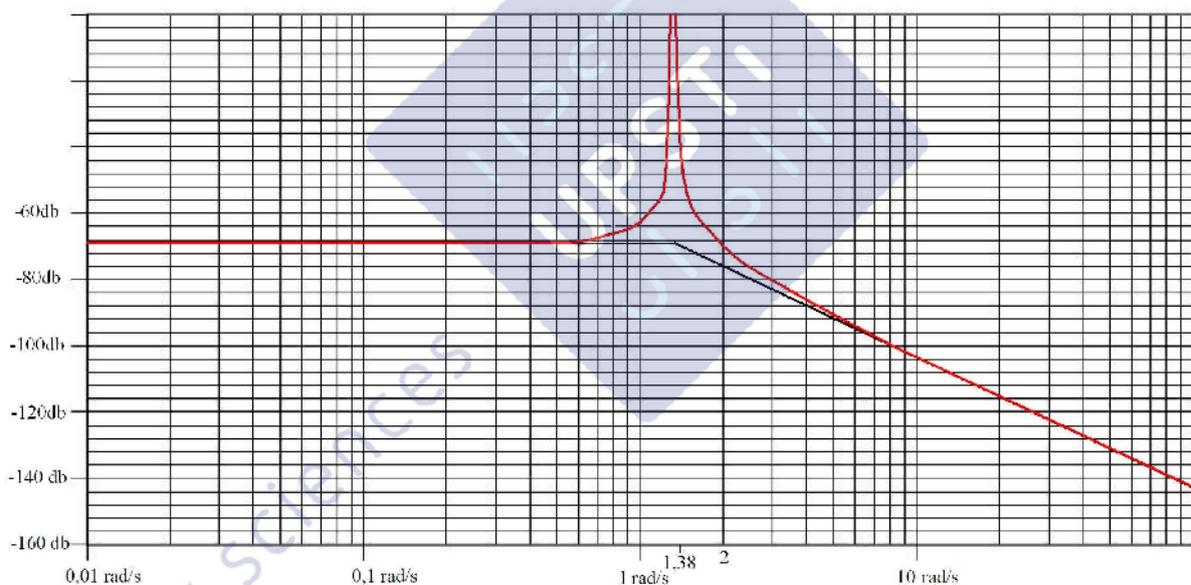
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{J}} = \sqrt{\frac{K(J_r + J_v)}{J_v J_r}} = 1,38 \text{ rad.s}^{-1}$$

Dans le tableau suivant :

- quelques pulsations particulières,
- la position de la courbe de gain réelle par rapport à l'asymptote horizontale -69 dB
- le rapport $\frac{\log \omega}{\log 2}$ pour pouvoir placer les pulsations particulières sur l'échelle

logarithmique en prenant comme étalon la distance entre 1 et 2 rad/s

ω rad/s	0,8	1	1,2	1,38	1,5	2	3,2
$-20 \log \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{1,38}\right)^2}$ dB	3,6	6,5	12,3	$+\infty$	14,8	-0,8	-12,8
$\frac{\log \omega}{\log 2}$	inutile	inutile	0,26	0,46	0,58	inutile	1,68



La pulsation de coupure du filtre passe-bas, $\omega_1 = 1,38 \text{ rad.s}^{-1}$ correspond bien à la pulsation de coupure désirée : $1,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

Question 8 : calculer (ne pas le mesurer sur le diagramme précédent) le rapport d'amplitude $\left| \frac{C}{C_v} \right|$ pour $\omega = 3,2 \text{ rad/s}$. Conclure quant à la capacité du système à filtrer les à-coups (fonction FS2).

On a la relation : $C = K\Delta\theta$, donc $\left| \frac{C}{C_v} \right|$ correspond à $K|Ha(p)|$ avec $p = j\omega$

$$K \left| \frac{1}{J_v \omega_1^2} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_1^2}} \right| = \frac{K}{J_v \omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^2}} \quad \text{pour } \omega = 3,2 \text{ rad/s} \quad \left| \frac{C}{C_v} \right| = \frac{K}{J_v \omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{3,2}{\omega_1}\right)^2\right)^2}}$$

$$\left| \frac{C}{C_v} \right| = 0,16$$

Or, le cahier des charges stipule $\left| \frac{C}{C_v} \right| = 0,65 \quad \max i$

Pour des pulsations supérieures à la pulsation de coupure, il y a bien filtrage des à-coups mais il y a rupture de l'accouplement élastique pour les pulsations très voisines de la pulsation de coupure car $\Delta\theta$ tend alors vers $+\infty$.

Question 9 : que modifierait la prise en compte de l'amortissement de l'accouplement ?

Si l'on prenait en compte l'amortissement de l'accouplement, le modèle serait plus conforme à la réalité puisque les manchons sont en élastomère, donc il y a l'équivalent d'un frottement visqueux qui est la signature d'un phénomène dissipatif d'énergie.

