teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2013

Filière : MP

Épreuve : Physique et Sciences de l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

École Polytechnique, Physique et Sciences de l'Ingénieur MP

Concours 2013

Un transducteur électrodynamique : le haut-parleur

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences de l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

1 Fonctionnement de base

1.1 Équation électrique

1. La force électromotrice induite est donnée par la circulation du champ électromoteur : $e = \oint \mathbf{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ avec $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = vB\mathbf{e}_\theta$. On a $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a\mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\theta$. En intégrant sur la totalité de la longueur du fil de la bobine qui est plongé dans le champ magnétique de norme constante, on obtient $\boxed{e = vB\ell}$.

2. Le schéma du circuit électrique équivalent à la situation étudiée est celui donné à la figure 1. La loi des mailles donne immédiatement $e_g + vB\ell = R_e i + L_e \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. En posant $\alpha = B\ell$, on a alors $\boxed{e_g(t) + \alpha v = R_e i + L_e \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$.

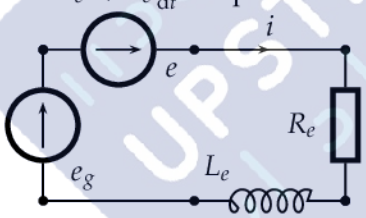

FIGURE 1 – Circuit électrique équivalent

3. Si on passe en régime harmonique, on a alors $\underline{E_g} = (R_e + jL_e\omega)\underline{I} - \alpha\underline{V}$ d'où l'expression de l'impédance $\boxed{\underline{Z_e} = R_e + jL_e\omega}$.

1.2 Équation mécanique

4. La force de LAPLACE est donnée par l'intégrale $\mathbf{F}_L = \oint_{\text{bobine}} i\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{B}$. Or, nous avons $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a\mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_r$, on en déduit que la force est donc $\boxed{\mathbf{F}_L = -i\ell B\mathbf{e}_z}$ ou bien encore $\mathbf{F}_L = -i\alpha\mathbf{e}_z$. Cette force est orientée sur l'axe de la bobine, elle possède le sens $-\mathbf{e}_z$ pour $i > 0$ et $+\mathbf{e}_z$ pour $i < 0$.

5. En observant le schéma, on voit que la suspension de centrage K_r correspond à 2 et que par contre K_a correspond à 6. On a donc les correspondances suivantes : $\boxed{K_r \leftrightarrow 2 \text{ et } K_a \leftrightarrow 6}$.

6. Le défaut d'alignement est tel que $K_r\delta_e = M_e g$. On en déduit que $\boxed{\delta_e = \frac{M_e g}{K_r} = 34 \text{ nm}}$. Cette valeur est vraiment très faible comparativement au déplacement annoncé le long de l'axe Oz qui est de l'ordre de $0,1$ mm.

7. On applique la relation de la dynamique à l'équipage mobile du haut-parleur de masse M_E dans le référentiel du laboratoire que l'on considère comme galiléen. Les forces qui s'appliquent sur cet équipage sont d'une part son poids et la force de centrage qui sont perpendiculaires à l'axe Oz et se compensent. D'autre part, les autres forces sont colinéaires à l'axe Oz : il y a la force de LAPLACE $\mathbf{F}_L$, la force de frottement $-h\mathbf{v}$ et la force de rappel du ressort qui est proportionnelle à l'écart à la position d'équilibre. Cet écart est bien traduit par $\int \mathbf{v}\mathrm{d}t$. On a donc $M_E\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -h\mathbf{v} - K_a\int \mathbf{v}\mathrm{d}t + \mathbf{F}_L$. On obtient ainsi l'équation

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

différentielle proposée dans l'énoncé. Si on passe à une étude en régime harmonique, on a donc $\underline{F_L} = \left[h + jM_E\omega + \frac{K_a}{j\omega}\right]\underline{V}$. L'impédance mécanique est donc : $\boxed{\underline{Z_m} = h + j\left(M_E\omega - \frac{K_a}{\omega}\right)}$.

8. Nous avons établi précédemment que $\mathbf{F}_L = -\alpha i\mathbf{e}_z$, on a donc $\underline{F_L} = -\alpha\underline{I}$. Comme nous venons d'écrire que $\underline{F_L} = \underline{Z_m}\underline{V}$, on en déduit que $\boxed{\frac{\underline{V}}{\underline{I}} = -\frac{\alpha}{\underline{Z_m}}}$. Compte tenu du fait que $\underline{Z_m}$ possède la même dimension que h, la dimension du rapport $\frac{V}{I} \equiv \frac{\alpha}{h}$. D'une part, on a $\frac{V}{I} \equiv \frac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A\cdot s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{C}}$. D'autre part, $\frac{\alpha}{h} = \frac{B\ell}{h} = \frac{B\ell v}{F}$ où F est une force. Or, $B\ell v = e$ est une tension en V et, de plus, $F = qE$ où E est un champ électrique en $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ et q une charge. On constate que le rapport $\frac{\alpha}{h} = \frac{e(\mathrm{V})}{qE}$ est bien celui d'une longueur sur une charge.

9. On peut se limiter à l'étude d'un régime sinusoïdal car des formes de signaux électriques différentes peuvent se décomposer en une superposition de fonctions harmoniques selon l'$\boxed{\text{analyse de FOURIER}}$.

