

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2012

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

I. Étude préliminaire de la plateforme utilisée pour le satellite

Q 1. Calculer la vitesse linéaire du centre d'inertie du satellite par rapport au référentiel géocentrique. En déduire la pulsation orbitale $\omega_0 = 2\pi/T$, où T est la période de révolution du satellite autour de la Terre.

On isole le satellite et on applique le théorème de la résultante dynamique :

Soit G le centre d'inertie du satellite : $\overrightarrow{OG} = (R+h)\cdot\vec{z}$

$$m\overrightarrow{\Gamma}_{G,S/T} = -\frac{G.M.m}{(R+h)^2}\cdot\vec{z}$$

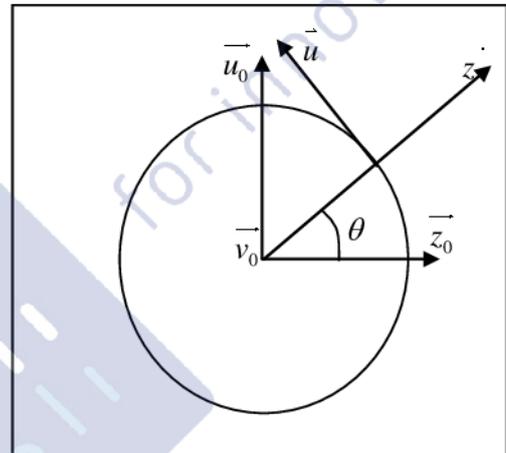
Mouvement circulaire uniforme :

$$\overrightarrow{V}_{G,S/T} = (R+h)\cdot\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G,S/T} = (R+h)\cdot(-\dot{\theta}^2\vec{z} + \ddot{\theta}\vec{u})$$

$$\text{or } \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \|\overrightarrow{\Gamma}_{G,S/T}\| = \frac{\|\overrightarrow{V}_{G,S/T}\|^2}{(R+h)}$$

$$\Rightarrow \frac{G.M}{(R+h)^2} = \frac{\|\overrightarrow{V}_{G,S/T}\|^2}{(R+h)} \Rightarrow \|\overrightarrow{V}_{G,S/T}\| = \sqrt{\frac{G.M}{R+h}} = 7.5.km.s^{-1}$$



La période orbitale est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La distance à parcourir est $d = 2\pi\cdot(R+h)$. En utilisant la vitesse linéaire précédemment établie on obtient :

$$\|\overrightarrow{V}_{G,S/T}\| \cdot T = 2\pi\cdot(R+h) \Rightarrow T = 5920s \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0.001061.rad.s^{-1}$$

Q 2. Calculer la durée pendant laquelle, sur une période de révolution, le satellite est masqué par la Terre et n'est donc pas éclairé par la lumière du Soleil. Vérifier si la capacité du système de batteries est suffisante pour faire face à la consommation du satellite pendant ces intervalles d'obscurité.

Le temps non éclairé sur une période est : $T_{non\ éclairé} = T - T_{éclairage} = 2020s$

Consommation du satellite : $Consommation = T_{non\ éclairé} \cdot I_{max} \cdot N_{circuits} = 14,8.A.h < 15.A.h$.

La capacité du système de batteries est donc suffisante.

II. Modélisation dynamique du système satellite

II.A. Modèle de satellite rigide

Q3. Calculer les composantes du vecteur \dot{Z} dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée au satellite. Pour quelles valeurs des angles de roulis, tangage et lacet a-t-on un « pointage Terre », c'est-à-dire $\dot{Z} = \dot{z}$?

$$\vec{Z} = \cos(\theta) \cdot (\cos(\phi) \cdot \vec{z} + \sin(\phi) \cdot \vec{y}) - \sin(\theta) \cdot \vec{x}$$

$$\dot{Z} = \dot{z} \Leftrightarrow \theta = \phi = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

On a un pointage de la terre si $\theta = \phi = 0$ ou si $\theta = \phi = \pi$, il n'y a pas de contrainte sur ψ .

Q4. Exprimer littéralement, au point G et dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le moment dynamique $\vec{\delta}(G, R_s / R_g)$ à l'ordre un en $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})$ du mouvement du satellite par rapport au référentiel géocentrique.

A l'ordre 1 on a : $\dot{\Omega}(R_s / R_g) = (\dot{\psi}\omega_0 + \dot{\phi})\dot{x} + (\omega_0 + \dot{\theta})\dot{y} + (-\phi\omega_0 + \dot{\psi})\dot{z}$

Comme le moment dynamique est exprimé en G (centre d'inertie du satellite), on obtient l'équation suivante :

$$\vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, R_s / R_G)}{dt} \right|_{R_G}$$

Or $\vec{\sigma}(G, R_s / R_G) = I(G, s) \cdot \vec{\Omega}(R_s / R_G)$ d'après le Théorème de Koenig.

$$\vec{\sigma}(G, R_s / R_G) = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi\omega_0 + \dot{\phi} \\ \omega_0 + \dot{\theta} \\ \dot{\psi} - \phi\omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \\ I_y \cdot (\omega_0 + \dot{\theta}) \\ I_z \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \end{pmatrix}$$

Ainsi on déduit en appliquant la formule de dérivation vectorielle :

$$\vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, R_s / R_G)}{dt} \right|_{R_G} = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, R_s / R_G)}{dt} \right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s / R_G) \wedge \vec{\sigma}(G, R_s / R_G)$$

$$\vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \begin{pmatrix} I_x \cdot (\dot{\psi}\omega_0 + \ddot{\phi}) \\ I_y \cdot \ddot{\theta} \\ I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0) \end{pmatrix}_{R_s} + \begin{pmatrix} (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \\ (\omega_0 + \dot{\theta}) \\ (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \end{pmatrix}_{R_s} \wedge \begin{pmatrix} I_x \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \\ I_y \cdot (\omega_0 + \dot{\theta}) \\ I_z \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \end{pmatrix}_{R_s}$$

$$\text{Soit } \vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \begin{pmatrix} I_x \cdot (\dot{\psi}\omega_0 + \ddot{\phi}) + I_z \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0)(\omega_0 + \dot{\theta}) - I_y \cdot (\omega_0 + \dot{\theta}) \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \\ I_y \cdot \ddot{\theta} + I_x \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) - I_z \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \\ I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0) + I_y \cdot (\omega_0 + \dot{\theta}) \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) - I_x \cdot (\psi\omega_0 + \dot{\phi}) \cdot (\dot{\psi} - \phi\omega_0) \end{pmatrix}_{R_s}$$

En linéarisant au 1^{er} ordre, donc en considérant les termes du second ordre nuls on obtient la solution suivante :

$$\vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \begin{matrix} I_x \cdot (\dot{\psi} \omega_0 + \ddot{\phi}) + (I_z - I_y) \cdot (\omega_0 \dot{\psi} - \omega_0^2 \phi) \\ I_y \cdot \ddot{\theta} \\ I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi} \omega_0) + (I_y - I_x) \cdot (\omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 \psi) \end{matrix}$$

Q 5. En déduire les trois équations scalaires du mouvement faisant intervenir les angles de roulis, tangage et lacet (ϕ, θ, ψ) ainsi que leurs dérivées temporelles $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi})$.

L'application du principe fondamental de la dynamique au satellite et au point G (centre d'inertie) et plus particulièrement le théorème du moment dynamique associé conduit à l'équation suivante :

$\vec{\delta}(G, R_s / R_G) = \vec{M}_G(AME \rightarrow S)$, AME constitue l'ensemble des Actions Mécaniques Extérieures qui s'exercent sur le satellite. En l'occurrence, il n'y en a que 2 :

- Action de la Terre sur le satellite de moment nul en G
- Actions mécaniques extérieures supplémentaires de moment en

$$G : C_x^{ext} \vec{x} + C_y^{ext} \vec{y} + C_z^{ext} \vec{z}$$

Ainsi dans la base R_s nous avons les 3 équations supplémentaires :

$$\begin{cases} \vec{x} : I_x \cdot (\dot{\psi} \omega_0 + \ddot{\phi}) + (I_z - I_y) \cdot (\omega_0 \dot{\psi} - \omega_0^2 \phi) = C_x^{ext} \\ \vec{y} : I_y \cdot \ddot{\theta} = C_y^{ext} \\ \vec{z} : I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi} \omega_0) + (I_y - I_x) \cdot (\omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 \psi) = C_z^{ext} \end{cases}$$

Q 6. On note $\Phi(p), \Psi(p), C_x^{ext}(p), C_z^{ext}(p)$ les transformées de Laplace de $\phi(t), \psi(t), C_x^{ext}(t), C_z^{ext}(t)$ respectivement. Montrer, en prenant des conditions initiales nulles, que l'on peut écrire :

$$H_{\phi x}(p) = \frac{\Phi(p)}{C_x^{ext}(p)} = \frac{k_2 + \beta p^2}{(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2}$$

$$H_{\phi z}(p) = \frac{\Phi(p)}{C_z^{ext}(p)} = \frac{\gamma \cdot p}{(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2}$$

où l'on précisera les expressions de k_1, k_2, α, β et γ en fonction de I_x, I_y, I_z et ω_0 . Tous calculs faits, il est possible de factoriser les dénominateurs de ces deux fonctions de transfert sous la forme suivante (admise) :

$$(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2 = (\omega_0^2 + p^2) \left((I_y - I_z)(I_y - I_x) \omega_0^2 + I_x I_z p^2 \right)$$

Étudier la stabilité des modèles correspondant aux fonctions de transfert $H_{\phi x}(p)$ et $H_{\phi z}(p)$

Les équations de la question précédente conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} I_x \cdot \ddot{\phi} + (I_y - I_z) \cdot \omega_0^2 \phi = C_x^{ext} + (I_y - I_z - I_x) \cdot \dot{\psi} \omega_0 \\ I_z \cdot \ddot{\psi} + (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2 \psi = C_z^{ext} + (I_x - I_y + I_z) \cdot \dot{\phi} \omega_0 \end{cases}$$

En passant dans le domaine de Laplace avec les conditions initiales nulles, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} [I_x \cdot p^2 + (I_y - I_z) \cdot \omega_0^2] \cdot \phi(p) = C_x^{ext}(p) + (I_y - I_z - I_x) \cdot p \cdot \omega_0 \cdot \psi(p) \\ [I_z \cdot p^2 + (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2] \cdot \psi(p) = C_z^{ext}(p) + (I_x - I_y + I_z) \cdot p \cdot \omega_0 \cdot \phi(p) \end{cases}$$

On peut mettre la 1^{ère} et la 3^{ème} équation sous la forme du système suivant.

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \phi(p) = C_x^{ext}(p) + \lambda_2 \cdot \psi(p) & (1) \\ \mu_1 \cdot \psi(p) = C_z^{ext}(p) + \mu_2 \cdot \phi(p) & (2) \end{cases}$$

Pour avoir $H_{\phi_z}(p) = \frac{\phi(p)}{C_z^{ext}(p)}$ on peut appliquer le principe de superposition en

considérant $C_x^{ext}(p) = 0$. Puis dans un second temps il est proposé d'étudier $H_{\phi_x}(p) = \frac{\phi(p)}{C_x^{ext}(p)}$

en considérant $C_z^{ext}(p) = 0$.