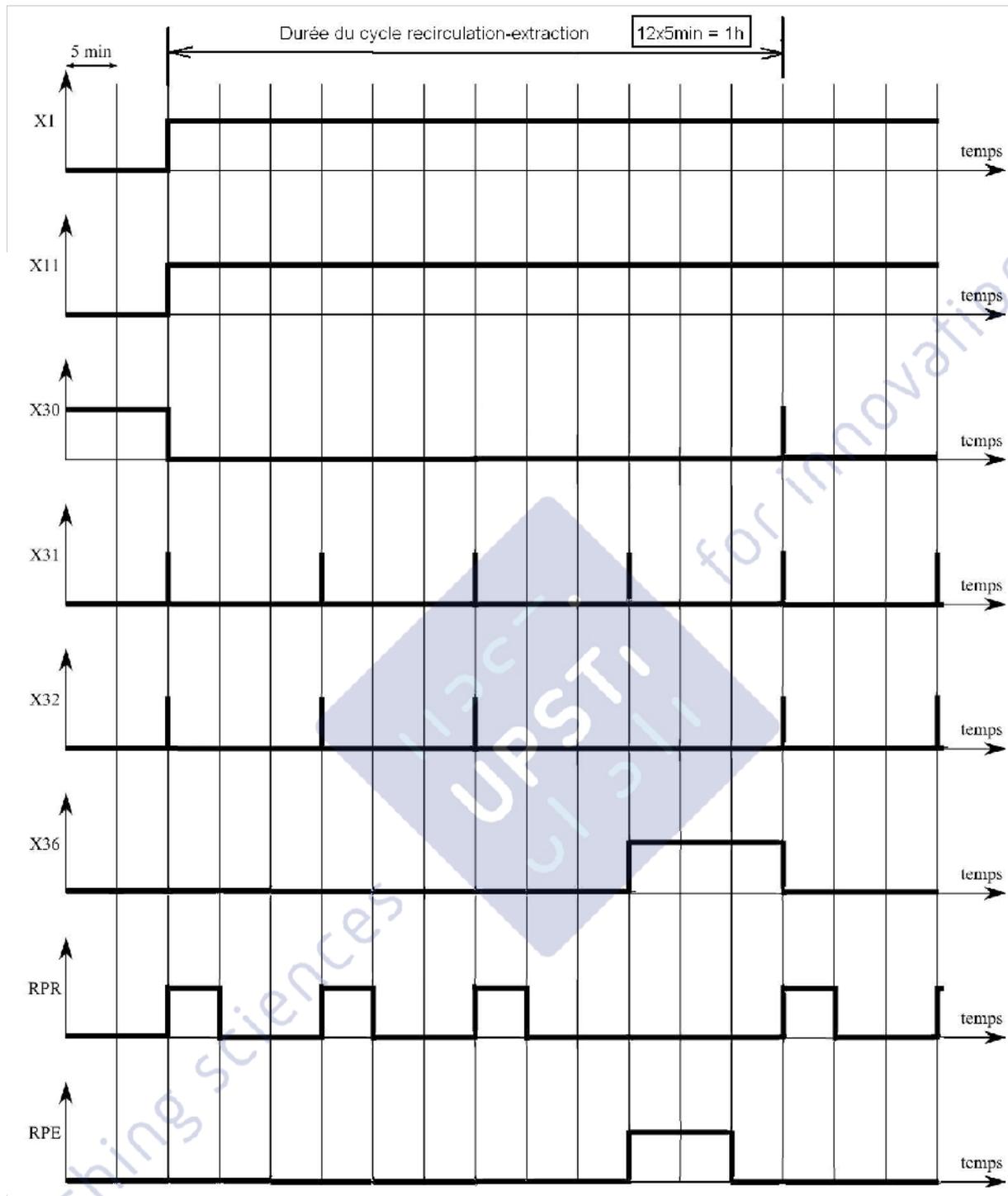
La pulsation de résonance deviendrait inférieure à la pulsation de coupure, l'amplitude à la résonance serait bornée : si le coefficient d'amortissement est suffisamment élevé, on peut éviter la rupture de l'accouplement élastique quelle que soit la pulsation de la partie fluctuante du couple venant de la partie réceptrice (C_v).

Question 10 : au démarrage et à l'arrêt, l'arbre va passer par sa pulsation de résonance. La courroie utilisée n'est pas crantée, c'est une courroie « lisse ». Expliquer le rôle du système poulie – courroie dans cette phase.

La courroie crantée a pour principale qualité de transmettre la puissance de façon homocinéétique au contraire d'une courroie lisse qui peut glisser sur les poulies lorsque le couple à transmettre devient trop important.

Puisqu'au démarrage et à l'arrêt, l'arbre va passer par sa pulsation de résonance, il va y avoir très forte augmentation du couple à transmettre au voisinage de la pulsation de résonance. Le fait d'utiliser une courroie lisse permet de réaliser un limiteur de couple, ce qui permet de s'assurer de la non destruction de l'accouplement élastique.

Question 11 : compléter le chronogramme du document réponse DR3 pour la durée d'un cycle « recirculation – extraction » et indiquer cette durée sur le diagramme.



Question 12 : déduire des chronogrammes la durée horaire moyenne de fonctionnement des pompes de recirculation et d'extraction. Connaissant le débit des pompes, en déduire le débit moyen de recirculation et d'extraction et vérifier le cahier des charges (FS4 et FS5).

L'action RPR est réalisée pendant 15 min sur un laps de temps de 1 heure.

L'action RPE est réalisée pendant 10 min sur un laps de temps de 1 heure.

Il y a six pompes en fonctionnement destinées à la recirculation des boues vers le bassin d'aération : chacune de ces pompes a un débit de $214 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

Le débit moyen de recirculation est donc égal à : $6 \cdot \frac{15}{60} \cdot 214 = 321 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$

Le cahier des charges est respecté puisque : $320 - 32 \leq 321 \leq 320 + 32$

Il y a deux pompes en fonctionnement destinées à l'extraction des boues en excès : chacune de ces pompes a un débit de $34 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

Le débit moyen de extraction est donc égal à : $2 \cdot \frac{10}{60} \cdot 34 = 11,3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$

Le cahier des charges est respecté puisque : $11 - 1,1 \leq 11,3 \leq 11 + 1,1$

Question 13 : on note $\frac{\omega_{40} - \omega_{30}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -k$ Exprimer k en fonction du nombre de dents des engrenages (Z_1 et Z_4) et en déduire sa valeur numérique.

En utilisant la formule de Willis pour le train épicycloïdal (planétaire 4, porte satellites 3, satellite 2 et couronne 1) :

$$\frac{\omega_{40} - \omega_{30}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -k = \frac{\omega_{43}}{\omega_{13}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \left(-\frac{Z_2}{Z_4} \right)$$

$$k = \frac{Z_1}{Z_4} \quad k = 3$$

Question 14 : durant la première phase de lancement, on a $\omega_{40} = 0$. Exprimer alors ω_{30} en fonction de ω_{10} et de k .

$$\frac{0 - \omega_{30}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -k \Leftrightarrow \omega_{30} = k(\omega_{10} - \omega_{30})$$

$$\omega_{30} = \frac{k}{1+k} \omega_{10}$$

Question 15 : donner l'expression du moment d'inertie du tambour J_1 par rapport à son axe de rotation en fonction de p et des données géométriques. Faire l'application numérique. On donne $J_{eq1} = \left(\frac{k}{1+k} \right)^2 J_3 + J_1$. Calculer numériquement J_{eq1} .