1.3 Aspects énergétiques

10. Pour obtenir un bilan énergétique électrique, il faut multiplier l'équation électrique trouvée avant par l'intensité i du courant parcourant la bobine. Ce bilan énergétique sera une puissance puisqu'il revient à effectuer la multiplication d'une tension par une intensité. On obtient donc $e_g i + v\ell Bi = R_e i^2 + L_e i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Le dernier terme de cette équation fait apparaître la dérivée de l'énergie magnétique stockée dans la bobine puisque $L_e i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_e i^2\right)$. Le bilan énergétique en puissance est donc : $\boxed{e_g i + v\ell Bi = R_e i^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_e i^2\right)}$.

11. Pour obtenir l'équation énergétique sur le plan mécanique, il faut multiplier la relation fondamentale de la dynamique qui est une force par la vitesse. On obtient là encore une puissance. Le terme $K_a\mathbf{v}\cdot\int\mathbf{v}\mathrm{d}t$ correspond, si l'on peut dire, à ce que l'on note habituellement $\frac{1}{2}K_a z^2$ si l'origine de z se trouve à la position de repos de la bobine. C'est l'énergie potentielle élastique. Mais ici, nous travaillons en puissance, ce qui fait que l'on écrira la contribution au bilan de puissance comme la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentielle élastique : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}K_a\left(\int\mathbf{v}\mathrm{d}t\right)^2\right)$. Le bilan s'écrit donc : $\boxed{F_L v = hv^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}M_E v^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}K_a\left(\int\mathbf{v}\mathrm{d}t\right)^2\right)}$.

12. Le couplage électromécanique est traduit par l'apparition d'un même terme dans chacune des deux équations de puissance. En effet, on voit apparaître la puissance associée à la force électromotrice d'induction perçue comme électrique donc sous la forme $ei = v\ell Bi$. Dans le bilan mécanique, la puissance de la force de LAPLACE est $F_L v = -i\ell Bv$. Nous avons donc identifié le terme de couplage : $\boxed{i\ell Bv}$. Avec $F_L v = -vB\ell i$, on peut donc écrire le bilan énergétique $e_g i = R_e i^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_e i^2\right) + hv^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}M_E v^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}K_a\left(\int\mathbf{v}\mathrm{d}t\right)^2\right)$. Ce bilan traduit le fait que l'énergie fournie par le générateur est dissipée en effet JOULE et dans les frottements fluides mais qu'elle est aussi stockée sous forme d'énergie magnétique dans la bobine, d'énergie cinétique de l'équipage mobile et d'énergie potentielle élastique.

13. La moyenne temporelle d'une grandeur dépendant du temps périodique de période T est définie par $< x >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} x(t)\mathrm{d}t$. Si l'on prend comme exemple un des termes faisant apparaître une dérivée par rapport au temps, on a alors $< \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_e i^2\right) >= \frac{1}{2}L_e i^2(t_0+T) - \frac{1}{2}L_e i^2(t_0) = 0$ puisque l'intensité, comme les autres grandeurs du problème à savoir la vitesse et les positions sont périodiques de période T. On a donc bien : $\boxed{< e_g i >=< Ri^2 > + < hv^2 >}$. Les énergies stockées décrites dans la question précédente, sont en permanence échangées d'une forme à l'autre au cours d'une période mais ces échanges entraînent de la dissipation. C'est pourquoi dans la moyenne du bilan énergétique, il ne subsiste que les termes de dissipation.

1.4 Phénoménologie de la suspension pneumatique en enceinte close

14. Puisque la transformation est supposée isentropique, on peut appliquer la loi de LAPLACE $PV^\gamma = \mathrm{Cte}$. La section est Σ et le déplacement par rapport à la position de repos z, le volume passe donc de Ω_0 à $\Omega_0 + \Sigma z$. La loi de LAPLACE donne donc $P_0\Omega^\gamma = (P_0 + p)(\Omega_0 + \Sigma z)^\gamma$. On a $P_0 + p = P_0\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0+\Sigma z}\right)^\gamma$. On factorise Ω_0 et comme $\frac{\Sigma z}{\Omega_0} \ll 1$, on peut effectuer un développement limité de $(1 + \frac{\Sigma z}{\Omega_0})^{-\gamma} = 1 - \gamma\frac{\Sigma z}{\Omega_0}$. On

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

trouve alors très rapidement la surpression (en valeur algébrique) : $p = -\frac{P_0\gamma\Sigma}{\Omega_0}z$. La force pressante bilan sur les deux faces est $F_p = (P_0+p)\Sigma - P_0\Sigma$. On trouve alors bien la forme de force de rappel $F_p = -kz$ avec $\boxed{k = \frac{\gamma P_0 \Sigma^2}{\Omega_0}}$.

15. $P_0\Sigma$ est une force et $\frac{\Sigma}{\Omega_0}$ est l'inverse d'une longueur, γ est le rapport des capacités thermiques à pression et à volumes constants : il est donc sans dimension. k est donc en $\boxed{\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}$, c'est bien une constante de raideur de ressort. Pour l'évaluation de l'ordre de grandeur, on peut proposer $\Omega_0 = 10\ \text{cm}^3$, $\Sigma = 10\ \text{cm}^2$, $P_0 = 10^5$ Pa et $\gamma = 1,4$. On trouve alors que $k = 10^4\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Cette valeur est convenable par rapport à la proposition de l'énoncé qui est $K_a \simeq 10^3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