- 1^{er} cas : $C_x^{ext}(p) = 0$

- (1) devient $\lambda_1 \cdot \phi(p) = \lambda_2 \cdot \psi(p)$

- (2) devient alors : $(\mu_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \mu_2) \cdot \phi(p) = C_z^{ext}(p)$

- Ainsi on en déduit : $H_{\phi_z}(p) = \frac{\phi(p)}{C_z^{ext}(p)} = \frac{\lambda_2}{\mu_1 \cdot \lambda_1 - \mu_2 \cdot \lambda_2}$

- $H_{\phi_z}(p) = \frac{(I_y - I_z - I_x) \cdot p \cdot \omega_0}{[I_z \cdot p^2 + (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2] \cdot [I_x \cdot p^2 + (I_y - I_z) \cdot \omega_0^2] - (I_x - I_y + I_z) \cdot p \cdot \omega_0 \cdot (I_y - I_z - I_x) \cdot p \cdot \omega_0}$

- $H_{\phi_z}(p) = \frac{(I_y - I_z - I_x) \cdot p \cdot \omega_0}{I_x \cdot I_z \cdot p^4 + \omega_0^2 \cdot p^2 \cdot [I_z \cdot (I_y - I_z) + I_x \cdot (I_y - I_x) + (I_x - I_y + I_z)^2] + (I_y - I_x) \cdot (I_y - I_z) \cdot \omega_0^4}$

- Le résultat doit être de la forme suivante :

- $H_{\phi_z}(p) = \frac{\gamma \cdot p}{(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2}$

- 2^{ème} cas : $C_z^{ext}(p) = 0$

- (2) devient $\mu_1 \cdot \phi(p) = \mu_2 \cdot \psi(p)$

- (1) devient alors : $(\lambda_1 \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} - \lambda_2) \cdot \phi(p) = C_x^{ext}(p)$

- Ainsi on en déduit : $H_{\phi_x}(p) = \frac{\phi(p)}{C_x^{ext}(p)} = \frac{\mu_2}{\lambda_1 \cdot \mu_1 - \lambda_2 \cdot \mu_2}$

- $H_{\phi_x}(p) = \frac{I_z \cdot p^2 + (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2}{I_x \cdot I_z \cdot p^4 + \omega_0^2 \cdot p^2 \cdot [I_z \cdot (I_y - I_z) + I_x \cdot (I_y - I_x) + (I_x - I_y + I_z)^2] + (I_y - I_x) \cdot (I_y - I_z) \cdot \omega_0^4}$

- Le résultat doit être de la forme suivante :

$$\circ H_{\phi x}(p) = \frac{k_2 + \beta p^2}{(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2}$$

- Ainsi par identification, on trouve les résultats suivants :

$$\circ \begin{cases} k_1 = (I_y - I_z) \cdot \omega_0^2 \\ k_2 = (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2 \\ \alpha = I_x \\ \beta = I_z \\ \gamma = (I_y - I_x - I_z) \cdot \omega_0 \end{cases}$$

On admet la factorisation suivante du dénominateur :

$$(k_1 + \alpha p^2) \cdot (k_2 + \beta p^2) + \gamma^2 \cdot p^2 = [I_x I_z \cdot p^2 + (I_y - I_z) \cdot (I_y - I_x) \cdot \omega_0^2] \cdot (\omega_0^2 + p^2)$$

Les 4 racines associées sont alors :

$$\left[j\omega_0; -j\omega_0; j\omega_0 \sqrt{\frac{(I_y - I_z) \cdot (I_y - I_x)}{I_x I_z}}; -j\omega_0 \sqrt{\frac{(I_y - I_z) \cdot (I_y - I_x)}{I_x I_z}} \right] \text{ car } I_y > I_x \text{ et } I_y > I_z \text{ dans le}$$

cas de l'étude.

Etude la stabilité :

On peut remarquer qu'il s'agit de racines imaginaires purs donc le système est quasi instable (ou juste stable). Pour une entrée bornée, la sortie l'est également car le système est oscillant en l'absence de perturbations extérieures.

En revanche, la sortie ne converge pas vers une valeur constante.

Q7. Montrer que le moment de l'action de la Terre sur le volume V du satellite peut s'exprimer en G par :

$$M_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -G \frac{M}{\|OG\|^3} \iiint_V (\|OG\| - 3 \cdot GP \cdot \vec{Z}) GP \wedge \vec{Z} \cdot dm$$

On utilisera pour cela sans démonstration le développement limité suivant :

$$\|\vec{Z} + \varepsilon \vec{a}\|^n = 1 + n\varepsilon \vec{Z} \cdot \vec{a} + o(\varepsilon) \text{ où } \vec{a} \text{ est un vecteur arbitraire, } n \text{ un entier relatif quelconque et } \varepsilon \text{ un scalaire petit devant 1.}$$

L'action mécanique exercée par la terre sur le satellite est en réalité un gradient de pesanteur de la forme suivante :

$$\left\{ \tau_{(\text{Terre} \rightarrow dm)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -G \frac{M dm}{\|OP\|^3} \cdot \overrightarrow{OP} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

On applique la définition du moment associé à cette densité volumique de force :

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = \iiint_V \left(\vec{GP} \wedge -G \frac{M dm}{\|\vec{OP}\|^3} \cdot \vec{OP} \right) = -GM \iiint_V \left(\vec{GP} \wedge \frac{dm}{\|\vec{OG} + \vec{GP}\|^3} \cdot (\vec{OG} + \vec{GP}) \right)$$

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -GM \iiint_V \left((\vec{GP}) \wedge \|\vec{OG} + \vec{GP}\|^{-3} dm \cdot \vec{OG} \right)$$

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -GM \iiint_V \left((\vec{GP}) \wedge \|\vec{OG}\|^{-3} \cdot \left\| \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} + \frac{\vec{GP}}{\|\vec{OG}\|} \right\|^3 dm \cdot \vec{OG} \right)$$

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -\frac{GM}{\|\vec{OG}\|^3} \iiint_V \left((\vec{GP}) \wedge \left\| \vec{Z} + \frac{\vec{GP}}{\|\vec{OG}\|} \right\|^3 dm \cdot \vec{OG} \right)$$

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -\frac{GM}{\|\vec{OG}\|^3} \iiint_V \left(\vec{GP} \wedge (\|\vec{OG}\| - 3 \cdot \vec{GP} \cdot \vec{Z}) dm \cdot \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|} \right)$$

$$\vec{M}_G(\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}) = -\frac{GM}{\|\vec{OG}\|^3} \iiint_V (\|\vec{OG}\| - 3 \cdot \vec{GP} \cdot \vec{Z}) (\vec{GP} \wedge \vec{Z}) dm \quad \text{CQFD}$$

Q 8. Dédurre des équations obtenues à la question 5 les équations vérifiées par les angles de roulis, tangage et lacet dans le cas de la prise en compte du « gradient de pesanteur ».

Étudier la stabilité du modèle correspondant à la fonction de transfert : $H_{\theta_y}(p) = \frac{\Theta(p)}{C_y^{ext}(p)}$

où $\Theta(p)$ et $C_y^{ext}(p)$ sont les transformées de Laplace de $\vartheta(t)$ et $C_y^{ext}(t)$ respectivement. En supposant que l'étude de stabilité faite à la question 6 est encore valable ici, conclure à propos du choix de la géométrie du satellite.

On rappelle les équations de la question 5 pour laquelle les actions mécaniques de pesanteur avaient un moment nul sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{x} : I_x \cdot (\dot{\psi}\omega_0 + \ddot{\phi}) + (I_z - I_y) \cdot (\omega_0\dot{\psi} - \omega_0^2\phi) = C_x^{ext} \\ \vec{y} : I_y \cdot \ddot{\theta} = C_y^{ext} \\ \vec{z} : I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0) + (I_y - I_x) \cdot (\omega_0\dot{\phi} + \omega_0^2\psi) = C_z^{ext} \end{cases}$$

A ces équations, on rajoute au PFD effectué à la question 5 le moment précédemment calculé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{x} : I_x \cdot (\dot{\psi}\omega_0 + \ddot{\phi}) + (I_z - I_y) \cdot (\omega_0\dot{\psi} - \omega_0^2\phi) = C_x^{ext} + 3 \cdot \omega_0^2 \phi \cdot (I_z - I_y) \\ \vec{y} : I_y \cdot \ddot{\theta} = C_y^{ext} - 3 \cdot \omega_0^2 \theta \cdot (I_x - I_z) \\ \vec{z} : I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0) + (I_y - I_x) \cdot (\omega_0\dot{\phi} + \omega_0^2\psi) = C_z^{ext} \end{cases}$$

On traduit l'équation selon \vec{y} dans le domaine de Laplace, en considérant les CI nulles :

$$I_y \cdot \theta(p) \cdot p^2 + 3 \cdot \omega_0^2 \cdot (I_x - I_z) \cdot \theta(p) = C_y^{ext}$$

Ainsi on en déduit l'équation suivante :

$$H_{\theta_y}(p) = \frac{\theta(p)}{C_y^{ext}} = \frac{1}{I_y \cdot p^2 + 3 \cdot \omega_0^2 \cdot (I_x - I_z)}$$

$H_{\theta_y}(p)$ est une fonction du 2nd ordre qui peut être mise sous la forme canonique suivante :

$$H_{\theta_y}(p) = \frac{1}{3 \cdot \omega_0^2 \cdot (I_x - I_z)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I_y}{3 \cdot \omega_0^2 \cdot (I_x - I_z)} \cdot p^2}$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas d'amortissement pour ce 2nd ordre.

Les choix de géométrie effectués ($I_y > I_x > I_z$) permettent d'avoir 2 racines complexes conjuguées à partie réelle nulle.

D'après l'étude de stabilité faite à la question 6, on remarque que le système est quasi instable (ou juste stable). Pour une entrée bornée, la sortie l'est également car le système est oscillant en l'absence de perturbations extérieures.

En revanche, la sortie ne converge pas vers une valeur constante.

NB : Si l'on souhaite que le système devienne stable, il est nécessaire d'introduire de l'amortissement (oscillations amorties convergentes vers une valeur constante)

II.B. Actionneurs utilisés pour le contrôle d'attitude

II.B.1. Principe de fonctionnement d'une roue de réaction

Q 9. En supposant que les composantes $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ et leurs dérivées temporelles sont négligeables devant $\omega_r(t)$ et $\dot{\omega}_r(t)$ respectivement, déduire de l'application du théorème du moment dynamique l'équation scalaire du mouvement vérifiée par $\omega_r(t)$. Grâce à cette équation, exprimer, en fonction de I_{ry} et $\dot{\omega}_r(t)$, le moment exercé par la roue sur le satellite.