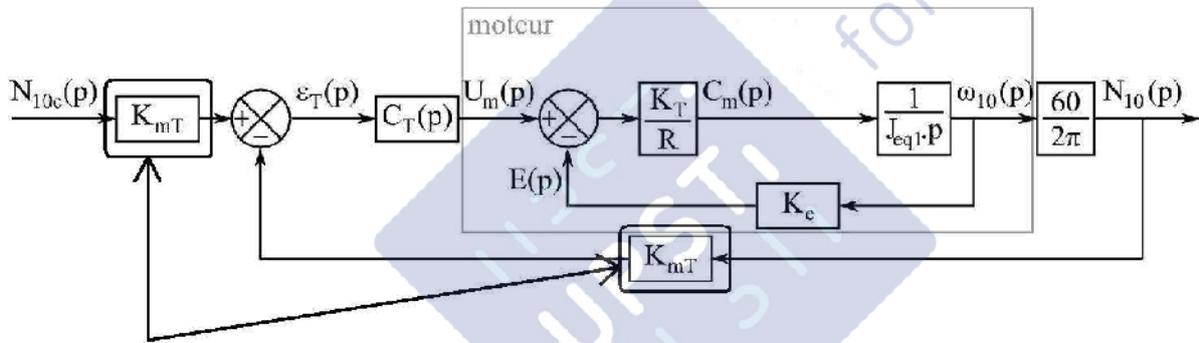
Le tambour peut être considéré comme un cylindre plein de rayon R_2 , de hauteur L et de masse $\rho\pi R_2^2 L$ auquel on soustrait un cylindre plein de rayon R_1 , de hauteur L et de masse $\rho\pi R_1^2 L$. On aura donc :

$$J_1 = \rho\pi R_2^2 L \frac{R_2^2}{2} - \rho\pi R_1^2 L \frac{R_1^2}{2} \quad \boxed{J_1 = \frac{\rho\pi}{2} L(R_2^4 - R_1^4)} \quad \boxed{J_1 = 427 \text{ kg.m}^2}$$

Donc : $\boxed{J_{eq1} = 528,2 \text{ kg.m}^2}$

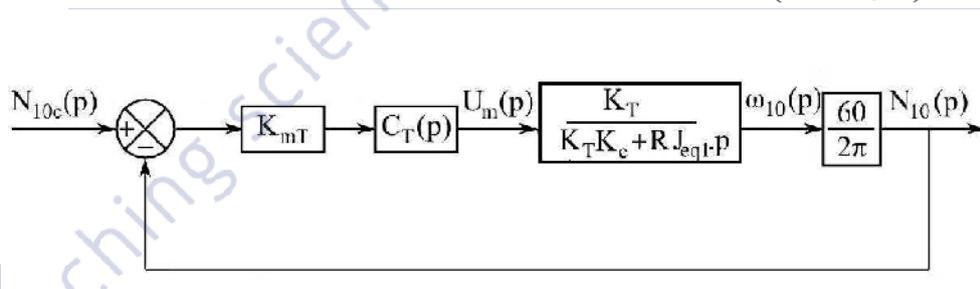
Question 16 : mettre le schéma de la figure 12 sous la forme de la figure 14. Donner les expressions sous forme canonique de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$ en fonction des données du moteur $M_{tambour}$.

On va utiliser le théorème de superposition et commencer par déterminer $N_{10}(p)$ en fonction de $N_{10c}(p)$ lorsque le couple résistant est nul. On a donc le schéma suivant :



Signature d'un système à retour unitaire

La fonction de transfert du moteur est :
$$\frac{\omega_{10}(p)}{U_m(p)} = \frac{K_T}{RJ_{eq1}p \left(1 + \frac{K_T K_e}{RJ_{eq1}p}\right)} = \frac{K_T}{K_T K_e + RJ_{eq1}p}$$



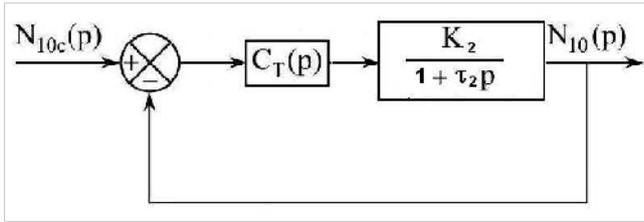
$$H_2(p) = \frac{60}{2\pi} \frac{K_{mT} K_T}{K_T K_e + RJ_{eq1}p}$$

$$H_2(p) = \frac{60 K_{mT}}{2\pi K_e} \frac{1}{1 + \frac{RJ_{eq1}}{K_T K_e} p}$$

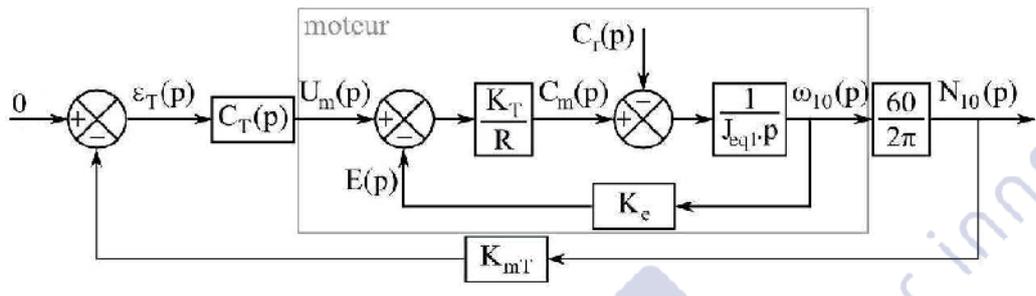
$$\boxed{K_2 = \frac{60 K_{mT}}{2\pi K_e}}$$

$$\boxed{\tau_2 = \frac{RJ_{eq1}}{K_T K_e}}$$

A couple résistant nul, on a bien le schéma suivant :