2 Impédance électrique du haut-parleur

2.1 Schéma électrique équivalent du haut-parleur

16. Si on bloque l'équipage mobile alors $v = 0$, il n'y a donc pas de force électromotrice induite. L'équation électrique se réduit à $e_g = R_e i + L_e\frac{\text{d}i}{\text{d}t}$. Si on se place en courant continu alors $\frac{\text{d}i}{\text{d}t} = 0$. On a juste $E_g = R_e I$. En mesurant i (ou bien une tension proportionnelle à l'intensité) et E_g, on obtient la résistance électrique R_e du bobinage. Si on se place en régime sinusoïdal, alors on aura $\underline{E}_g = (R_e + jL_e\omega)\underline{I}$ en pratiquant sur les grandeurs efficaces complexes. On constate que la tension et l'intensité seront déphasées de $\boxed{\arctan\frac{L_e\omega}{R_e}}$. On peut alors soit mesurer l'intensité efficace et la tension efficace du générateur pour obtenir une seconde équation et en déduire L_e par $E_g = \sqrt{R_e^2 + L_e^2\omega^2}I$, soit observer le déphasage précédent pour en déduire la valeur de L_e. Plus la pulsation ω augmente, plus l'impédance $Z_e = \sqrt{R_e^2 + L_e^2\omega^2}$ va augmenter. On cherche donc la limite telle que $\frac{Z_e - R_e}{R_e} = 10^{-2}$. Comme l'écart à la valeur R_e est faible, on peut considérer que le terme correctif $L_e^2\omega^2$ reste petit devant R_e^2. On effectue un développement limité $Z_e = R_e\left(1 + \frac{L_e^2\omega^2}{2R_e^2}\right)$. On en déduit que $\frac{L_e^2\omega_\ell^2}{2R_e^2} = 10^{-2}$. On a donc $\boxed{\omega_\ell = 10^{-1}\frac{R_e}{L_e\sqrt{2}}}$. On trouve $\omega_\ell = 2,8\times10^3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où $f_\ell = 450$ Hz. On travaille dans les graves, la fréquence est raisonnablement inférieure à 100 Hz. La condition $Z_e \simeq R_e$ est donc aisément respectée.

17. On pose $R_m = \frac{\alpha^2}{h}$. Or, nous avons vu avant que $\frac{\alpha}{h}$ s'exprimait en $\frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{\text{A}}$ puisque c'est le rapport d'une intensité sur une vitesse. Or $v\alpha = v\ell B$ est une force électromotrice en V. On a donc bien le rapport d'une tension sur une intensité. L'unité de $\boxed{R_m \text{ est donc } \Omega}$. D'après l'équation électrique, on peut passer directement en grandeurs complexes efficaces par exemple et écrire $\underline{E}_g + \alpha\underline{V} = R_e\underline{I}$ puisque l'on peut négliger l'autoinductance de la bobine. Nous avons vu que $\underline{V} = -\frac{\alpha}{Z_m}\underline{I}$. On a donc $\underline{E}_g - \frac{\alpha^2}{Z_m}\underline{I} = R_e\underline{I}$. On peut donc définir l'impédance $\underline{Z}_B$ selon $\underline{Z}_B = \frac{\underline{E}_g}{\underline{I}} = R_e + \frac{\alpha^2}{h + j(M_E\omega - \frac{K_a}{\omega})}$. On peut donc identifier les coefficients selon $\frac{Q}{\omega_m} = \frac{M_E}{h}$ et $Q\omega_m = \frac{K_a}{h}$. Cela nous permet de déterminer la pulsation propre du haut-parleur selon $\boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{K_a}{M_E}}}$ et le facteur de qualité $\boxed{Q = \frac{1}{h}\sqrt{M_E K_a}}$.

18. Le cercle dans le plan complexe représente le complexe $\frac{1}{\beta_m} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega})} = \frac{1 - j(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega})}{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega})^2}$. On peut calculer $\omega_m = 414\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ d'où la fréquence $f_m = 65$ Hz ce qui veut dire que pour $\omega < \omega_m$ on se situe dans le domaine des graves comme envisagé par l'énoncé. La partie imaginaire est $\Im(\frac{1}{\beta_m}) = \frac{Q(\frac{\omega_m}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_m})}{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega})^2}$. Dans les conditions de fréquence du problème, on voit donc $\Im(\frac{1}{\beta_m}) > 0$ puisque $\omega < \omega_m$. La partie du cercle que l'on va utiliser est la partie $\boxed{\text{positive}}$. Le diagramme proposé permet de voir facilement à la fois les parties réelle et imaginaire de l'impédance. On peut aussi avoir une idée de la valeur de l'impédance par $Z = \sqrt{(\Re(\underline{Z}))^2 + (\Im(\underline{Z}))^2}$.

19. On a $\underline{Z}_B = R_e + \frac{R_m}{1 + jQy} = R_e + \frac{R_m(1 - jQy)}{1 + Q^2y^2}$. On peut alors en déduire le module de l'impédance $|\underline{Z}_B| = \sqrt{(R_e + \frac{R_m}{1+Q^2y^2})^2 + \frac{R_m^2Q^2y^2}{1+Q^2y^2}}$. La phase est $\varphi_B = -\arctan\frac{R_mQy}{R_e(1+Q^2y^2)+R_m}$. Sur le diagramme, on voit facilement

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

qu'à l'origine O du graphique, on a $\Re(\frac{1}{\beta_m}) = \Im(\frac{1}{\beta_m}) = 0$. Dans ces conditions, ceci représente le minimum de l'impédance qui correspond aussi bien au cas où $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ ce qui correspond à $y \to \infty$ et $y \to -\infty$. On a donc $\boxed{|\underline{Z}_B|_{min} = R_e}$. Diamétralement opposé au point O, on a la situation où $\omega = \omega_m$, c'est-à-dire $y = 0$. On a donc $\boxed{|\underline{Z}_B|_{max} = R_e + R_m}$. Dans les cas évoqués, on a toujours une phase nulle : $\varphi_B = 0$.