Les différentes actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur la roue sont :

- Action de la Terre : $\left\{ \tau_{(Terre \rightarrow roue)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -G \frac{Mm_r}{(R+h)^2} \cdot \vec{Z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_r}$

- Action de la liaison pivot parfaite d'axe (G_r, \vec{y}) entre la roue et le satellite :

$$\left\{ \tau_{(Satellite \rightarrow roue)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_l(t) \\ \vec{C}_l(t) \end{array} \right\}_{G_r}, \Rightarrow \vec{C}_l(t) \cdot \vec{y} = 0$$

- Action du stator (satellite) sur le rotor (roue) : $\left\{ \tau_{(stator \rightarrow rotor)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (C_m(t) - C_f(t)) \vec{y} \end{array} \right\}_{G_r},$

on suppose $C_f(t) = -f \cdot \omega_r(t)$

On applique le théorème du moment dynamique au point G_r à la roue en projection sur l'axe (G_r, \vec{y}) :

$$\vec{\delta}(G_r, R_r / R_G) \cdot \vec{y} = \overline{M}_{G_r}(\text{AME} \rightarrow R_r) \cdot \vec{y} = C_m(t) - f \cdot \omega_r(t)$$

$$\text{on a : } \vec{\Omega}(R_r / R_G) = \vec{\Omega}(R_r / R_s) + \vec{\Omega}(R_s / R_G) = \Omega_x \vec{x} + (\Omega_y + \omega_r) \vec{y} + \Omega_z \vec{z}$$

Comme le moment dynamique est exprimé en G_r (centre d'inertie de la roue), on obtient l'équation suivante :

$$\dot{\vec{\delta}}(G_r, R_r / R_G) = \frac{d\vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G)}{dt} \Big|_{R_G}$$

Or $\vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G) = I(G_r, R_r) \cdot \vec{\Omega}(R_r / R_G)$ d'après le Théorème de Koenig.

$$\vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G) = \begin{pmatrix} I_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y + \omega_r \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{rx} \cdot \Omega_x \\ I_{ry} \cdot (\Omega_y + \omega_r) \\ I_{rz} \cdot \Omega_z \end{pmatrix}$$

Ainsi on déduit en appliquant la formule de dérivation vectorielle :

$$\vec{\delta}(G_r, R_r / R_G) \cdot \vec{y} = \frac{d\vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G)}{dt} \Big|_{R_G} \cdot \vec{y} = \frac{d\vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G)}{dt} \Big|_{R_s} \cdot \vec{y} + \vec{\Omega}(R_s / R_G) \wedge \vec{\sigma}(G_r, R_r / R_G) \cdot \vec{y}$$

$$\dot{\vec{\delta}}(G_r, R_r / R_G) \cdot \vec{y} = I_{ry} \cdot (\dot{\Omega}_y + \dot{\omega}_r) + \begin{vmatrix} \Omega_x & I_{rx} \cdot \Omega_x \\ \Omega_y \wedge & I_{ry} \cdot (\Omega_y + \omega_r) \\ \Omega_z & I_{rz} \cdot \Omega_z \end{vmatrix} \Big|_{R_s} \cdot \vec{y} = I_{ry} \cdot (\dot{\Omega}_y + \dot{\omega}_r) + (I_{rz} - I_{rx}) \cdot \Omega_z \cdot \Omega_x$$

Dans cette question on suppose $\dot{\Omega}_y \ll \dot{\omega}_r$ et $\Omega_z \cdot \Omega_x \ll \omega_r$. Ainsi on trouve l'équation de mouvement suivante : $I_{ry} \cdot \dot{\omega}_r(t) = C_m(t) - f \cdot \omega_r(t)$

L'application du théorème du moment dynamique au point G_r à la roue conduit à :

$$\vec{\delta}(G_r, R_r / R_G) = \vec{C}_l(t) + (C_m(t) - C_f(t)) \vec{y} = \vec{C}_l(t) + I_{ry} \cdot \dot{\omega}_r(t) \cdot \vec{y} = \overline{M}_{G_r}(\text{satellite} \rightarrow \text{roue})$$

$\overline{M}_{G_r}(\text{roue} \rightarrow \text{satellite}) = -\vec{C}_l(t) - I_{ry} \cdot \dot{\omega}_r(t) \cdot \vec{y}$ (avec $\vec{C}_l(t) \cdot \vec{y} = 0$) d'après le principe des actions mutuelles.

Q 10. En partant de conditions initiales nulles, déterminer, en fonction de I_y et I_{ry} , la relation entre la vitesse de rotation autour de l'axe \vec{y} du satellite $\dot{\theta}(t)$ et la vitesse de rotation de la roue $\omega_r(t)$. On utilisera pour cela l'une des équations déterminées dans la question 5, en supposant pour simplifier que le torseur des actions mécaniques supplémentaires $\{\tau_{(\text{extérieur} \rightarrow \text{satellite})}\}$ ne comporte que l'action de la roue sur le satellite (on négligera donc toutes les autres actions, perturbatrices, exercées sur le satellite) et que les axes (G, \vec{y}) et (G_r, \vec{y}) sont confondus. On supposera de plus que le coefficient de frottement fluide, entre le stator et le rotor de la roue de réaction, est nul : $f = 0$.

A la question 5, on a vu : $\overline{\delta}(G, R_s / R_G) = \overline{M}_G(AME \rightarrow S)$ ce qui conduit

$$\text{à : } \begin{cases} \overline{x} : I_x \cdot (\dot{\psi}\omega_0 + \ddot{\phi}) + (I_z - I_y) \cdot (\omega_0\dot{\psi} - \omega_0^2\phi) = C_x^{ext} \\ \overline{y} : I_y \cdot \ddot{\theta} = C_y^{ext} \\ \overline{z} : I_z \cdot (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\omega_0) + (I_y - I_x) \cdot (\omega_0\dot{\phi} + \omega_0^2\psi) = C_z^{ext} \end{cases}$$

On suppose que les axes (G, \overline{y}) et (G_r, \overline{y}) sont confondus, donc on a

$$\overline{\delta}(G, R_s / R_G) = \overline{\delta}(G_r, R_r / R_G)$$

Aussi en projetant les résultats de la question 9 et 5 sur l'axe (G_r, \overline{y}) on obtient

$$\text{alors : } I_y \cdot \ddot{\theta} = -I_{ry} \cdot \dot{\omega}_r(t)$$

On peut intégrer l'équation précédente en considérant les CI nulles et on obtient :

$$I_y \cdot \dot{\theta} = -I_{ry} \cdot \omega_r(t)$$

Q 11. Justifier l'intérêt de disposer deux roues de réaction selon l'axe \overline{y} plutôt qu'une seule.

- L'utilisation de 2 roues de réaction est l'illustration du principe de redondance largement utilisé dans l'industrie qui consiste à sécuriser le fonctionnement d'un système avec l'utilisation « en parallèle » de 2 solutions techniques identiques. En effet, il serait dommage de perdre un satellite car une roue de réaction tombe en panne.
- Le moment d'inertie selon l'axe (G_r, \overline{y}) étant le plus important, il est peut-être privilégié de mettre en place 2 roues selon cet axe central d'inertie. En effet, du fait de la différence des moments d'inerties des axes principaux, le composant de correction d'attitude selon (G_r, \overline{y}) risque de faire office de fusible s'il n'est pas redondé.

II.B.2. Dimensionnement des roues de réaction

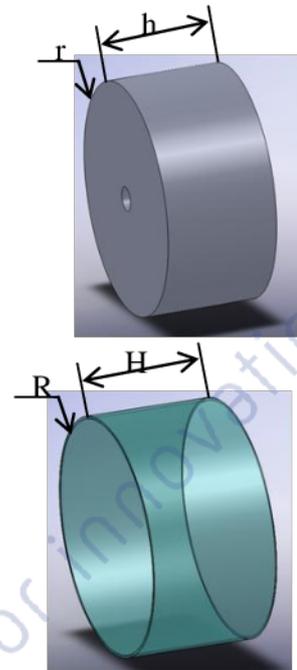
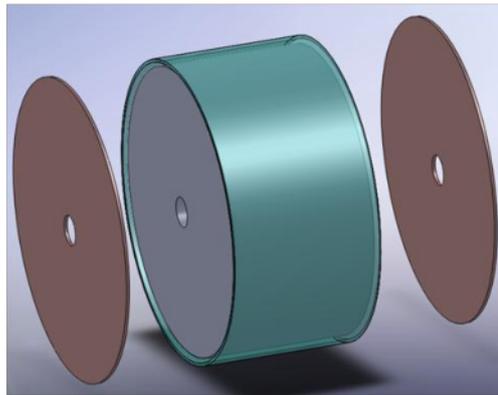
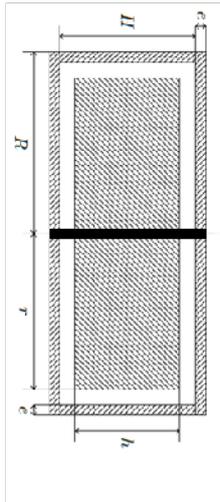
Q 12. Montrer que la masse totale de la roue de réaction (guidage et motorisation exclus) peut s'écrire à l'ordre 1 en e et j comme :

$$m_t = \frac{2 \cdot I_a}{r^2} + 2 \cdot \rho_c \cdot \pi \cdot e \cdot r \cdot (H + r)$$

On rappelle que le moment d'inertie I_{ac} d'un cylindre plein, de masse m_c et de rayon r_c , par

$$\text{rapport à son axe est } I_{ac} = \frac{1}{2} m_c r_c^2.$$

Le paramétrage conduit à la représentation géométrique suivante où un cylindre autour de l'axe de rotation a été ajouté afin de faciliter la compréhension. Cet ajout n'est pas à prendre en compte dans les calculs demandés dans cette question.



Soient :

- m_t , la masse totale de la roue de réaction
- m_r , la masse de la roue (cylindre en polyuréthane de rayon r et de hauteur h)
- m_{cyl} , la masse du cylindre tubulaire du carter (tube en acier de masse volumique $\rho_c = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ de rayon extérieur R , d'épaisseur e et de hauteur H)
- m_{pla} , la masse d'une plaque du carter (cylindre en acier de rayon R et d'épaisseur e)

On trouve aisément la relation suivante :

$$m_t = m_r + m_{cyl} + 2.m_{pla}$$

Il est rappelé que le moment d'inertie d'un cylindre plein de masse m_c et de rayon r_c par rapport à son axe d'inertie est $I_a = \frac{1}{2} m_c r_c^2$. On applique cette relation à la roue, aussi on en

$$\text{déduit : } m_r = \frac{2.I_a}{r^2}$$

La masse du cylindre tubulaire est définie par la relation suivante :

$$m_{cyl} = \rho_c \cdot \pi \cdot (R^2 - (R - e)^2) \cdot H$$

La masse d'une plaque du carter est définie par la relation suivante :

$$m_{pla} = \rho_c \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e$$

Ainsi on en déduit la relation de la masse totale suivante :

$$m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + \rho_c \cdot \pi \cdot (R^2 - (R - e)^2) \cdot H + 2 \cdot \rho_c \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e = \frac{2.I_a}{r^2} + \rho_c \cdot \pi \cdot ((2.e.R - e^2) \cdot H + 2.R^2 \cdot e)$$

Le jeu radial au niveau du carter est défini par la relation $j = R - e - r \Rightarrow R = j + e + r$

$$\Rightarrow m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + \rho_c \cdot \pi \cdot ((2.e \cdot (j + e + r) - e^2) \cdot H + 2 \cdot (j + e + r)^2 \cdot e)$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + \rho_c \cdot \pi \cdot ((2.e \cdot j + 2.e^2 + 2.e \cdot r - e^2) \cdot H + 2 \cdot (r^2 + (j + e)^2 + 2 \cdot r \cdot (j + e)) \cdot e)$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + \rho_c \cdot \pi \cdot \left(e \cdot (e + 2 \cdot j + 2 \cdot r) \cdot H + 2 \cdot (r^2 + (j + e)^2 + 2 \cdot r \cdot (j + e)) \cdot e \right), \text{ avec } e + 2 \cdot j \ll 2 \cdot r \text{ et } (j + e)^2 + 2 \cdot r \cdot (j + e) \ll r^2 \text{ car hypothèse de linéarisation à l'ordre 1 en } e \text{ et } j.$$

Ainsi on trouve la relation demandée :

$$m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + 2 \cdot \rho_c \cdot \pi \cdot e \cdot r \cdot (H + r)$$

Q 13. Montrer que cette masse totale m_t est minimale pour une valeur spécifique de r que l'on déterminera à l'aide de l'abaque donnée figure A du document réponse. Calculer la masse m_t ainsi que les dimensions h et R des différents composants de la roue de réaction.