On va déterminer $N_{10}(p)$ en fonction de $C_r(p)$ lorsque la vitesse de consigne est nulle.



$$\epsilon_T(p) = -K_{mT}N_{10}(p) \quad E(p) = K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p) \quad U_m(p) = -C_T(p)K_{mT}N_{10}(p)$$

$$C_m(p) = \frac{K_T}{R} \left(-C_T(p)K_{mT}N_{10}(p) - K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p) \right)$$

On a donc :

$$\left(-C_r(p) - \frac{K_T}{R} \left(C_T(p)K_{mT}N_{10}(p) + K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p) \right) \right) \frac{60}{2\pi J_{eq1} p} = N_{10}(p)$$

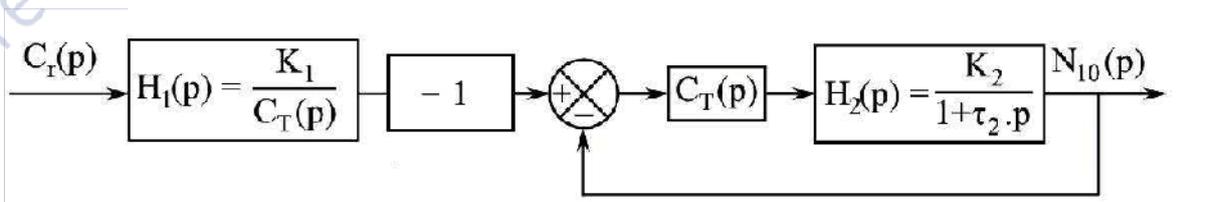
$$-C_r(p) = N_{10}(p) \frac{2\pi J_{eq1} p}{60} + \frac{K_T}{R} \left(C_T(p)K_{mT}N_{10}(p) + K_e \frac{2\pi}{60} N_{10}(p) \right)$$

$$-C_r(p) = N_{10}(p) \left(\frac{2\pi R J_{eq1} p + K_T (60 C_T(p) K_{mT} + K_e 2\pi)}{60 R} \right)$$

$$-C_r(p) \frac{60 R}{2\pi R J_{eq1} p + K_T (60 C_T(p) K_{mT} + K_e 2\pi)} = N_{10}(p) = \frac{60 R}{2\pi K_e K_T} \frac{1}{1 + \frac{R J_{eq1}}{K_e K_T} p + \frac{60 K_{mT}}{2\pi K_e} C_T(p)} (-C_r(p))$$

$$N_{10}(p) = \frac{R K_2}{K_{mT} K_T} \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 C_T(p)} (-C_r(p))$$

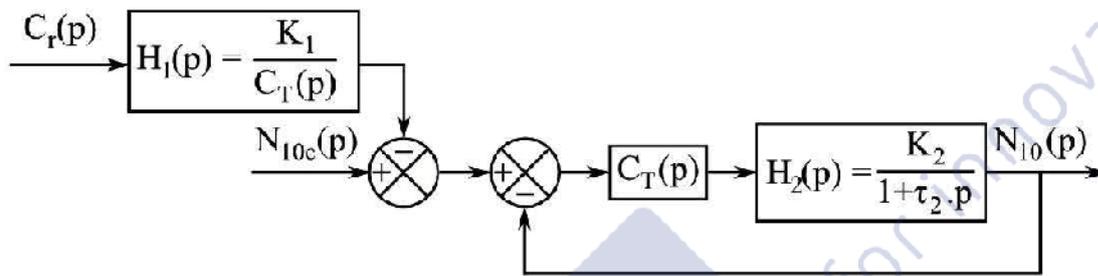
Ce qui doit correspondre au schéma suivant :



$$\frac{N_{10}(p)}{C_r(p)} = -\frac{K_1}{C_T(p)} \frac{C_T(p)K_2}{1+\tau_2 p} \frac{1}{1+\frac{C_T(p)K_2}{1+\tau_2 p}} = -K_1 K_2 \frac{1}{1+\tau_2 p + K_2 C_T(p)} = -\frac{RK_2}{K_{mT} K_T} \frac{1}{1+\tau_2 p + K_2 C_T(p)}$$

D'où :
$$K_1 = \frac{R}{K_{mT} K_T}$$

En superposant, on arrive au résultat suivant :



En faisant les applications numériques :

$$K_1 = 71,4 \text{ tours}/(\text{min Nm})$$

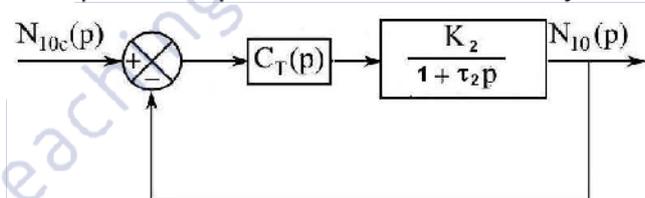
$$K_2 = 5,11 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_2 = 20,2 \text{ s}$$

Question 17 : donner l'écart statique $\mathcal{E}_S = \lim_{p \rightarrow 0} (N_{10c}(p) - N_{10}(p) - H_1(p)C_r(p))$ pour les 4 cas du tableau ci-dessous en fonction de K_1 , K_2 , τ_2 , K_c , K_i , $|N_{10c}(t)|$, $|N_{10c}(t)|$ et $|C_r(t)|$. Pour quel(s) correcteur(s), le critère de précision de la fonction FS5 est-il vérifié ?

Etant donné qu'on demande le calcul de l'erreur statique soit à perturbation nulle, soit à consigne nulle, j'utilise le théorème de superposition et décompose l'erreur statique comme étant la somme de l'erreur statique à couple résistant nul $\mathcal{E}_{S_{C_r=0}}$ et de l'erreur statique à consigne nulle $\mathcal{E}_{S_{N_{10c}=0}}$.