2.2 Mesures électriques

20. On utilise ici l'amplificateur opérationnel en suiveur, ce qui fait que la tension définie par le contact mobile du potentiomètre est imposée au niveau du point B tant que l'on reste dans le domaine de linéarité de l'amplificateur. Comme l'intensité sur les entrées de l'AO sont nulles, les dipôles R_0 et $\underline{Z}_B$ sont donc en série. Imposer la tension [1] $U_{AB} = R_0 i$, revient à imposer l'intensité i dans la bobine. En mesurant $U_{BS} = Z_B i$ en fonction de la $\boxed{\text{fréquence}}$, on peut donc déterminer les formes qui sont proposées. On a $\underline{U}_{AB} = R_0 \underline{I}$ et $\underline{U}_{BS} = \underline{Z}_B \underline{I}$ d'où $\underline{Z}_B = \frac{R_0}{\underline{U}_{AB}} \underline{U}_{BS}$. On a bien $|\underline{Z}_B| = \eta |\underline{U}_{BS}|$ avec $\boxed{\eta = \frac{R_0}{U_{AB}} = 100\ \Omega \cdot \text{V}^{-1} = 100\ \text{A}^{-1}}$. La tension U_{AB} est en phase avec l'intensité, la loi des mailles permet d'écrire que $\underline{U}_{AS} = \underline{U}_{BS} + U_{AB} = U_{BS} \exp j\varphi_B + U_{AB}$. On en déduit que $\underline{U}_{AS} = (U_{BS} \cos \varphi_B + U_{AB}) + j U_{BS} \sin \varphi_B$. En prenant le carré du module, on peut isoler $\cos \varphi_B$. On obtient $U_{AS}^2 = U_{BS}^2 + U_{AB}^2 + 2 U_{AB} U_{BS} \cos \varphi_B$. Finalement, on constate bien qu'en mesurant les trois tensions proposées, on arrive à l'objectif : $\cos \varphi_B = \frac{U_{AS}^2 - (U_{BS}^2 + U_{AB}^2)}{2 U_{AS} U_{AB}}$.

21. L'impédance motionnelle est $\underline{Z}_{mo} = \frac{R_m}{1 + jQ(x - 1/x)}$. La phase est $\varphi_m = \arg R_m - \arg(1 + jQ(x - 1/x)) = -\arctan Q(x - 1/x)$. Pour avoir $\varphi_m = +\frac{\pi}{4}$, il faut pour la pulsation ω_1 que l'on ait $Q(x_1 - \frac{1}{x_1}) = -1$. Cette équation conduit à l'équation du second degré $x_1^2 + \frac{x_1}{Q} - 1 = 0$. La seule racine positive est retenue : $x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$. Pour avoir $\varphi_m = -\frac{\pi}{4}$ conduit à $Q(x_2 - \frac{1}{x_2}) = 1$ qui donne la seule solution positive $x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$. En effectuant la différence entre ces deux pulsations réduites, on obtient $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_m}{Q}$ d'où $\boxed{Q = \frac{\omega_m}{\omega_2 - \omega_1}}$. Pour obtenir $\underline{Z}_{mo} = \frac{R_m}{\beta_m(x)}$, il faut encore que la résistance R_e du fil électrique constituant la bobine soit négligeable devant l'impédance motionnelle, car rappelons-le $\underline{Z}_B = R_e + \underline{Z}_m$.

22. Si on change la masse de l'équipage mobile en passant de M_E à $M_e + m$, on modifie la pulsation propre de cet oscillateur puisqu'alors on aura $\boxed{\omega'_m = \sqrt{\frac{K_a}{M_E + m}}}$.

23. Comme nous venons de le voir, on a $f_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_a}{M_E}}$ et $f'_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_a}{M_E + m}}$. À partir de cette relation, on trouve $\boxed{M_E = m \frac{f'^2_m}{f_m^2 - f'^2_m}}$. L'application numérique donne $M_E = 21{,}3$ g. On peut observer que cette valeur est quand même assez nettement différente de celle fournie au début de l'énoncé puisqu'on avait alors $M_E = 7$ g. Ensuite, on peut calculer la constante de raideur selon $\boxed{K_a = 4\pi^2 f_m^2 M_E}$. On trouve $K_a = 2{,}1 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. Cette valeur correspond assez bien à celle de l'énoncé. Le facteur de qualité est de 1, on peut l'utiliser pour obtenir h car $Q = \frac{1}{h}\sqrt{M_E K_a}$ et par conséquent $\boxed{h = \frac{1}{Q}\sqrt{M_E K_a}}$. La valeur numérique est $h = 6{,}7\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. On termine en écrivant que $\boxed{\alpha = \sqrt{R_m h}}$ et cela donne $\alpha = 6{,}3\ \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