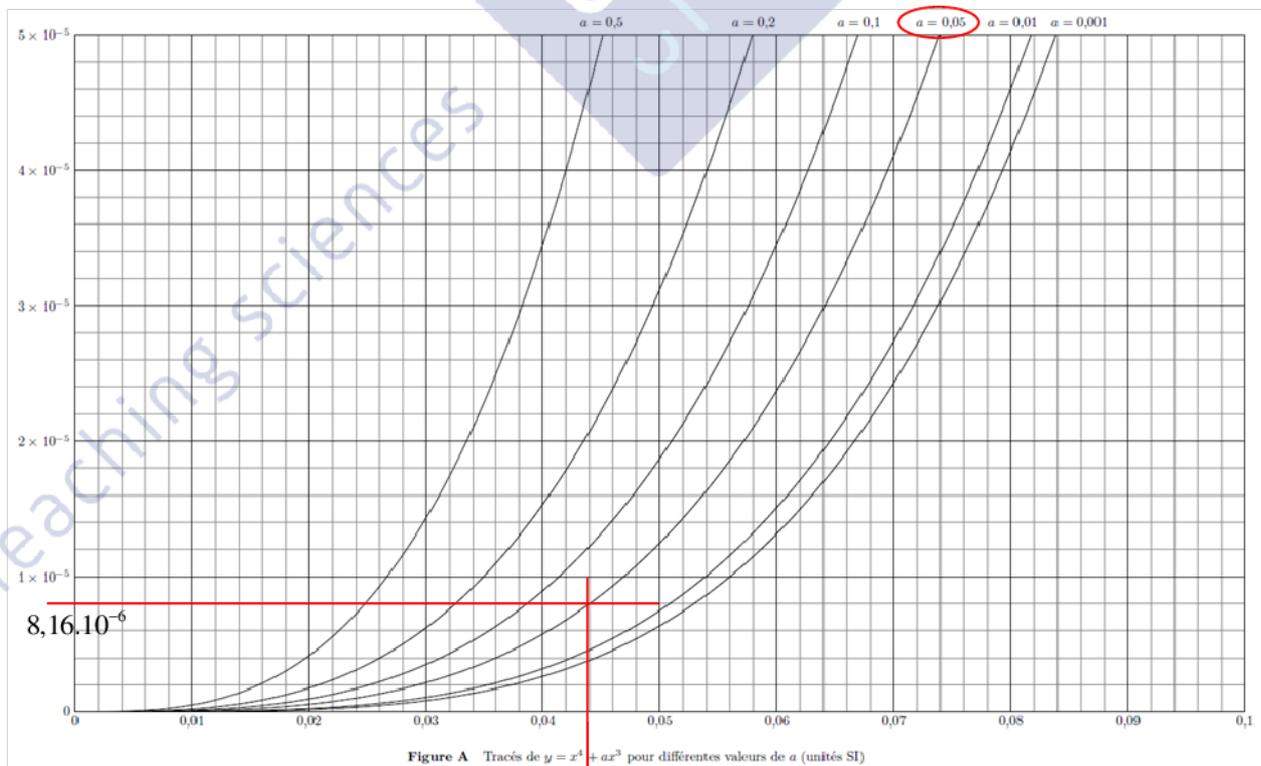
La masse totale est minimale pour chaque valeur de r sssi :

$$\frac{\partial m_t}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow -\frac{4.I_a}{r^3} + 2 \cdot \rho_c \cdot \pi \cdot e \cdot (H + 2r) = 0 \Leftrightarrow -4.I_a + 2 \cdot \rho_c \cdot \pi \cdot e \cdot (H \cdot r^3 + 2 \cdot r^4) = 0$$

$$\frac{\partial m_t}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow r^4 + \frac{H}{2} \cdot r^3 = \frac{2.I_a}{\rho_c \cdot \pi \cdot e} \text{ de la forme } r^4 + a \cdot r^3 = b$$

En effectuant les applications numériques, on trouve :

$$\begin{cases} a = \frac{H}{2} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{2} = 0.05 \text{ m} \\ b = \frac{I_a}{\rho_c \cdot \pi \cdot e} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{7800 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{39000 \cdot \pi} = 8,16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{cases}$$



X=0.044m

A l'aide de l'abaque fourni en document réponse on trouve la valeur $r = 44 \text{ mm}$ telle que cette masse totale est minimale.

Ainsi il est possible de déterminer la masse m_t mini suivante :

$$m_t = \frac{2.I_a}{r^2} + 2.\rho_c.\pi.e.r.(H+r) = \frac{2*4.10^{-4}}{(44.10^{-3})^2} + 2*7800*\pi*2.10^{-3}*44.10^{-3}*(100.10^{-3} + 44.10^{-3})$$

$$m_t = \frac{8.10^{-4}}{(0.044)^2} + 2*7800*\pi*88.10^{-9}*144 = 0.413 + 0.621 = 1.034 \text{ kg}$$

La masse de la roue est de l'ordre d'un kilogramme.

Il reste à déterminer les dimensions h et R .

Pour cela le jeu radial est défini par la relation :

$$j = R - e - r = 2 \text{ mm} \Rightarrow R = j + e + r = 44 + 2 + 2 = 48 \text{ mm}$$

On rappelle que la masse de la roue est définie par la relation $m_r = \frac{2.I_a}{r^2}$. Or on sait que sa

géométrie est un cylindre de rayon r et de hauteur h .

On en déduit alors la relation suivante :

$$m_r = \frac{2.I_a}{r^2} = \rho_r.\pi.r^2.h \Leftrightarrow h = \frac{2.I_a}{\rho_r.\pi.r^4} = \frac{2*4.10^{-4}}{1140.\pi.(0.044)^4} = 59.6 \text{ mm}$$

Q 14. Quelle est, en définitive, la vitesse de rotation maximale (en $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$) à laquelle pourra tourner la roue de réaction? En déduire, à l'aide du cahier des charges de la figure 7, le couple moteur $C_m(t)$ maximal autorisé, ce qui permettra au final de choisir le moteur le plus adapté pour piloter la roue de réaction.

Afin d'éviter la rupture de la roue en polyuréthane (de limite d'élasticité $\sigma_e = 9 \text{ MPa}$), il est imposé que la contrainte maximale ne soit pas dépassée dans le cas où les effets centrifuges constituent le cas dimensionnant.

Ainsi, la relation suivante doit être respectée :

$$\sigma = \frac{7}{16}.\rho_r.\omega_r^2.r^2 \leq \sigma_e = 9 \text{ MPa} \Leftrightarrow \omega_r^2 \leq \frac{16.\sigma_e}{7.\rho_r.r^2} \Leftrightarrow \omega_r^2 \leq \frac{16*9.10^6}{7*1140*(0.044)^2} \Leftrightarrow \omega_r \leq 3053 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{On en déduit alors } N_{r,\text{max}} = \frac{30*3053}{\pi} = 29154 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$$

Ainsi, le critère dimensionnant la vitesse de rotation de la roue est le choix de technologie effectué et non les actions liées aux effets centrifuges.

D'après le Cdcf la puissance maxi consommée autorisée est $P_{\text{Max}} = 1,5 \text{ W}$. Or la vitesse de rotation maximale est de $2800 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Ainsi on en déduit le couple maximal

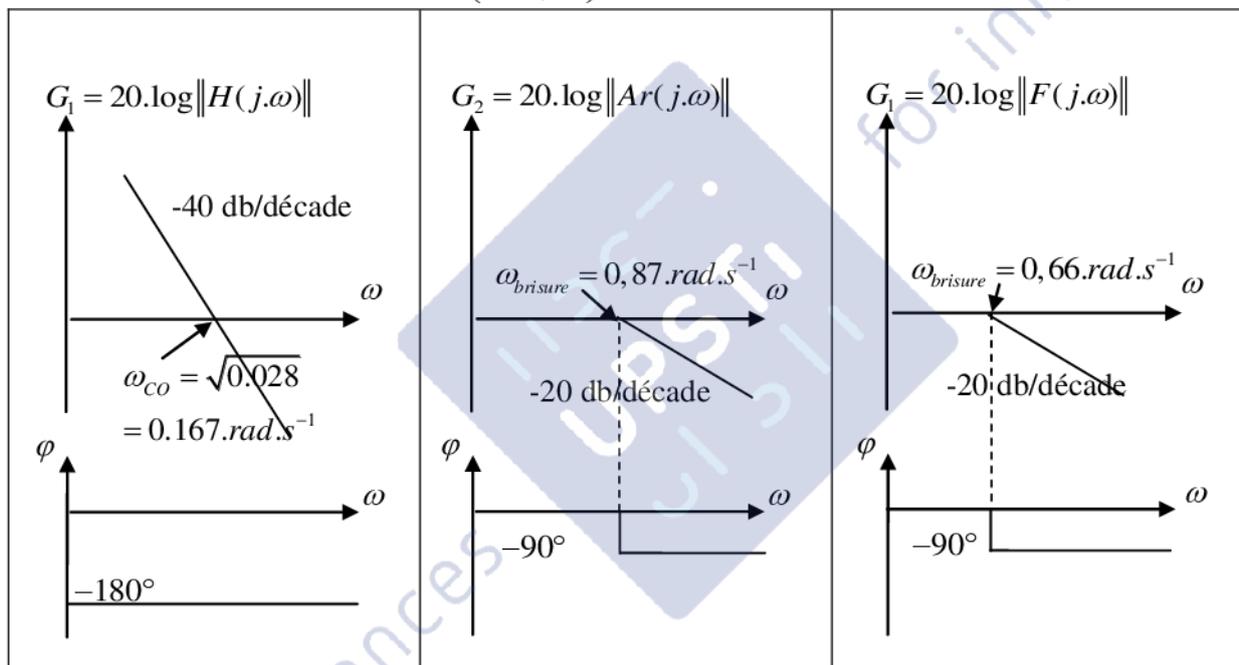
$$C_{m\text{Max}}(t) = \frac{P_{\text{Max}}.30}{\pi.N} = \frac{1.5*30}{\pi*2800} = 0.0051 \text{ N}\cdot\text{m}$$

III. Contrôle d'attitude du satellite

III.A. Choix d'un modèle de commande et analyses préliminaires

Q 15. La figure B du document réponse donne le diagramme de Bode de la fonction $Ar(p)H(p)F(p)$. Tracer directement sur cette figure les diagrammes asymptotiques associés à cette fonction (document réponse à rendre avec la copie).

$$H_{BO}(p) = A_r(p).H(p).F(p) = \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{0,87}\right) \cdot (1 + 1,5.p)}$$



Nota : $20.\log\|H(j0,1)\| = 20.\log\frac{0,028}{0,01} = 8,94 \approx 9dB$

On obtient le diagramme asymptotique de H_{BO} :