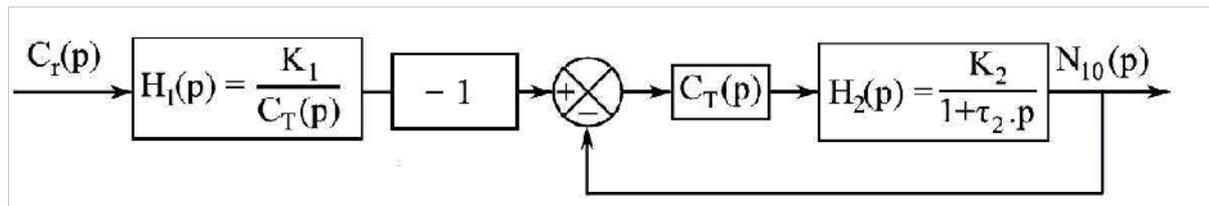
Lorsque le couple résistant est nul, le système est un système à retour unitaire donc :



$$H_2(p) = K_2 \frac{1}{1+\tau_2 p}$$

$$\mathcal{E}_{S_{C_r=0}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(N_{10c}(p) \frac{1}{1+C_T(p)H_2(p)} \right)$$

Lorsque la consigne est nulle :



$$\mathcal{E}_s_{N_{10c}=0} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(0 - K_1 K_2 \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 C_T(p)} (-C_r(p)) \right) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_1 K_2 \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 C_T(p)} C_r(p) \right)$$

D'où :

$$\mathcal{E}_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(N_{10c}(p) \frac{1}{1 + C_T(p) H_2(p)} \right) + \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_1 K_2 \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 C_T(p)} C_r(p) \right)$$

On a les cas suivants :

ε_s	$C_T(p) = K_c$	$C_T(p) = K_c + \frac{K_i}{p}$
$N_{10c}(t) = 2000 \text{ tours/min} \quad C_r(t) = 0$		
$N_{10c}(t) = 0 \text{ tour/min} \quad C_r(t) = 3 \text{ kN.m}$		

- Cas $C_T(p) = K_c$

- Cas $N_{10c}(t) = 2000 \text{ tours/min} \quad C_r(t) = 0 \text{ Nm}$

$$\mathcal{E}_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2000}{1 + K_c \frac{K_2}{1 + \tau_2 p}} \quad \boxed{\mathcal{E}_s = \frac{2000}{1 + K_c K_2}}$$

- Cas $N_{10c}(t) = 0 \text{ tours/min} \quad C_r(t) = 3 \text{ Nm}$

$$\mathcal{E}_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(K_1 K_2 \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_c K_2} 3 \right) \quad \boxed{\mathcal{E}_s = \frac{3 K_1 K_2}{1 + K_c K_2}}$$

- Cas $C_T(p) = \frac{K_i + K_c p}{p}$

- Cas $N_{10c}(t) = 2000 \text{ tours/min} \quad C_r(t) = 0 \text{ Nm}$

$$\mathcal{E}_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{2000}{1 + \frac{K_i + K_c p}{p} \frac{K_2}{1 + \tau_2 p}} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} 2000 \frac{p(1 + \tau_2 p)}{p(1 + \tau_2 p) + K_2(K_i + K_c p)} \quad \boxed{\mathcal{E}_s = 0}$$

- Cas $N_{10c}(t) = 0 \text{ tours/min} \quad C_r(t) = 3 \text{ Nm}$

$$\mathcal{E}_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(K_1 K_2 \frac{1}{1 + \tau_2 p + \frac{K_i + K_c p}{p} K_2} \frac{3}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{3 K_1 K_2 p}{p + \tau_2 p^2 + K_i + K_c p K_2} \right) \quad \boxed{\mathcal{E}_s = 0}$$

\mathcal{E}_s	$C_T(p) = K_C$	$C_T(p) = \frac{K_i + K_C p}{p}$
$N_{10C}(t) = 2000 \text{ tours/min}$ $C_r(t) = 0 \text{ Nm}$	$\frac{2000}{1 + K_C K_2}$	0
$N_{10C}(t) = 0 \text{ tours/min}$ $C_r(t) = 3 \text{ Nm}$	$\frac{3K_1 K_2}{1 + K_C K_2}$	0

Pour vérifier le critère, j'ai estimé qu'il devait être vérifié en considérant le couple résistant non nul.

Pour satisfaire le critère de la fonction FS5 avec le correcteur à action proportionnelle et en considérant que la valeur du couple résistant est conforme à celle donnée dans le sujet, il faut

$$\frac{2000}{1 + K_C K_2} + \frac{3K_1 K_2}{1 + K_C K_2} = \pm 0,1 \text{ tours/min} \Leftrightarrow \frac{2000 + 3K_1 K_2}{0,1} = \pm(1 + K_C K_2) \Leftrightarrow 20011 = \pm(1 + 5,1 \cdot 10^{-3} K_C)$$

On a donc $20011 = 1 + 5,1 \cdot 10^{-3} K_C$ ou $20011 = -(1 + 5,1 \cdot 10^{-3} K_C)$

$$20010 = 5,1 \cdot 10^{-3} K_C \text{ ou } 20012 = -5,1 \cdot 10^{-3} K_C$$

or $K_C > 0$ donc $K_C = \frac{20010}{5,1} 10^3 = 3923529$, ce qui est un gain élevé.

Avec le correcteur à action proportionnelle et intégrale, le critère de la fonction FS5 est toujours satisfait.

Question 18 : justifier que la stabilité théorique du système bouclé est indépendante des paramètres des correcteurs précédents.