24. Sur l'oscilloscope, on observe des tensions et donc $u = U_0 \cos \omega_3 t$ et $Ri = RI_0 \cos \omega_3 t$ puisque l'on nous dit que courant et tension sont en phase. La relation liant u et i est donc simple : $Ri = \frac{RI_0}{U_0} u$. En mode XY, on verra sur l'écran un $\boxed{\text{segment de droite}}$ qui passe par l'origine. L'impédance totale de la bobine est $\underline{Z}_B = R_e + \frac{R_m}{1 + Q^2 x_3^2} + j(L_e \omega_m x_3 - \frac{R_m Q x_3}{1 + Q^2 x_3^2})$. Pour que la tension et l'intensité soient en phase, il est indispensable que l'impédance $\underline{Z}_B = \frac{\underline{E}_a}{\underline{I}}$ soit réelle. Sa partie imaginaire étant nulle, on peut en déduire une expression du coefficient d'autoinductance de la bobine : $L_e = \frac{1}{\omega_m} \frac{R_m}{1 + Q^2 x_3^2}$.

1. Les tensions ont été représentées dans l'énoncé avec des flèches orientées dans le mauvais sens. L'unité fournie pour η était fausse, il s'agit bien de A^{-1}.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

25. L'effet de peau réduit la section dans laquelle les courants se forment. C'est comme sur la route lorsque l'on passe de 2 voies à 1 voie, l'écoulement des voitures est nettement moins bon ! La résistance électrique augmente.

2.3 Mesures interférométriques

2.3.1 Analyse temporelle : mesure de l'amplitude vibratoire

26. La situation est celle d'une interférence à deux ondes. L'éclairement dû à deux ondes qui, seules, contribueraient aux éclairements E_1 et E_2 est de la forme $E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2}\cos\psi_0$ où ψ_0 est le déphasage entre les deux ondes. Il s'exprime en fonction de la différence de marche $\psi_0 = \frac{2\pi\delta_0}{\lambda} = q\delta_0$. La tension délivrée par le détecteur et l'électronique qui lui est associée, est proportionnelle à cet éclairement. Si a est le facteur de proportionnalité, on a $V_D = a(E_1+E_2)\left(1+\frac{2\sqrt{E_1E_2}}{E_1+E_2}\cos\psi_0\right)$. On obtient bien la forme proposée par l'énoncé avec, ici, $m_0 = \frac{2\sqrt{E_1E_2}}{E_1+E_2}$. Toutefois, l'énoncé nous dit que les amplitudes envoyées dans chaque voie de l'interféromètre sont identiques $E_1 = E_2 = E_0$, on devrait donc avoir $V_D = a2E_0(1+\cos\psi_0)$. Cette formule ne correspond pas à celle donnée par l'énoncé. En pratique, il n'est pas très évident de réaliser correctement $E_1 = E_2$. Mais m_0 est le contraste, on sait qu'il est influencé par les qualités de la source primaire que l'interféromètre dédouble : la source n'est jamais parfaitement monochromatique, ni non plus ponctuelle. Le contraste encore appelé visibilité dépend des propriétés de cohérence spatiale et de cohérence temporelle de la source.

27. Si pour la position de repos, on a $\delta_0 = 0$, alors $\psi_0 = 0$ et $p = 0$: l'ordre d'interférence est nul. On en déduit immédiatement que $\psi(t) = \frac{2\pi}{\lambda}2\delta_1\cos\omega t$. L'expression de la tension est donc $V_D(t) = V_0\left(1+m_0\cos\left(\frac{2\pi 2\delta_1}{\lambda}\cos\omega t\right)\right)$. Au cours d'une période de vibration de la membrane, $\cos\omega t$ passe par exemple de 1 à -1 puis revient à 1. L'ordre d'interférence s'écrit $p = \frac{2\delta_1}{\lambda}\cos\omega t = p_0\cos\omega t$. Il faut distinguer deux situations : $k \leq p_0 < k+\frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et dans ce cas $n = 4\text{ENT}(p_0)$ de la situation où $k+\frac{1}{2} \leq p_0 < k+1$ où il faut compter $n = 4\text{ENT}(p_0)+2$.

28. L'énoncé propose $n = 28$, on détermine la partie entière de p_0 à savoir 7. L'ordre est donc compris entre 7 et 7,5 ce qui fait que $7 \leq \frac{2\delta_1}{\lambda} < 7{,}5$. On en déduit que $\frac{7}{2}\lambda \leq \delta_1 < \frac{15}{4}\lambda$. Sur le plan numérique, on a $2{,}28\ \mu\text{m} \leq \delta_1 < 2{,}44\ \mu\text{m}$.

2.3.2 Analyse spectrale : mesure de la fréquence vibratoire

29. La phase de la fonction $\psi(t)$ est une fonction du temps. Souvent nous sommes confrontés à des signaux de fréquences stables pour lesquels, on a $\psi(t) = 2\pi ft + \psi_0$. On observe donc que $f = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$. Pour définir la fréquence dans le cas où il y a modulation de celle-ci, on utilise la même définition mais la dérivée est elle-même une fonction du temps. La fréquence dépend du temps contrairement au cas précédent. Nous avons $\psi_{tot}(t) = \psi_0 + \psi_M\cos\omega t = \psi_0 + \frac{2\pi 2\delta_0}{\lambda}\cos\omega t$ où δ_0 représente l'amplitude des vibrations. Pour s'assurer de ne pas manipuler des fréquences négatives, on définit la fréquence selon $f = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right|$. Après calcul, on trouve que $f = \frac{2\delta_0\omega}{\lambda}|\sin\omega t|$. En effectuant l'analyse spectrale de $V_D(t)$, on peut accéder à δ_0 et ω.