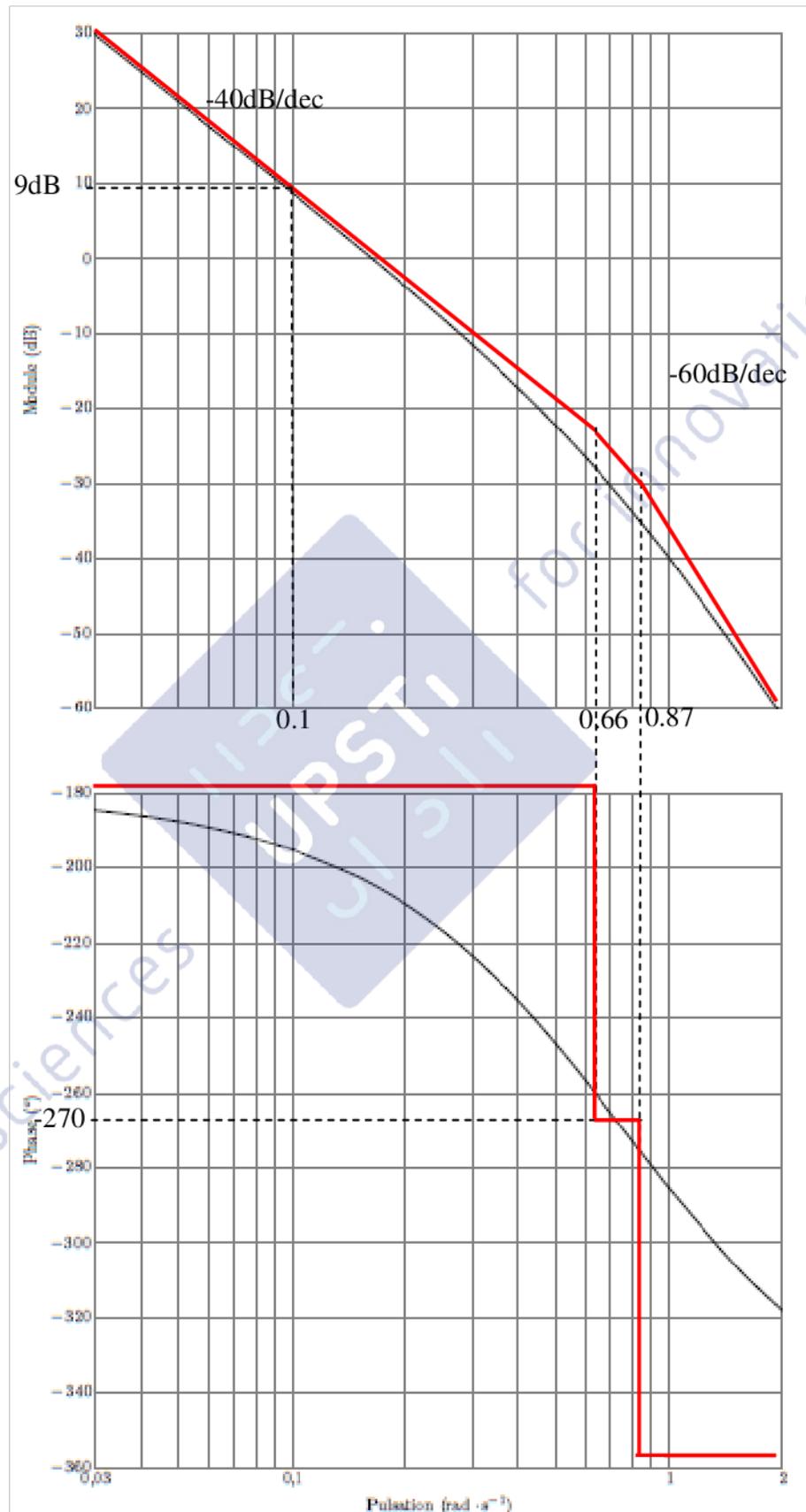
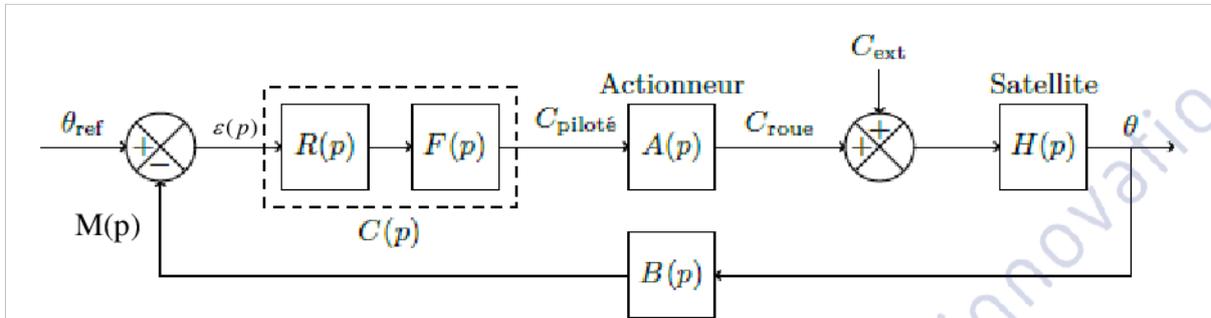


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $A_+(p)W(p)F(p)$

Q 16. En prenant $R(p) = 1$, préciser la fonction de transfert en boucle ouverte et tracer les diagrammes de Bode réels (5 ou 6 points judicieusement choisis suffisent pour ces tracés) sur la figure B. Au regard des tracés effectués, justifier que des corrections proportionnelle ou proportionnelle-intégrale ne permettent pas d'assurer le cahier des charges escompté.



Soit $M(p)$ l'image de l'angle mesuré à comparer avec l'angle de consigne et $\varepsilon(p)$ l'écart correspondant.

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = A(p).H(p).F(p).B(p)$$

$$FTBO(p) = Ar(p).e^{-0,1p}.H(p).F(p).e^{-0,7p}$$

$$FTBO(p) = \frac{0,028}{p^2 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{0,87}\right) \cdot (1 + 1,5.p)}_{\text{déjà tracé Q15}}} \cdot e^{-0,8p}$$

Tracé du retard :

Tracé du gain :

Soit $R_T(p) = e^{-0,8.p}$, $20.\log\|R_T(j.\omega)\| = 1 \forall \omega$ donc le diagramme de gain ne sera pas modifié.

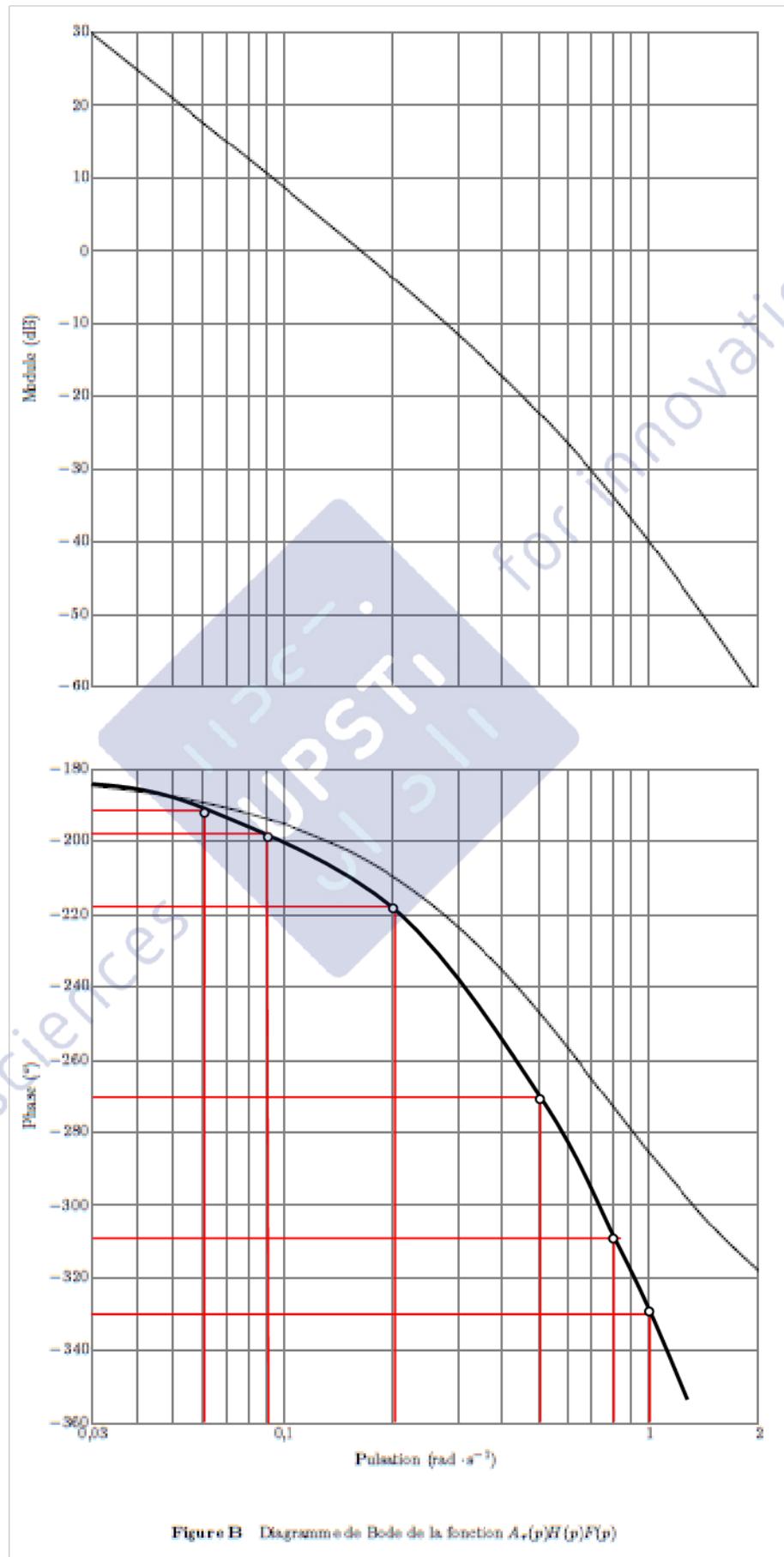
Tracé de la phase :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\text{Arg}(R_T(j\omega))) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\text{Arg}(R_T(j\omega))) = -\infty$$

ω	0.06	0.09	0.2	0.5	0.8	1
$\text{Arg}(RT(j\omega))$ $= -0,8.\omega.\text{rad}$	-0,048 rad	-0,072 rad	-0,16 rad	-0,4 rad	-0,64 rad	-0,8 rad
$\text{Arg}(RT(j\omega))$ en degrés	-2,75°	-4,12°	-9,16°	-22,9°	-36,7°	-45,8°
$\text{Arg}(Ac(p).H(p).F(p))$	-184°	-192°	-209°	-246°	-272°	-285°
φ_{Total}	-186,75°	-196,1°	-218,2°	-268,9°	-308,7°	-330,8°

On obtient le diagramme asymptotique de H_{BO} :



Au regard des tracés effectués, justifier que des corrections proportionnelle ou proportionnelle intégrale ne permettent pas d'assurer le cahier des charges escompté.

Un correcteur proportionnel diminue la stabilité.

Un correcteur PI est un filtre passe-bas utilisé pour améliorer la précision en augmentant le gain en boucle ouverte (correction en basses fréquences) de façon à ne pas modifier les marges de stabilité.