La stabilité théorique du système bouclé ne dépend que de la fonction de transfert en boucle ouverte : $FTBO = C_T(p)H_2(p)$

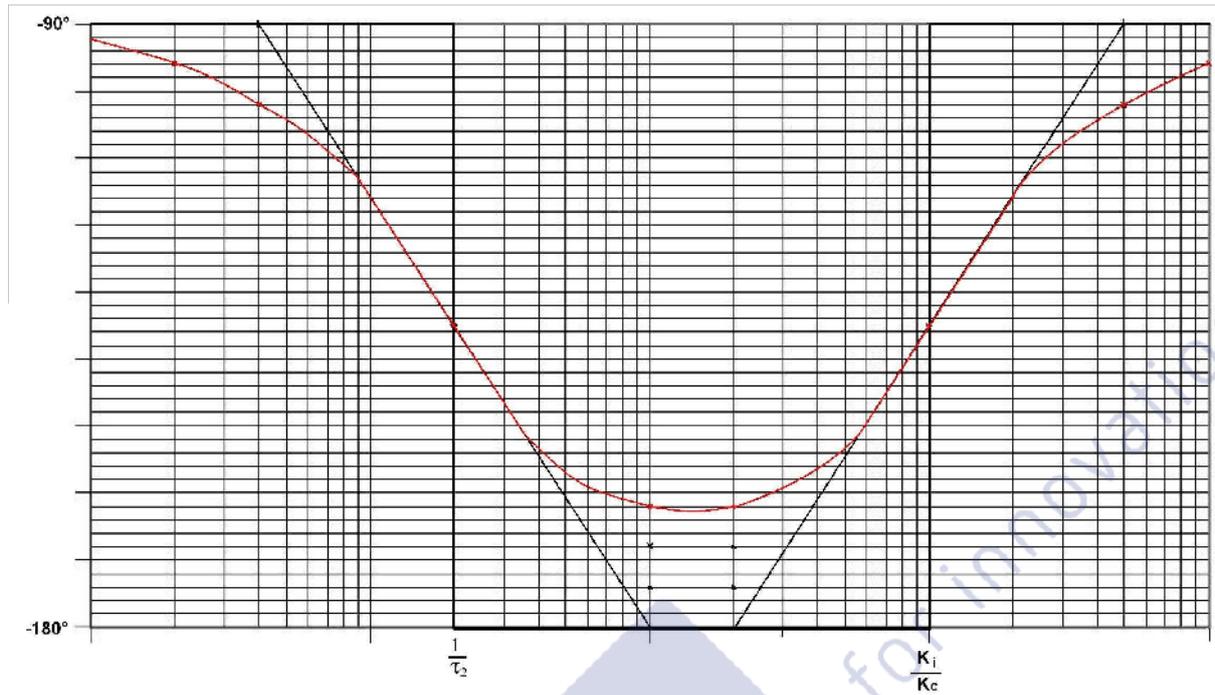
- Cas $C_T(p) = K_C$ $FTBO = K_C \frac{K_2}{1 + \tau_2 p}$

La FTBO est une fonction de transfert d'ordre un dont la valeur minimale de la phase est -90° : ce système sera toujours stable en boucle fermée.

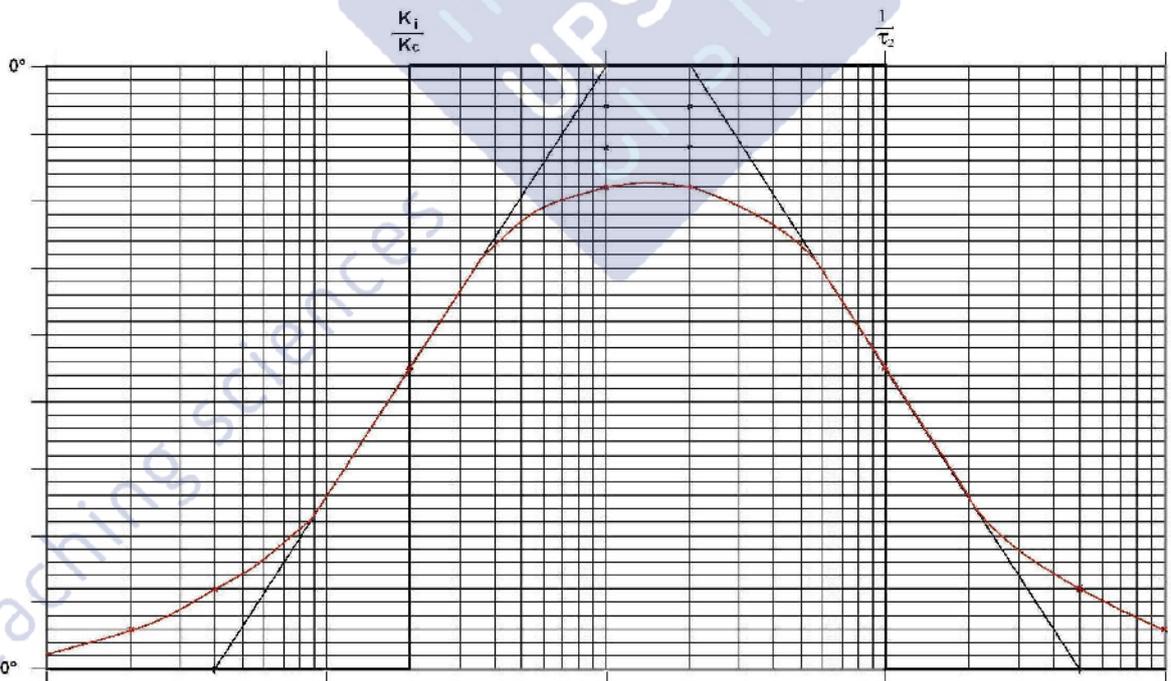
- Cas $C_T(p) = \frac{K_i + K_C p}{p}$ $FTBO = \frac{K_i + K_C p}{p} \frac{K_2}{1 + \tau_2 p} = K_2 K_i \frac{1 + \frac{K_C}{K_i} p}{p(1 + \tau_2 p)}$

La phase de cette FTBO est toujours supérieure à -180° , en effet :

- Si $\frac{K_C}{K_i} = \tau_2$, alors la phase est toujours égale à -90° .
- Si $\frac{K_C}{K_i} < \tau_2$, alors le diagramme de Bode en phase est de la forme suivante :