3 Fabrication d'une bobine-multicouches

3.1 Principe d'une machine de bobinage

30. On écrit la relation des vitesses d'un solide pour l'axe et plus particulièrement le point A. On a $\mathbf{v}_{A\in 3/0} = \mathbf{v}_{O\in 3/0} + \mathbf{AO}\wedge\boldsymbol{\Omega}_{3/0}$. Comme O est sur l'axe de rotation sa vitesse est nulle $\mathbf{v}_{O\in 3/0} = \mathbf{0}$. On a $\mathbf{AO} = R_3\mathbf{e}_y$ et $\boldsymbol{\Omega}_{3/0} = -\omega_3\mathbf{e}_z$, cela fait que $\mathbf{v}_{A\in 3/0} = R_3\omega_3\mathbf{e}_z$. Du fait du roulement sans glissement, on a $\mathbf{v}_{A\in 5/0} = \mathbf{v}_{A\in 3/0}$. Pour établir $\mathbf{v}_{A\in 5/0}$, nous allons utiliser une composition des vitesses $\mathbf{v}_{A\in 5/0} = \mathbf{v}_{A\in 5/1} + \mathbf{v}_{1/0}$. Au vu des plans proposés par l'énoncé, on constate que la bague possède une vitesse de rotation orientée par l'angle β de telle sorte que la vitesse qui en résulte est selon le vecteur $\mathbf{e}_{z5}$. Cette vitesse est $\mathbf{v}_{A\in 5/1} =$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$R_5\omega_5\mathbf{e}_{z5}$ où R_5 est le rayon de la bague. La condition de non glissement permet alors d'écrire que $R_3\omega_3\mathbf{e}_z = R_5\omega_5 \sin\beta\mathbf{e}_z + R_5\omega_5\cos\beta\mathbf{e}_x + v_{1/0}\mathbf{e}_x$. L'identification des deux vecteurs conduit à $v_{1/0} = -R_5\omega_5\cos\beta$ et $R_3\omega_3 = R_5\omega_5\sin\beta$. On peut donc exprimer la vitesse recherchée : $\boxed{\mathbf{v}_{1/0} = -R_3\omega_3\tan\beta\mathbf{e}_x}$.

31. Sur une hélice, on a une rotation autour d'un axe qui en même temps fait progresser le long de cet axe, ce sont les pas de vis habituels. Ici, aussi on a le même effet. Le pas de l'hélice est donc $\boxed{p' = 2\pi R_3\tan\beta}$.

32. Ici, le moteur entraîne le tambour et le chariot. On ne peut donc pas inverser le sens de rotation du moteur. En changeant le signe de β, on change le sens du déplacement du chariot sans changer le sens de rotation du moteur. Il est aussi important de signaler qu'un changement de la valeur de $\boxed{\beta \text{ change le pas } p'}$. La machine peut s'adapter à plusieurs situations de pas sans que l'on soit obliger de démonter et de changer l'axe qui porte le pas de vis. On peut même remarquer que si $\beta = 0$, on reste sur place.

3.2 Réglage du système en fonction du diamètre du fil

33. Par roulement sans glissement des poulies de diamètre D_1 et D_2, on a nécessairement égalité des vitesses périphériques $\omega_2 D_2 = \omega_3 D_1$. La vitesse de translation doit être telle que pendant une période de rotation du tambour, on ait parcouru la distance p_f d'où $p_f = v\frac{2\pi}{\omega_2}$. Cette vitesse est forcément celle du chariot (1) donc $v = R_3\omega_3\sin\beta = \omega_3\frac{p'}{2\pi}$ d'où l'égalité $\omega_2 p_f = \omega_3 p'$. La relation entre les pas est $p' = p_f\frac{\omega_2}{\omega_3}$ et par conséquent $\boxed{p' = p_f\frac{D_1}{D_2}}$.

34. Si l'on utilise un fil de diamètre d, il faut que $p_f = d$ d'où $\boxed{p' = d\frac{D_1}{D_2} = 2\pi R_3\tan\beta}$.

35. On a donc $\tan\beta = \frac{d}{2\pi R_3}\frac{D_1}{D_2}$. L'application numérique donne : $\boxed{\beta = 2,9\,^\circ}$.

36. Pour adapter le mouvement de trancannage au diamètre du fil, on peut faire comme sur un vélo : changer les vitesses en installant plusieurs poulies pour la poulie i avec différentes valeurs pour son diamètre D_i. Il existe une façon encore plus intéressante de changer le rapport D_1/D_2 en utilisant un $\boxed{\text{variateur à courroie}}$. Avec plusieurs poulies, le système de changement de vitesse était discret alors qu'avec le variateur à courroie, il devient continu.

4 Asservissement du haut-parleur

37. Les limites du modèle proposé pour l'étude de la bobine sont sans doute liées au fait que l'on a considéré que tout le fil bobiné était plongé dans un champ magnétique de norme constante. Il n'a pas, non plus, été question des conséquences de $\boxed{\text{l'effet JOULE}}$ qui fait évoluer la température du fil ce qui peut avoir des conséquences sur le fil et son environnement comme des effets de dilatation.