On remarque que le diagramme de phase de $FTBO(j\omega)$ est en dessous de -180° .

La marge de phase est donc négative.

Les marges de stabilité ne seront jamais respectées avec ces deux correcteurs.

Q 17. En déduire les conditions sur le module et l'argument de $R(j\omega)$ pour assurer la pulsation de coupure et la marge de phase demandées par le cahier des charges associé au modèle nominal.

Le cahier des charges impose :

$$\omega_{C(0dB)} = 0,13 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$M\varphi \geq 30^\circ$$

Méthode graphique :

On utilise les diagrammes de Bode tracés précédemment de la FTBO.

On lit pour la FTBO non corrigée :

$$20 \log \| FTBO_{\text{non corrigée}}(j\omega_{C(0dB)}) \| = 6dB$$

$$\text{Arg}(FTBO_{\text{non corrigée}}(j\omega_{C(0dB)})) = -205^\circ$$

D'où les conditions que doit imposer le régulateur $R(p)$:

$$M\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(FTBO_{\text{corrigée}}(j\omega_{C(0dB)}))$$

$$\Rightarrow M\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(FTBO_{\text{non corrigée}}(j\omega_{C(0dB)})) + \text{Arg}(R(j\omega_{C(0dB)}))$$

$$\Rightarrow 30^\circ = 180^\circ - 205^\circ + \text{Arg}(R(j\omega_{C(0dB)}))$$

$$\text{Arg}(R(j\omega_{C(0dB)})) = 55^\circ$$

De même :

$$20 \log \| FTBO_{\text{corrigée}}(j\omega_{C(0dB)}) \| = 0dB$$

$$\Rightarrow 20 \log \| FTBO_{\text{non corrigée}}(j\omega_{C(0dB)}) \| + 20 \log \| R(j\omega_{C(0dB)}) \| = 0dB$$

$$\Rightarrow 6dB + 20 \log \| R(j\omega_{C(0dB)}) \| = 0dB$$

$$20 \log \| R(j\omega_{C(0dB)}) \| = -6dB$$

Méthode calculatoire :

On a

$$FTBO_{non\ corrigée}(p) = \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot p\right) \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot e^{-0,8 \cdot p}$$

$$FTBO_{corrigée}(p) = \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot p\right) \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot e^{-0,8 \cdot p} \cdot R(p)$$

On veut $\omega_{C(0dB)} = 0,13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $\|FTBO_{corrigée}(j \cdot \omega_{C(0dB)})\| = 1$

$$\Rightarrow \frac{0,028}{\omega_{C(0dB)}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{0,87} \cdot \omega_{C(0dB)}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (1,5 \cdot \omega_{C(0dB)})^2}} \cdot \|R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{0,028}{0,13^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{0,87} \cdot 0,13\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (1,5 \cdot 0,13)^2}} \cdot \|R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\| = 1$$

$$\Rightarrow 1,608 \cdot \|R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\| = 1$$

$$\Rightarrow \|R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\| = 0,62$$

$$20 \cdot \log\left(\|R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\|\right) \approx -4,2 \text{ dB}$$

De plus $M\varphi \geq 30^\circ$

$$M\varphi = 180^\circ + \text{Arg}\left(FTBO_{corrigée}(j \cdot \omega_{C(0dB)})\right)$$

$$\Rightarrow M\varphi = 180^\circ + \text{Arg}\left(FTBO_{non\ corrigée}(j \cdot \omega_{C(0dB)})\right) + \text{Arg}\left(R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\right)$$

$$\Rightarrow 30^\circ = 180^\circ - \arctan\left(\frac{\omega_{C(0dB)}}{0,87}\right) - \arctan(1,5 \cdot \omega_{C(0dB)}) - \underbrace{0,8 \cdot \omega_{C(0dB)}}_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi} + \text{Arg}\left(R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\right)$$

$$\text{Arg}\left(R(j \cdot \omega_{C(0dB)})\right) \approx -125 \text{ [mod } \pi] \equiv 55^\circ$$

III.B. Analyse des contraintes sur la loi de commande

Q 18. En prenant une consigne $\theta_{ref} = 0$, déterminer la fonction de transfert $T(p) = \frac{\theta(p)}{C_{ext}(p)}$ entre les couples perturbateurs $C_{ext}(p)$ et la position $\theta(p)$ et l'exprimer à partir des fonctions de transfert de la figure 11.

$$T(p) = \frac{\theta(p)}{C_{ext}(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p) \cdot B(p) \cdot R(p) \cdot F(p) \cdot A(p)}$$

Q 19. En utilisant les approximations fréquentielles $\|T_{bo}(j\omega)\| \gg 1$ et $\|T_{bo}(j\omega)\| \ll 1$, où $T_{bo}(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte, montrer que dans l'intervalle des

pulsations des couples perturbateurs, on peut écrire : $\|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|R(j\omega)F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\|}$.

Justifier que cette relation peut encore être simplifiée selon la formulation :

$$\|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$$

La pulsation de couples perturbateurs est comprise entre $\omega_0 = 0,001 \text{ rad.s}^{-1}$ et $2\omega_0 = 0,002 \text{ rad.s}^{-1}$.

Or, en basses fréquences, le comportement de $FTBO_{\text{corrigée}}(p)$ correspond à une pente de -60 dB/decade du point de vue du gain.

On peut en conclure que dans l'intervalle des pulsations $(\omega_0, 2\omega_0)$, $\|T_{bo}(j\omega)\| \gg 1$.

$$\|T(j\omega)\| = \left\| \frac{H(j\omega)}{1+T_{bo}(j\omega)} \right\| \approx \left\| \frac{H(j\omega)}{T_{bo}(j\omega)} \right\|$$

$$\|T(j\omega)\| \approx \left\| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega).B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)} \right\|$$

$$\|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)\|}$$

$F(p)$ et $Ar(p)$ sont deux 1^{er} ordre à gain unitaire dont les pulsations de brisure (0,87 et 0,66 rad/s) sont très supérieures aux pulsations de l'intervalle $(\omega_0, 2\omega_0)$.

Donc sur cet intervalle $\|F(j\omega)\| \approx 1$ et $\|Ar(j\omega)\| \approx 1$.

De plus $\|A(j\omega)\| = \|Ar(j\omega)e^{-0,1j\omega}\| \approx 1$ et $\|B(j\omega)\| = \|e^{-0,7j\omega}\| \approx 1$.

Au final :

$$\|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$$

Q 20. Donner l'expression de l'amplitude de l'évolution temporelle de $\theta(t)$, en fonction de $\|R(j\omega)\|$, en réponse au couple perturbateur sinusoïdal de pulsation ω_0 . En déduire la condition que doit vérifier $\|R(j\omega)\|$ en vue de satisfaire la précision d'écart de pointage, pour une consigne $\theta_{ref} = 0$, lorsque le satellite est soumis à ce couple perturbateur. Reprendre cette analyse dans le cas du couple perturbateur de pulsation $2\omega_0$.

$$\text{On a } T(p) = \frac{\theta(p)}{C_{ext}(p)} \text{ avec } \|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$$

On a affaire à une réponse harmonique. En réponse harmonique, la sortie est déphasée par rapport à l'entrée et l'amplitude de l'entrée étant A celle de la sortie est K.A avec

$$K = \frac{1}{\|R(j\omega)\|}$$

On obtient ainsi les expressions de l'amplitude de l'évolution temporelle de $\theta(t)$ en réponse aux couples perturbateurs de pulsations ω_0 et $2\omega_0$:

$\theta(t) = \frac{C_{00}}{\ R(j\omega_0)\ } \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\theta(t) = \frac{C_{01}}{\ R(j2\omega_0)\ } \sin(2\omega_0 t + \varphi)$
--	--

Pour respecter le cahier des charges l'amplitude des signaux ne doit pas dépasser $0,04^\circ$.
On rappelle l'indication donnée sous la figure 10 : « Dans tous les modèles utilisés, les angles sont exprimés en radians. »

$\frac{C_{00}}{\ R(j\omega_0)\ } \leq 0,04 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\ R(j\omega_0)\ \geq 3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{180}{0,04 \cdot \pi}$ $\ R(j\omega_0)\ \geq 0,043$	$\frac{C_{01}}{\ R(j2\omega_0)\ } \leq 0,04 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\ R(j2\omega_0)\ \geq 3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{180}{0,04 \cdot \pi}$ $\ R(j2\omega_0)\ \geq 0,043$
--	---

III.C. Synthèse du régulateur

Q 21. Déterminer la valeur de τ permettant d'obtenir la marge de phase $M_\phi = 30^\circ$ exigée par le cahier des charges.

$$R(j\omega) = K \cdot \frac{(1 + \tau j\omega)^2}{j\omega} = K \cdot \frac{1 - (\tau\omega)^2 + 2\tau j\omega}{j\omega} = -j \cdot \frac{K}{\omega} \cdot (1 - (\tau\omega)^2 + 2\tau j\omega)$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(R(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2\tau\omega}{1 - (\tau\omega)^2}\right)$$

D'après la question 17 $\text{Arg}(R(j\omega_{C(0dB)})) = 55^\circ$.

$$\Rightarrow \text{Arg}(R(j\omega_{C(0dB)})) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2\tau\omega_{C(0dB)}}{1 - (\tau\omega_{C(0dB)})^2}\right)$$

$$\Rightarrow 55^\circ = -90^\circ + \arctan\left(\frac{2\tau \cdot 0,13}{1 - (\tau \cdot 0,13)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(145^\circ) = \frac{2\tau \cdot 0,13}{1 - (\tau \cdot 0,13)^2}$$

$$\Rightarrow \tau = 24,4s$$

Q 22. En conservant la valeur de τ déterminée précédemment, calculer la valeur du gain K qui assure la pulsation de coupure imposée par le cahier des charges.

$$T_{bo}(p) = \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot p\right) \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot e^{-0,8 \cdot p} \cdot K \cdot \frac{(1 + 24,4 \cdot p)^2}{p}$$

$$\Rightarrow T_{bo}(j\omega) = K \frac{j}{\omega^3} 0,028 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot j\omega\right)} \frac{1}{(1 + 1,5 \cdot j\omega)} \cdot e^{-0,8 \cdot j\omega} \cdot (1 + 24,4 \cdot j\omega)^2$$

or

$$\|T_{bo}(j\omega_{C(0dB)})\| = K \frac{0,028}{0,13^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{0,87} \cdot 0,13\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (1,5 \cdot 0,13)^2}} \cdot \sqrt{(1 - 24,4^2 \cdot 0,13^2)^2 + (2 \cdot 24,4 \cdot 0,13)^2}$$

$$K \approx 0.0073$$

Q 23. Vérifier si le régulateur déterminé permet d'assurer les conditions nécessaires à satisfaire les performances, en termes d'écart de l'angle de pointage, lorsque le satellite est soumis aux variations sinusoïdales du couple perturbateur.

A la question 20 on a trouvé comme conditions :

Pour $\omega = \omega_0 = 0.001 \text{ rad.s}^{-1}$

$$\|R(j\omega_0)\| \geq 0,043, \text{ soit } 20 \log(\|R(j\omega_0)\|) \geq -27,33 \text{ dB}$$

$$\text{Or } \|R(j\omega_0)\| = \left\| -j \cdot \frac{K}{\omega_0} \cdot (1 - (\tau\omega_0)^2 + 2\tau j\omega_0) \right\| = \frac{0,0073}{0,001} \cdot \sqrt{(1 - 24,4^2 \cdot 0,001^2)^2 + (2 \cdot 24,4 \cdot 0,001)^2}$$

Donc $\|R(j\omega_0)\| \approx 7.3 \geq 0.43$ ou encore 17.3 dB à comparer à -27.33dB

De même pour $\omega = 2 \cdot \omega_0 = 0.002 \text{ rad.s}^{-1}$

$$\|R(j\omega_0)\| \geq 0,043, \text{ soit } 20 \log(\|R(j\omega_0)\|) \geq -27,33 \text{ dB}$$

$$\text{Or } \|R(j\omega_0)\| = \left\| -j \cdot \frac{K}{\omega_0} \cdot (1 - (\tau\omega_0)^2 + 2\tau j\omega_0) \right\| = \frac{0,0073}{0,002} \cdot \sqrt{(1 - 24,4^2 \cdot 0,002^2)^2 + (2 \cdot 24,4 \cdot 0,002)^2}$$

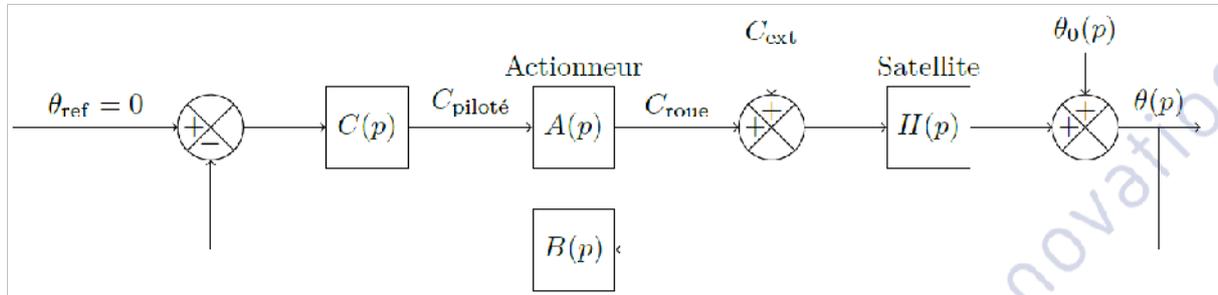
$\|R(j\omega_0)\| \approx 3.15 \geq 0.43$ ou encore 10 dB à comparer à -27.33dB.

Ainsi le régulateur déterminé permet d'assurer les conditions nécessaires à satisfaire les performances en termes d'écart de l'angle de pointage, lorsque le satellite est soumis aux variations sinusoïdales du couple perturbateur.

III.D. Validation de la loi de commande

III.D.3. Analyse des performances en cas de dépointage initial

Q 24. Déterminer $T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)}$ **à partir des différentes fonctions de transfert de la figure 12. On note** $c_{pa}(t) = c_{pilote}(t + \tau_1)$ **avec** $\tau_1 = 0,7s$. **En déduire à partir de** $T_d(p)$ **l'expression de** $\frac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)}$.



La condition de consigne d'attitude nulle conduit à la relation suivante en supposant C_{ext} nul par application du principe de superposition :

$$C_{pilote}(p) = -C(p).B(p).(\theta_0(p) + H(p).A(p).C_{pilote}(p))$$

$$\Rightarrow (1 + C(p).B(p).H(p).A(p)).C_{pilote}(p) = -C(p).B(p).\theta_0(p)$$

Ainsi on en déduit la fonction de transfert demandée :

$$T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)} = -\frac{C(p).B(p)}{1 + C(p).B(p).H(p).A(p)}$$

$$\text{Ou encore : } T_d(p) = \frac{C_{pilote}(p)}{\theta_0(p)} = -\frac{C(p).B(p)}{1 + T_{bo}(p)}$$

On note $c_{pa}(t) = c_{pilote}(t + \tau_1)$ avec $\tau_1 = 0,7s$, ou encore $c_{pilote}(t) = c_{pa}(t - \tau_1)$

Par application du théorème du retard on a :

$$C_{pilote}(p) = e^{-\tau_1 p}.C_{pa}(p) \Leftrightarrow C_{pa}(p) = e^{\tau_1 p}.C_{pilote}(p) = B(p).C_{pilote}(p)$$

$$\text{Ainsi } \frac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)} = \frac{T_d(p)}{B(p)}$$

Q 25. En utilisant le théorème de la valeur initiale, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer littéralement et numériquement $c_{pa}(0)$ **en réponse à une condition initiale**

$\theta_0(t) = \Theta_0 \Upsilon(t)$ **1 d'amplitude** $\Theta_0 = 20^\circ$. **En déduire** $c_{pilote}(\tau_1)$.

On applique le théorème de la valeur initiale en considérant une consigne d'entrée de type échelon d'amplitude $\Theta_0 = 20^\circ$.

$$c_{pa}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} c_{pa}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.C_{pa}(p) = -\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \frac{C(p)}{1 + T_{bo}(p)} \cdot \frac{\Theta_0}{p}$$

$$\text{Or } \lim_{p \rightarrow \infty} T_{bo}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{0,028}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,87} \cdot p\right) \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot e^{-0,8 \cdot p} \cdot K \cdot \frac{(1 + 24,4 \cdot p)^2}{p} \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 \cdot e^{-0,8 \cdot p}}{p^4} = 0$$

¹ $\Upsilon(t)$ désigne l'échelon d'Heaviside d'amplitude 1

$$\text{Donc on a } c_{pa}(0) = -\lim_{p \rightarrow \infty} C(p) \cdot \Theta_0 = -\lim_{p \rightarrow \infty} R(p) \cdot F(p) \cdot \Theta_0 = -\lim_{p \rightarrow \infty} \left(K \cdot \frac{(1 + \tau p)^2}{p \cdot (1 + 1,5 \cdot p)} \cdot \Theta_0 \right)$$

$$\Rightarrow c_{pa}(0) = -\lim_{p \rightarrow \infty} \left(K \cdot \frac{\tau^2 p^2}{1,5 \cdot p^2} \cdot \Theta_0 \right) = -\frac{2}{3} K \cdot \tau^2 \cdot \Theta_0$$

Application Numérique :

$$\Rightarrow c_{pa}(0) = -0,0073 \cdot \frac{24,4^2}{1,5} \cdot \frac{20}{180} \cdot \pi = -1,011 \text{ N.m.}$$

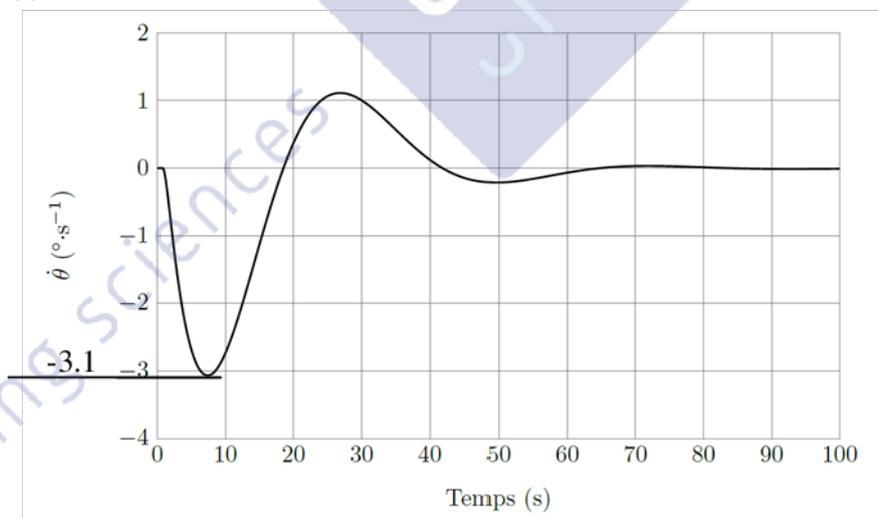
D'après la question précédente, on sait que $c_{pilote}(t) = c_{pa}(t - \tau_1)$, donc $c_{pilote}(\tau_1) = c_{pa}(0) = -1,011 \text{ N.m}$

Q 26. En réponse à une condition initiale $\theta_0(t) = \Theta_0 \Upsilon(t)$ d'amplitude 20° , la figure 13 montre l'évolution de la vitesse de rotation angulaire $\dot{\theta}$ du satellite autour de l'axe \dot{y} . À partir de la relation obtenue à la question 10, déterminer la valeur maximale de la vitesse angulaire de la roue de réaction ω_r . Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35,7 \text{ kg.m}^2$, $I_{ry} = 4.10^{-4} \text{ kg.m}^2$.

On rappelle la relation obtenue à la question 10 : $I_y \cdot \dot{\theta}(t) = -I_{ry} \cdot \omega_r(t)$

On en déduit alors la relation $\omega_r(t) = -\frac{I_y}{I_{ry}} \cdot \dot{\theta}(t)$

La vitesse $\dot{\theta}(t)$ évolue selon la courbe ci-dessous



On en déduit $|\dot{\theta}_{Max}(t)| = 3,1^\circ \cdot s^{-1}$, donc $|\omega_{rMax}(t)| = \frac{I_y}{I_{ry}} \cdot |\dot{\theta}_{Max}(t)|$

En effectuant les applications numériques on trouve :

$$|\omega_{rMax}(t)| = \frac{35,7}{4.10^{-4}} * 3,1 * \frac{360}{2\pi} = 46112 \text{ tr. min}^{-1}$$

Cette valeur est très nettement supérieure à la valeur admissible par les roues de réaction.

Q 27. Conclure alors sur la capacité de la loi de commande à satisfaire les contraintes imposées par l'actionneur à roue de réaction.

On rappelle les 2 éléments du Cdcf à respecter pour l'analyse des performances en cas de dépointage initial :

- Couple Maxi < 0.005 N.m
- Vitesse Maxi < 2800 tr.min⁻¹

Avec cette loi de vitesse on a trouvé un couple initial maxi de 1.01 Nm et une vitesse de rotation de moteur supérieure à 46000 tr.min⁻¹. Ainsi ces performances ne sont pas du tout vérifiées.

On observera alors une saturation de la vitesse et donc un couple nul car on rappelle que le couple est proportionnel à la dérivée de la vitesse.

Cette loi de commande n'est donc pas appropriée en cas de dépointage initial d'un angle de 20°.

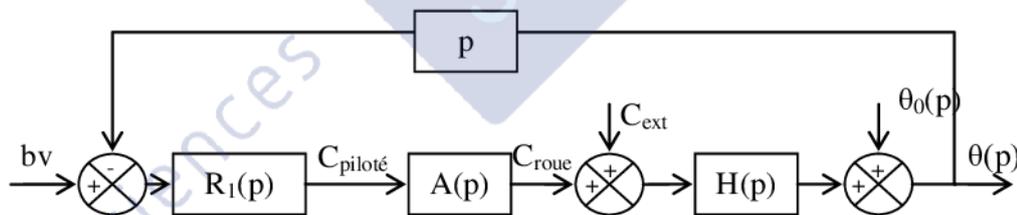
III.D.4. Améliorations des performances vis-à-vis du dépointage initial

Q 28. Justifier que pour $|\Delta\theta| > 0,3^\circ$, la deuxième composante de la loi de commande est une régulation de vitesse avec une consigne de vitesse $\dot{\theta}_c$ constante.

Si $|\Delta\theta| > 0,3^\circ$ alors $C_{piloté}(p) = -R_1(p) \cdot (b_v \cdot \text{sgn}(\Delta\theta) + p \cdot \theta(p))$

On fait l'hypothèse que le signe n'évolue pas sans repasser par $|\Delta\theta| < 0,3^\circ$ et la régulation correspondante.

Dans le cas $\Delta\theta < 0$ on peut représenter l'asservissement sous la forme du schéma-bloc ci-dessous :



La transformée de Laplace de $\dot{\theta}(t)$ vaut $T_L[\dot{\theta}(t)] = p \cdot \theta(p) - \theta(0) = p \cdot \theta(p)$ sous hypothèse de conditions initiales nulles. Le calcul du couple piloté correspond alors à une régulation (régulateur R_1) de vitesse ($\dot{\theta}(t)$) avec une consigne constante d'amplitude b_v .

Dans le cas $\Delta\theta > 0$ le schéma est conservé avec une entrée $-b_v$.

Ainsi la deuxième composante de la loi de commande est une régulation de vitesse avec une consigne de vitesse $\dot{\theta}_c$ constante.

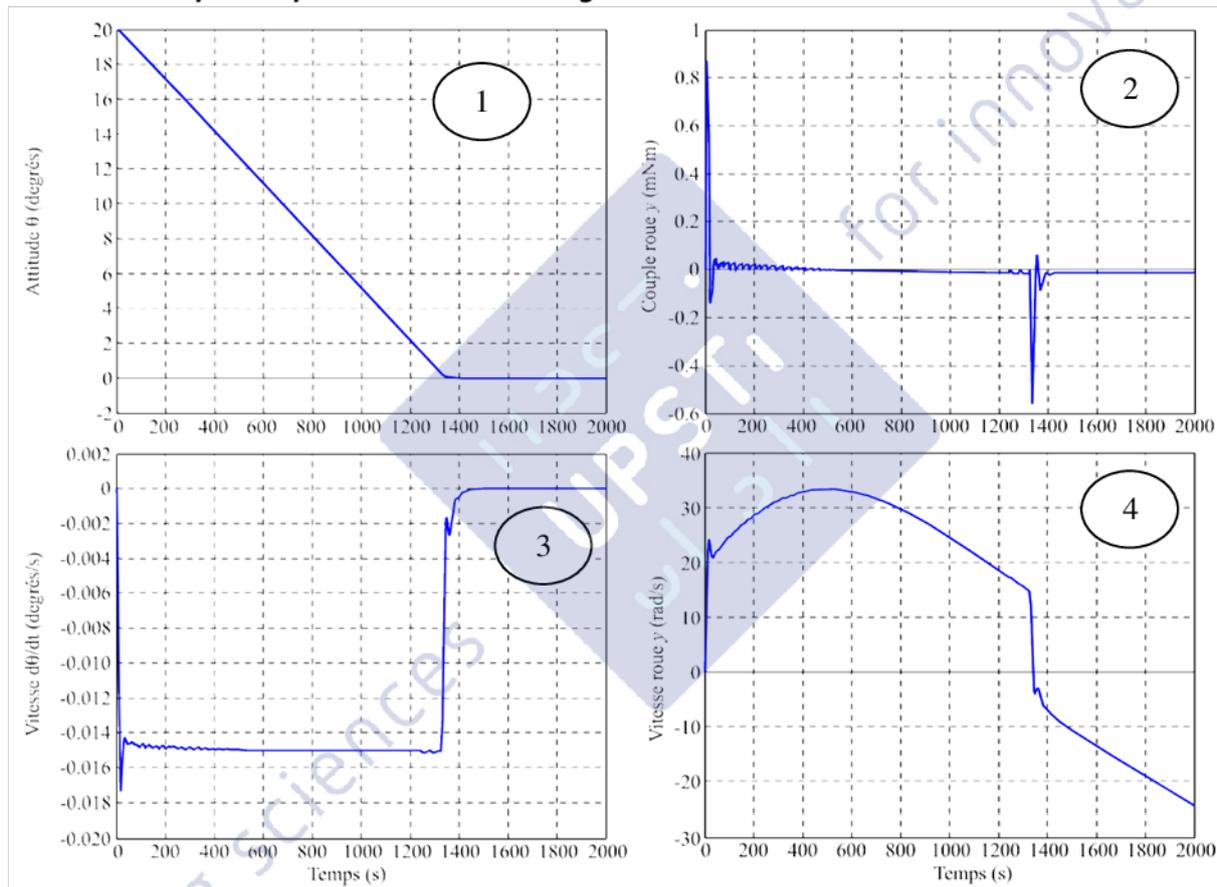
Q 29. En utilisant la relation obtenue à la question 10, déterminer la valeur maximale $|\dot{\theta}_c|_{Max}$ (en °.s⁻¹) de la consigne de vitesse $\dot{\theta}_c(t)$ que l'on peut imposer. Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35,7 \text{ kg.m}^2$, $I_{ry} = 4.10^{-4} \text{ kg.m}^2$ et une vitesse maximale de la roue de 2800 tr.min⁻¹ (correspondant à la vitesse maximale de l'actionneur donnée par le tableau de la figure 9).

On a la relation $\omega_r(t) = -\frac{I_y}{I_{ry}} \cdot \dot{\theta}(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{I_{ry}}{I_y} \cdot \omega_r(t) \Rightarrow |\dot{\theta}(t)|_{Max} = \frac{I_{ry}}{I_y} \cdot |\omega_r(t)|_{Max}$

L'application numérique conduit à :

$$|\dot{\theta}|_{Max} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{35,7} \cdot \frac{2800 \cdot 2\pi}{60} = 0,003285 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,19^\circ \cdot \text{s}^{-1}$$

Q 30. La figure 14 montre les réponses obtenues avec la loi de commande définie précédemment pour un dépointage initial $\Theta_0 = 20^\circ$. Commenter les réponses obtenues et conclure alors sur la capacité de la nouvelle loi de commande à satisfaire l'ensemble des contraintes imposées par le cahier des charges.



Pour chaque courbe on peut distinguer 2 phases :

- $t \in [0 ; 1350s]$: on observe la phase pendant quelques dizaines de secondes, la correction du dépointage initial à 20° s'effectue.
- $t \in [1350s ; \infty]$, le dépointage est nul, aussi l'asservissement de la position angulaire est en service (courbe 1).

Durant la 1^{ère} phase, on peut remarquer :

- $|\omega_r(t)|_{Max} = 34 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 325 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} < 2800 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ (courbe 4) (cf. Cdcf)
- $\dot{\theta} = \text{cste}$ (courbe 3), la régulation de vitesse avec consigne entrée constante peut être réalisée (cf. question 29)

- $|C(t)|_{Max} = 0,9 \text{ mN.m} < 5 \text{ mN.m}$ (courbe 2) (cf. Cdcf)
- La courbe 3 montre que la vitesse du satellite $\geq 0,15^\circ / s$

Ainsi pour toutes ces raisons la nouvelle loi de commande permet de répondre au Cahier des Charges Fonctionnel.

III.D.5. Analyse des performances vis-à-vis d'un couple perturbateur constant

Q 31. Sans calcul, mais en justifiant votre réponse, préciser l'écart en régime permanent en réponse à un couple perturbateur constant.

En regardant le schéma-bloc, on voit que le régulateur $\|R(p)\| = K \cdot \frac{(1 + 24,4.p)^2}{p}$ comporte une action intégrale. Il y a un intégrateur situé en amont de la perturbation. L'écart en régime permanent en réponse à un couple perturbateur est donc nul.

Q 32. À partir du schéma de la figure 11, déterminer la valeur du couple appliqué C_{roue} en régime permanent en réponse au couple perturbateur $C_{ext}(t)$ supposé constant et en déduire la loi temporelle d'évolution de la vitesse de la roue. Quelle est la conséquence sur le fonctionnement de l'actionneur du couple perturbateur ?

Justifier le terme de « saturation » pour décrire ce phénomène. À partir de quel horizon temporel survient cette situation ?

L'équilibre, en régime permanent, ne peut être obtenu que pour :

$$C_{roues} = -C_0 = -10^{-6} \cdot N.m$$

Si on applique le théorème du moment dynamique à la roue Rr en liaison pivot par rapport au satellite :

$$C_{roues} = I_{ry} \cdot \dot{\omega}_r(t)$$

$$\Rightarrow \omega_r(t) = \frac{1}{I_{ry}} \int_{t_0}^t C_{roues} dt$$

Si on fait l'hypothèse que $C_{roues} \approx -C_0$ pour $t > t_0$ on a $\omega_r(t) = -\frac{C_0}{I_{ry}}(t - t_0)$.

La vitesse $\omega_r(t)$ de la roue de réaction Rr augmente infiniment jusqu'à atteindre sa valeur maximum. Si la vitesse sature, alors le couple généré par les roues de réaction (proportionnel à la dérivée de la vitesse) sera nul. On ne peut plus commander le satellite.

A partir de quel horizon temporel survient cette situation ?

$$\omega_r(t_1) = \omega_{r \text{ maxi}} = -\frac{C_0}{I_{ry}}(t_1 - t_0)$$

Soit $t_0 = 0$ (temps initial) alors à l'horizon temporel $t_1 = \frac{I_{ry}}{C_0} |\omega_{r \text{ maxi}}|$.

$$t_1 = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2800 \cdot \pi}{30}}{10^{-6}} \text{ (en s)}$$

$$t_1 = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2800 \cdot \pi}{30}}{10^{-6}} \cdot \frac{1}{3600} \text{ (en h)}$$

$$t_1 = 32,6 \text{ h}$$

Q 33. Expliquer comment les magnétocoupleurs peuvent permettre de résoudre le problème de saturation des roues de réaction : on détaillera précisément quel est le rôle de chacun des trois magnétocoupleurs et à quels instants de l'orbite du satellite leurs effets sont les plus sensibles.

L'activation de chaque magnétocoupleur permet d'exercer des moments magnétiques :

- \vec{M}_x suivant \vec{x}
- \vec{M}_y suivant \vec{y}
- \vec{M}_z suivant \vec{z}

L'interaction entre les magnétocoupleurs et le champ magnétique se traduit par un moment s'exerçant sur le satellite. Dans l'expression de celui-ci en G :

- \vec{M}_x crée une composante suivant \vec{y}
- \vec{M}_y crée une composante suivant \vec{x} et suivant \vec{z}
- \vec{M}_z crée une composante suivant \vec{y}

Leurs effets sont les plus sensibles aux instants suivants :

- Effet de \vec{M}_x maximum en $t = \frac{\pi}{2\omega_0} \left[\text{mod } \frac{\pi}{\omega_0} \right]$.
- Effet de \vec{M}_y maximum
 - en $t = \frac{\pi}{2\omega_0} \left[\text{mod } \frac{\pi}{\omega_0} \right]$ pour la composante sur \vec{x} ,
 - en $t = 0 \left[\text{mod } \frac{\pi}{\omega_0} \right]$ pour la composante sur \vec{z} .
- Effet de \vec{M}_z maximum en $t = 0 \left[\text{mod } \frac{\pi}{\omega_0} \right]$.

Résolution du problème de saturation :

Les magnétocoupleurs permettent d'exercer des couples supplémentaires contribuant ainsi à ne plus saturer les roues de réaction.