- Si $\frac{K_c}{K_i} > \tau_2$, alors le diagramme de Bode en phase est de la forme suivante :



Question 19 : pour cette question, on prend $C_T(p) = K_c$ et $C_r = 0$. Mettre $H(p)$ sous la forme : $H(p) = \frac{K}{1 + \varphi}$. Donner les valeurs de K et τ en fonction de K_2 , τ_2 et K_c . On donne $tr_{1\%/oo} = 7\tau_1$ pour un premier ordre. Donner l'expression de la valeur minimale

de K_c en fonction de K_2 , τ_2 et $tr_{1\%}$ afin de vérifier le cahier des charges. Calculer alors la valeur de K_c permettant d'avoir un temps de réponse à 1% de 135 s.

$$H(p) = \frac{K_2 K_c}{1 + \tau_2 p + K_2 K_c} \quad H(p) = \frac{K_2 K_c}{1 + K_2 K_c} \frac{1}{1 + \frac{\tau_2}{1 + K_2 K_c} p} \quad K = \frac{K_2 K_c}{1 + K_2 K_c} \quad \tau = \frac{\tau_2}{1 + K_2 K_c}$$

On veut $tr_{1\%} = 7\tau = 135s$

$$7\tau = \frac{7\tau_2}{1 + K_2 K_c} = tr_{1\%} \Leftrightarrow tr_{1\%} (1 + K_2 K_c) = 7\tau_2 \quad K_c = \frac{\frac{7\tau_2}{tr_{1\%}} - 1}{K_2} \quad K_{c \min i} = 9,3$$

Question 20 : pour cette question, on prend $C_T(p) = \frac{K_i}{p}$ et $C_r = 0$. Mettre $H(p)$ sous la

forme : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$. Donner les expressions de K_3 , m et ω_0 en fonction de

K_2 , τ_2 et K_i . On donne l'amplitude du premier dépassement (valeur relative) de la réponse indicelle d'un second ordre : $D_1 = \exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$. Calculer alors K_i permettant d'avoir un dépassement maximal de 0,1 %.

$$H(p) = K_2 \frac{K_i}{p} \frac{1}{1 + \tau_2 p + K_2 \frac{K_i}{p}} = \frac{K_2 K_i}{p + \tau_2 p^2 + K_2 K_i} \quad H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_2 K_i} + \frac{\tau_2}{K_2 K_i} p^2}$$

$$K_3 = 1 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_2 K_i}{\tau_2}}$$

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{K_2 K_i} \Leftrightarrow m = \frac{\omega_0}{2K_2 K_i} \quad m = \frac{1}{2\sqrt{\tau_2 K_2 K_i}}$$

On veut $D_1 = 0,1\% = 1.10^{-3}$, on aura forcément $m < 1$.

$$\ln D_1 = -\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}} = -6,91 \Leftrightarrow (\pi m)^2 = 6,91^2 (1-m^2) \Leftrightarrow m = \frac{6,91^2}{\pi^2 + 6,91^2} \quad m = 0,91$$

$$m = \frac{1}{2\sqrt{\tau_2 K_2 K_i}} \quad K_i = \frac{1}{4m^2 \tau_2 K_2} \quad K_i = 2,93$$

Question 21 : les deux figures suivantes donnent le résultat de la simulation du modèle avec les valeurs de K_c et K_i trouvées aux questions précédentes. Conclure quant au respect des critères de la fonction FS5.

Les critères à vérifier sont les suivants, le débit extraction moyen horaire a déjà été vérifié précédemment.

FS5 : traiter les boues	Débit extraction moyen horaire	11 m ³ /h ± 10 %
	Taux de siccité	20 % obtenu pour une vitesse relative de 2 tours/min
	Rapidité	Temps de réponse à 1 % de 270 s + 135 s
	Dépassement maximum pour la vitesse du tambour	0,2 % + 0,1 %
	Marge de phase pour la vitesse du tambour	45° minimum
	Marge de gain pour la vitesse du tambour	7 db minimum
	Précision pour la vitesse du tambour	$N_{10c} + 0,1$ tour/min N_{10c} : vitesse de consigne du tambour
	Précision pour la vitesse relative (différentielle)	$V_{Re} \pm 0,1$ tour/min V_{Re} : vitesse relative de consigne

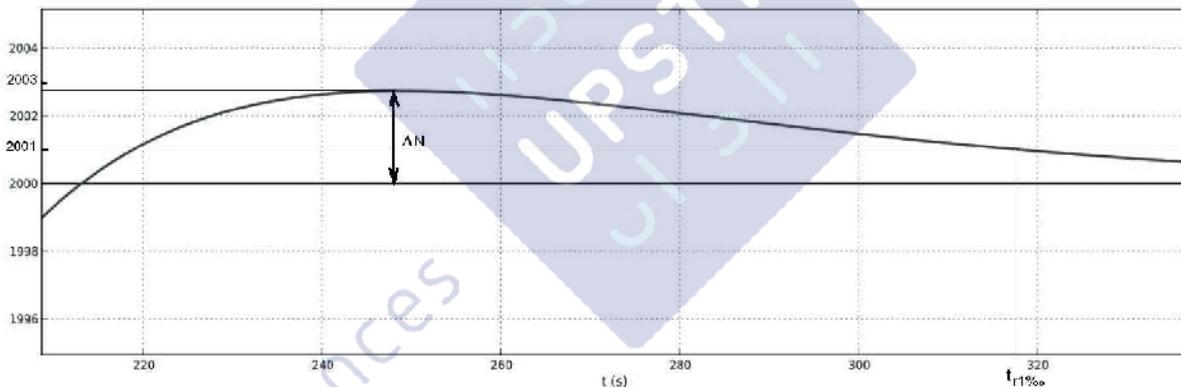


Figure 15 : Réponse de la FTBF à un échelon de 2000 tours/min avec un zoom

$tr_{1\%/00} = 318s$ Le critère est vérifié pour $tr_{1\%/00}$

$\Delta N < 3 \text{ tours / min}$ 0,3% de 2000 tours/min correspond à 6 tours/min : le critère est vérifié pour le dépassement maximum pour la vitesse de tambour.

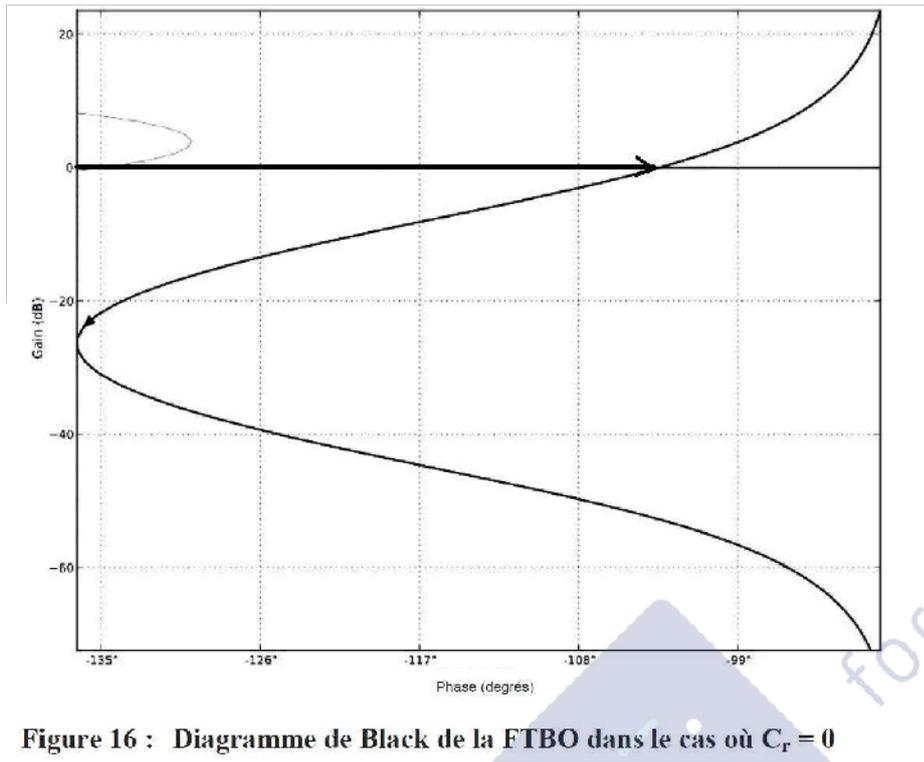


Figure 16 : Diagramme de Black de la FTBO dans le cas où $C_r = 0$

$M\varphi = -104^\circ + 180^\circ = 76^\circ$ Le critère est vérifié pour la marge de phase puisqu'elle est supérieure à 45° .

$MG \rightarrow +\infty$ Le critère est vérifié pour la marge de gain puisqu'elle est supérieure à 7 dB.

Question 22 : conclure quant à la capacité de l'asservissement à vérifier le critère de précision de la vitesse relative.

D'après la figure 17, la vitesse relative tend bien vers 2 tours/min, donc le critère de précision de la vitesse relative est vérifié.

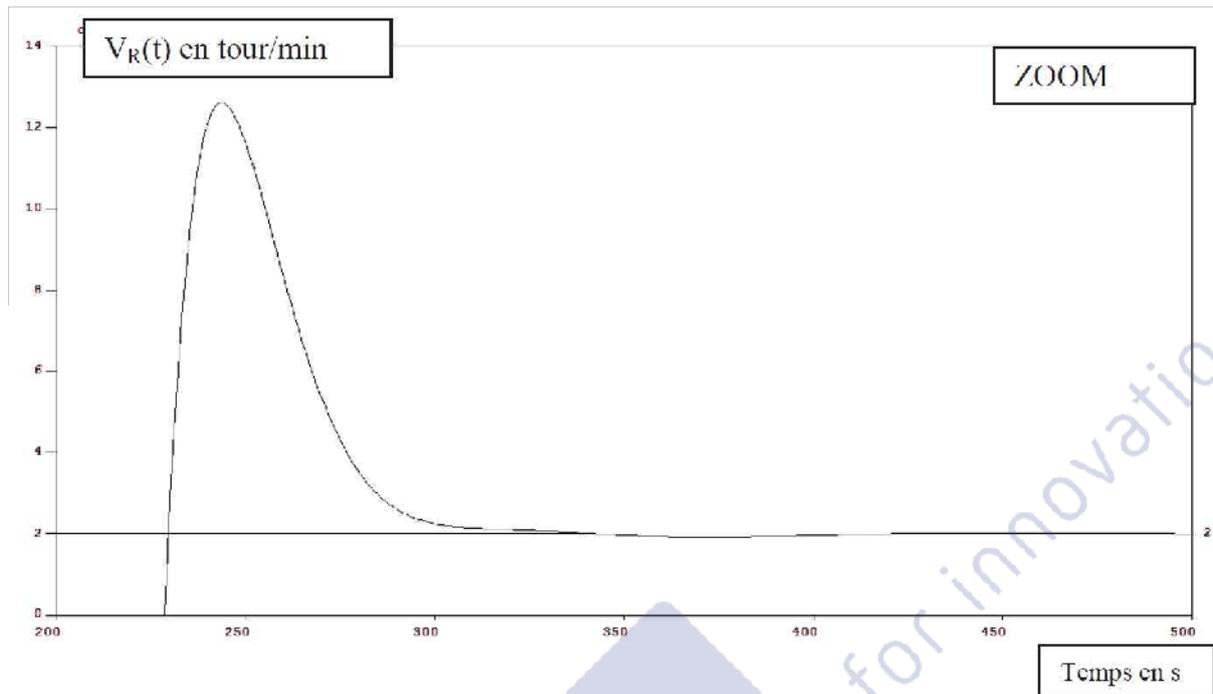


Figure 17 : Lancement du moteur de décalage au bout de 180 s avec une consigne de vitesse relative de 2 tours/min et une consigne de rotation du tambour de 2 000 tours/min

Fin du corrigé