4.1 Préliminaire : courbe de réponse de la membrane

38. On s'intéresse pour commencer au dénominateur de la fonction de transfert et plus particulièrement à son module carré : $H_{Ad}^2 = (\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 2\omega_m^2\omega^2$. Il est important de déterminer si cette fonction présente un extremum. On pose $X = x^2$ avec $x = \omega/\omega_m$. On obtient alors $H_{Ad}^2 = \omega_m^4\left((1-X)^2 + 2X\right)$. Dérivons par rapport à X : $\frac{\mathrm{d}H_{Ad}^2}{\mathrm{d}X} = \omega_m^4 2X = 2\omega_m^2\omega^2 > 0$. La fonction H_{Ad} est donc strictement croissante, en fait on est dans le cas du régime critique si l'on étudie le problème en régime transitoire puisque le coefficient d'amortissement est $\zeta_0 = 1/\sqrt{2}$. Pour étudier la fonction de transfert, on passe en régime harmonique avec $s = j\omega$. On a donc $\underline{H}_A(j\omega) = -\frac{H_\infty\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega_m\omega}$. On étudie les comportements asymptotiques en commençant par $\omega \to 0$ ce qui donne $\tilde{H}_A(j\omega) = -\frac{H_\infty\omega^2}{\omega_m^2}$. L'expression du gain est alors $G_{\text{dB}} = 20\log\frac{H_\infty}{\omega_m^2} + 40\log\omega$ ce qui montre une pente à $+40$ dB par décade. Pour $\omega \to \infty$, on a $\underline{H}_A(j\omega) = H_\infty$. Le gain est alors constant : $G_{\text{dB}} = 20\log H_\infty$. Le filtre est donc un $\boxed{\text{passe-haut}}$ avec une pente à $+40$ dB par décade et une pulsation de coupure ω_m. Pour le haut-parleur, il est préférable d'avoir une courbe de gain $\boxed{\text{plate}}$ afin

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

de restituer de la même façon les amplitudes de toutes les fréquences présentes dans le signal sonore. Le diagramme de Bode est représenté sur le schéma de la figure 3.

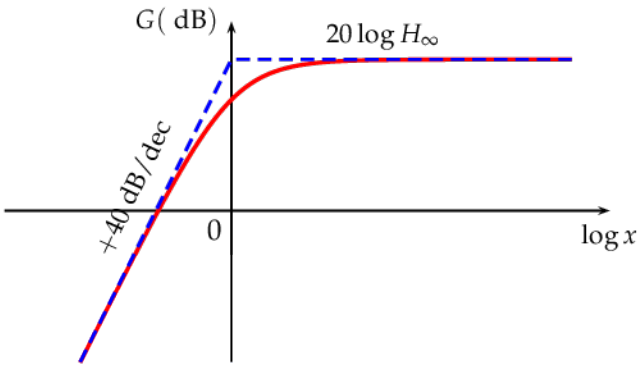

FIGURE 2 – Diagramme de BODE de $|\underline{H}_A(jx)|$

4.2 Asservissement de vitesse

39. La lecture du schéma-bloc nous conduit à écrire que $\tilde{V} = \tilde{H}_V(\tilde{E}_g - K_1\tilde{V})$. On a donc $\tilde{V} = \frac{\tilde{H}_V\tilde{E}_g}{1+K_1\tilde{H}_V}$. Comme $\tilde{A} = s\tilde{V}$ par opération de dérivation par rapport au temps, on en déduit que $\tilde{A} = \frac{s\tilde{H}_V\tilde{E}_g}{1+K_1\tilde{H}_V}$. Comme $\tilde{H}_A = s\tilde{H}_V$, on va pouvoir déterminer la forme de la fonction de transfert de l'accélération : $\boxed{\tilde{H}_{A_1} = \frac{H_\infty s^2}{s^2+(2\zeta_0\omega_m+K_1H_\infty)s+\omega_m^2}}$.

40. On peut identifier les différents facteurs de la fonction de transfert : $H_1 = H_\infty$, $\omega_1 = \omega_m$. Par contre, on a $2\zeta_1\omega_m = 2\zeta_0\omega_m + K_1H_\infty$. Le coefficient d'amortissement est donc : $\boxed{\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{K_1H_\infty}{2\omega_m}}$. On ne change pas le gain en haute fréquence, ni la pulsation de coupure mais seulement le coefficient d'amortissement. Comme il est augmenté par rapport à la situation précédente, on met plus de temps pour atteindre le régime permanent en réponse à un échelon. Pour le diagramme harmonique, on relèvera que le gain au voisinage de ω_m sera un peu plus petit que le précédent.

41. Un dérivateur va amplifier les parasites de haute fréquence ce qui n'est pas souhaitable au contraire d'un intégrateur qui lisse le signal. Toutefois, le plus important est de relever que la situation proposée n'est $\boxed{\text{pas causale}}$ car sur le plan du fonctionnement, les efforts subis vont être responsables de l'accélération qui est, ensuite, responsable de la vitesse. Il n'est pas satisfaisant d'utiliser la vitesse pour trouver l'accélération. On peut proposer le schéma-bloc de la figure 3 où on intègre l'accélération pour obtenir la vitesse.

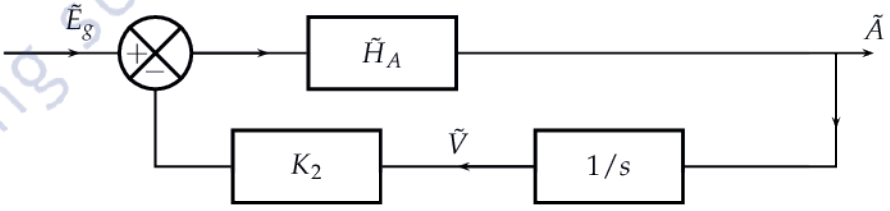

FIGURE 3 – Schéma bloc de l'asservissement de vitesse

4.3 Asservissement d'accélération

42. Le schéma fonctionnel du système est représenté à la figure 4. Nous avons $\tilde{H}_{A2} = \frac{\tilde{H}_A}{1+K_2\tilde{H}_A}$. En utilisant l'expression du transfert d'accélération donné par l'énoncé qui correspond à la situation de boucle ouverte, on en déduit que $\tilde{H}_{A2} = \frac{H_\infty s^2}{s^2+2\zeta_0\omega_m s+\omega_m^2+K_2H_\infty s^2}$. Il faut factoriser par $1+K_2H_\infty$ pour obtenir la forme canonique proposée : $\tilde{H}_{A2} = \frac{H_\infty}{1+K_2H_\infty}\frac{s^2}{s^2+2\zeta_0\omega_m s/(1+K_2H_\infty)+\omega_m^2/(1+K_2H_\infty)}$. On identifie les coefficients pour écrire $\boxed{H_2 = \frac{H_\infty}{1+K_2H_\infty}}$, $\boxed{\omega_2 = \frac{\omega_m}{\sqrt{1+K_2H_\infty}}}$ et aussi $\boxed{\zeta_2 = \frac{\zeta_0}{\sqrt{1+K_2H_\infty}}}$.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

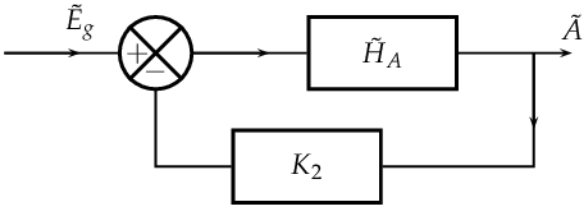

FIGURE 4 – Schéma bloc de l'asservissement d'accélération

43. On constate facilement avec les expressions précédentes que l'on diminue le gain en haute fréquence, que l'on diminue la pulsation de coupure tout comme le facteur d'amortissement. Le temps de réponse à un échelon est donc augmenté et surtout on se retrouve avec une possibilité de régime pseudo-périodique puisque $\zeta_2 < 1/\sqrt{2}$.

4.4 Asservissement mixte par matériaux actifs

44. Un capteur sur la membrane apportera une meilleure information sur la pression qu'un capteur à distance car l'onde sonore engendrée par cette membrane est une onde de pression qui ne sera sans doute pas une onde plane. L'enregistrement de cette onde par le capteur minimiserait forcément l'information de pression par rapport à celle obtenue sur la membrane. Elle ferait apparaître, de plus, des retards liés à la propagation de l'onde depuis la membrane jusque vers le capteur.

45. Le schéma fonctionnel est celui donné à la figure 5.

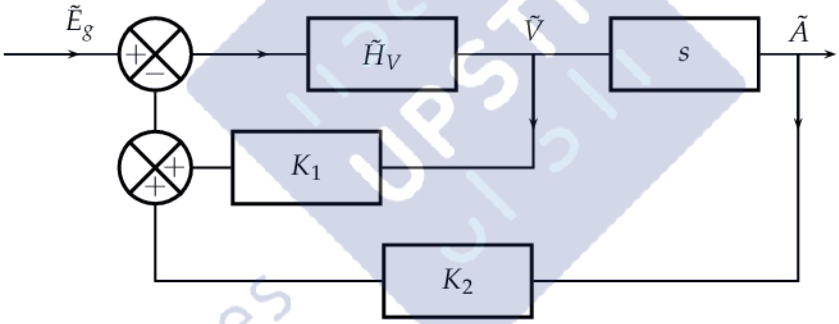

FIGURE 5 – Schéma bloc de l'asservissement mixte

46. Avec cette nouvelle situation, on constate que H_3 est diminué par rapport à la situation en boucle ouverte. De la même façon, on aura une pulsation propre plus basse. Par contre, le coefficient d'amortissement sera plus difficile à analyser puisque l'on a $\boxed{\zeta_3 = \frac{\zeta_0 + \frac{K_1 H_\infty}{2\omega_m}}{\sqrt{1+K_2 H_\infty}}}$. Il dépend à la fois de K_1 et de K_2 et surtout, on constate que K_1 tend à le faire augmenter alors que K_2 tend, au contraire, à le faire diminuer. En jouant habilement sur K_1 et K_2, on a plus de liberté de réglage du coefficient d'amortissement.

47. On veut garder inchangé le coefficient d'amortissement. Il faut donc écrire que $\zeta_0\sqrt{1+K_2H_\infty} = \zeta_0 + \frac{K_1 H_\infty}{2\omega_m}$. En développant le calcul, on trouve alors que : $\boxed{K_1 = \frac{2\zeta_0\omega_m}{H_\infty}(\sqrt{1+K_2H_\infty} - 1)}$.

48. Pour pouvoir réaliser tous les triplets (H_i, ω_i, ζ_i), il faut pouvoir jouer sur 3 facteurs indépendants. Or, on nous propose de jouer sur K_1 et K_2 seulement. Il est donc impossible d'atteindre l'objectif. Il serait nécessaire de disposer d'un troisième gain K_3 réglable pour obtenir les trois caractéristiques souhaitées.

Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles
© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI