

## Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2013

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

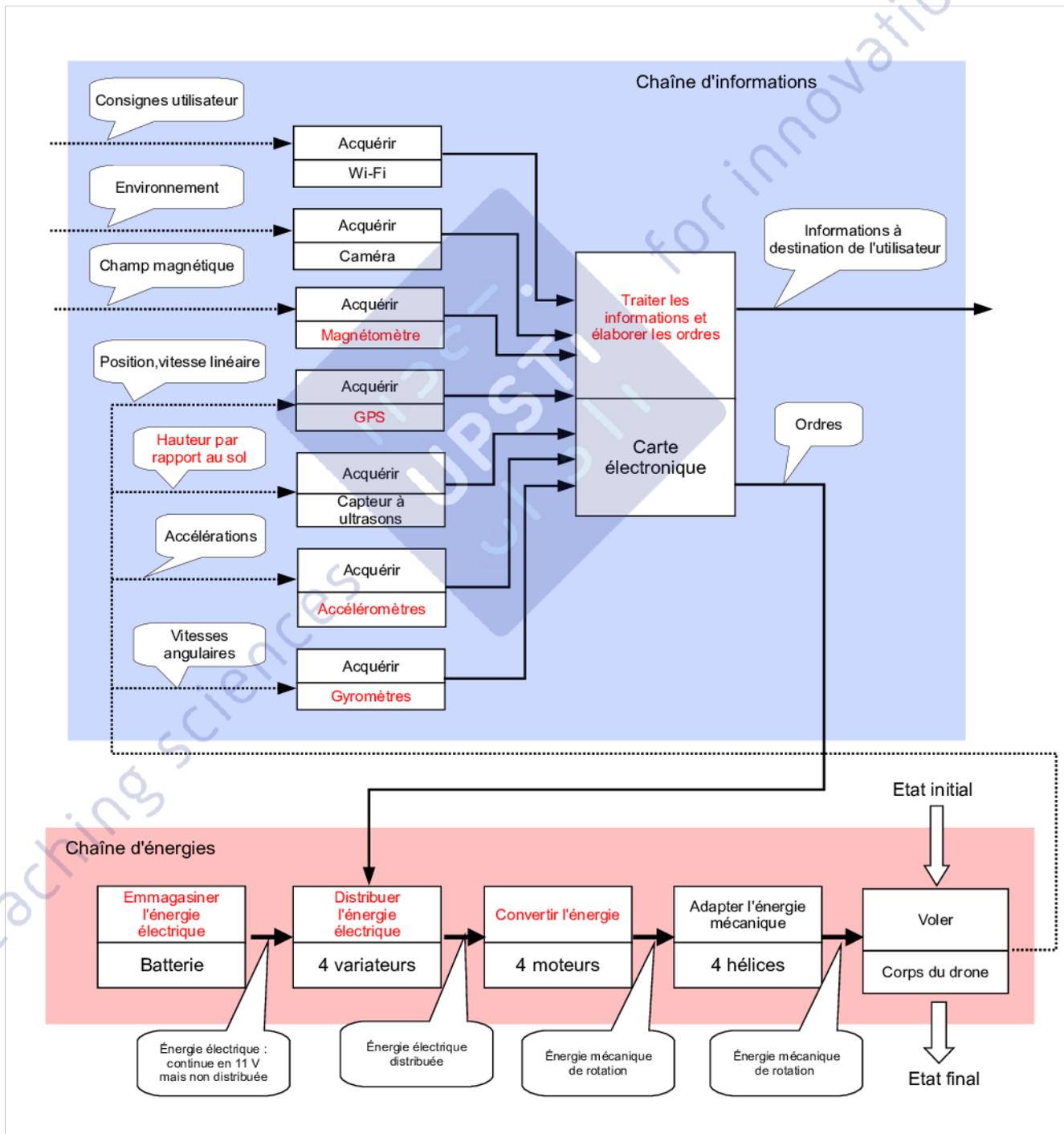
# Modélisation et contrôle d'un mini-quadrirrotor

## 1 Présentation de l'étude

### 1.1 Description architecturale

**Q1.** Compléter les chaînes d'énergies et d'informations représentées sur le document réponse en renseignant les informations mesurées par les capteurs, les noms des composants et les fonctions qui manquent (9 cases).

**Solution:** La solution est donnée sur la figure suivante.



## 2 Faisabilité d'un vol stationnaire

Dans cette partie, on cherche à vérifier à l'aide de modèles simples qu'un vol stationnaire est possible, compte tenu du poids du drone, des caractéristiques de la batterie et du cahier des charges à respecter.

### 2.1 Détermination de la puissance nécessaire pour un vol stationnaire

#### 2.1.1 Modèle des disques sustentateurs

- Q2.** Par application du théorème d'Euler à la veine de fluide, établir une relation entre  $F$ ,  $Q$ ,  $V_0$  et  $V_2$ . Justifier l'allure de la veine de fluide (rapport  $S_0$  sur  $S_2$ ) pour obtenir une force  $F$  positive.

**Solution:**

Remarque : l'équation de continuité :  $Q = \rho S_0 V_0 = \rho S_2 V_2$  justifie bien l'élargissement de la veine si  $V_0$  est inférieure à  $V_2$  (et par la suite  $F > 0$ ).

La normale en  $S_0$  est  $\vec{z}$ , celle en  $S_2$  est  $-\vec{z}$ . Ainsi le théorème d'Euler projeté selon  $\vec{z}$  s'écrit (les vitesses sont uniformes) :  $\rho S_0 V_0^2 - \rho S_2 V_2^2 = -F$  car  $F$  est la résultante de l'action de l'air sur l'hélice. Sachant que l'équation de continuité donne :  $Q = \rho S_0 V_0 = \rho S_2 V_2$ , on obtient  $F = Q(V_2 - V_0)$

Pour avoir une force positive, il faut que  $V_2$  soit plus grande que  $V_0$ , donc par l'équation de continuité  $S_0$  doit être plus grande que  $S_2$  d'où l'élargissement de la veine.

- Q3.** A partir d'un bilan d'énergie cinétique sur la veine fluide, déterminer une deuxième équation reliant  $P_{air}$ ,  $Q$ ,  $V_2$  et  $V_0$ .

**Solution:**

Bilan d'énergie cinétique :  $\frac{1}{2}(\rho S_0 (V_0)^2) V_0 - \frac{1}{2}(\rho S_2 (V_2)^2) V_2 = P_{air}$  D'où  $P_{air} = -\frac{1}{2} Q ((V_2)^2 - (V_0)^2)$

- Q4.** En exprimant une relation entre  $P_{air}$ ,  $F$  et  $V_1$  et en utilisant les deux équations précédentes, déterminer  $V_1$  en fonction de  $V_2$  et  $V_0$ .

**Solution:**

Comme  $P_{air} = -F V_1$  on a :  $F V_1 = \frac{1}{2} Q ((V_2)^2 - (V_0)^2)$   
En remplaçant  $F$  par  $Q(V_2 - V_0)$ , on obtient :  $V_1 = \frac{V_2 + V_0}{2}$

- Q5.** On pose  $V_f = V_1 - V_0$  (cette vitesse est appelée vitesse de Froude). En déduire l'expression de  $F$  en fonction de  $V_f$ ,  $V_0$ ,  $\rho$ , et  $S_1$ .

**Solution:**

$F = Q(V_2 - V_0)$  Or  $V_2 - V_0 = 2(V_1 - V_0)$   
D'où  $F = 2\rho S_1 (V_f + V_0) V_f$

- Q6.** Montrer dans le cas d'un vol stationnaire que  $P_{air} = K F^{\frac{3}{2}}$ , où l'on précisera l'expression de  $K$  en fonction de  $\rho$  et  $S_1$ .

**Solution:**

Dans le cas d'un vol stationnaire  $V_0 = 0$ , ainsi  $V_f = V_1$ . On a alors :  $F = 2\rho S_1 (V_{f0})^2$ . Comme  $P_{air} = F V_1 = 2S_1 \rho (V_{f0})^3 = \frac{F^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S_1}}$ . Ainsi  $K = \frac{1}{\sqrt{2\rho S_1}}$

#### 2.1.2 Modèle local d'action mécanique

- Q7.** Montrer que  $\vec{F} = F\vec{z} = \text{sgn}(\alpha)\text{sgn}(V)a\omega_i^2\vec{z}$  et  $\vec{M} = M\vec{z} = -\text{sgn}(V)b\omega_i^2\vec{z}$ , où l'on donnera les expressions des coefficients positifs de proportionnalité  $a$  et  $b$ , chacun sous la forme d'une intégrale simple, sans chercher à les calculer.

**Solution:**

Le torseur d'action mécanique sur une section droite s'écrit :  $\{dT\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dT} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_C$

On écrit le torseur au point G et on intègre sur une pale :  $\{T_{air \rightarrow pale}\} = \begin{Bmatrix} \int_{\lambda=r_1}^{r_2} (\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dT}) d\lambda \\ \int_{\lambda=r_1}^{r_2} \overrightarrow{G_i C} \wedge (\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dT}) d\lambda \end{Bmatrix}_{G_i}$

Or  $|V| = \lambda \omega_i$  d'où

$$\int_{\lambda=r_1}^{r_2} (\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dT}) d\lambda = \int_{\lambda=r_1}^{r_2} (\text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(V) C_z(\lambda) (\omega_i)^2 \lambda^2 \overrightarrow{z} - \text{sgn}(V) C_y(\lambda) (\omega_i)^2 \lambda^2 \overrightarrow{y}_i) d\lambda$$

$$= \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(V) (\omega_i)^2 \left( \int_{\lambda=r_1}^{r_2} C_z(\lambda) \lambda^2 d\lambda \overrightarrow{z} \right) - \text{sgn}(V) (\omega_i)^2 \int_{\lambda=r_1}^{r_2} C_y(\lambda) \lambda^2 d\lambda \overrightarrow{y}_i$$

En utilisant la symétrie axiale, l'action de l'air sur l'autre pale est opposée selon  $\overrightarrow{y}_i$ .

Ainsi la force globale sur l'hélice est  $\overrightarrow{F}_i = \text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(V) a (\omega_i)^2 \overrightarrow{z}$  avec  $a = 2 \int_{\lambda=r_1}^{r_2} C_z(\lambda) \lambda^2 d\lambda$

$$\overrightarrow{G_i C} \wedge (\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dT}) = \lambda \overrightarrow{x}_i \wedge (\text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(V) C_z(\lambda) \lambda^2 (\omega_i)^2 \overrightarrow{z} - \text{sgn}(V) C_y(\lambda) \lambda^2 (\omega_i)^2 \overrightarrow{y}_i)$$

$$= (\omega_i)^2 (\text{sgn}(\alpha) \text{sgn}(V) \lambda^3 C_z(\lambda) \overrightarrow{y}_i - \text{sgn}(V) C_y(\lambda) \lambda^3 \overrightarrow{z})$$

Par symétrie le moment élémentaire sur l'autre pale possède une composante opposée sur  $\overrightarrow{y}_i$ .

Ainsi  $\overrightarrow{M} = -\text{sgn}(V) b (\omega_i)^2 \overrightarrow{z}$  avec  $b = 2 \int_{\lambda=r_1}^{r_2} C_y(\lambda) \lambda^3 d\lambda$

- Q8.** Indiquer, pour le cas de l'hélice de la figure ??, quel est le pas considéré (à droite ou à gauche) et indiquer, en justifiant succinctement, le sens de rotation (horaire ou antihoraire) permettant d'obtenir les portances et traînées dessinées sur la figure ??.

**Solution:**

Le pas de l'hélice sur le dessin est à droite.

Comme  $\alpha > 0$ , pour avoir une portance dirigée vers le haut, il faut que  $\text{sgn}(V) = 1$ , donc que  $V > 0$ . Ceci impose d'avoir une hélice qui tourne dans le sens antihoraire.

- Q9.** Dans le cas d'une hélice de pas inversé par rapport à l'hélice précédente, indiquer ce qui doit être modifié pour obtenir une poussée verticale ascendante.

**Solution:**

Pour obtenir une poussée verticale ascendante, il est nécessaire pour une hélice de pas à gauche de la faire tourner dans l'autre sens : sens horaire.

- Q10.** Sachant que les 4 hélices du drone (de pas à droite ou à gauche) contribuent à le maintenir en vol stationnaire, donner l'expression du torseur d'action mécanique global de l'air sur une hélice en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $\omega_i$  et  $\varepsilon_i$ , où  $\varepsilon_i = -1$  (resp. 1) si l'hélice tourne dans le sens horaire (resp. antihoraire).

**Solution:**

Les 4 hélices contribuant au vol, elles ont toutes une portance dirigée vers le haut. D'après ce qui précède,

le torseur s'écrit donc de la manière suivante :  $T_{air \rightarrow hélice} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{M} \end{Bmatrix}_{G_i}$  avec  $\overrightarrow{F} = a (\omega_i)^2 \overrightarrow{z}$  et  $\overrightarrow{M} = -\varepsilon_i b (\omega_i)^2 \overrightarrow{z}$ . On retrouve bien le torseur donné à la partie 3.1.

- Q11.** Déterminer l'expression de  $P_{air}$  puissance de l'air sur une hélice en vol stationnaire en fonction de  $F$  et des coefficients  $a$  et  $b$  puis comparer ce modèle avec celui des disques sustentateurs.

**Solution:**

La puissance de l'air sur l'hélice est  $P_{air} = M\omega = b (\omega_i)^3$ . Or  $F = a (\omega_i)^2$  d'où  $P_{air} = \frac{b}{a^{3/2}} F^{3/2}$ . On retrouve bien une puissance de la forme de celle obtenue par le modèle des disques sustentateurs. Dans les deux modèles les tourbillons ont été négligés.

## 2.2 Pertinence du choix de la batterie

- Q12.** En supposant que le drone est maintenu en vol stationnaire pendant toute la durée du vol et que toute la puissance fournie par la batterie est utilisée pour générer la portance, déterminer la durée du vol. Conclure quant au respect ou non du cahier des charges.

**Solution:**

En vol stationnaire, la poussée exercée par les 4 hélices doit compenser le poids du drone (TRD selon l'axe vertical). En supposant que chaque hélice exerce la même poussée :  $F = M \frac{g}{4}$   
 La puissance électrique fournie par la batterie est égale en régime permanent à  $4P_{air}$   
 Soit  $P_{elec} = 4 \left( \frac{Mg}{4K^7} \right)^{\frac{3}{2}} = 4 \frac{27}{(0,8)^3} \approx 4 \frac{27}{500 \cdot 10^{-3}} \approx 220 Wh$   
 La batterie délivre 200Wh/kg soit une réserve énergétique de  $(200 \cdot 0,220) Wh$  pour 220g.  
 Ainsi  $P_{elec} \Delta t < 200 \cdot 0,220$ . On a alors :  $\Delta t < \frac{200 \cdot 0,220}{220} = 0,2 h \approx 12 min$   
 La durée de vol est donc supérieure à celle indiquée dans le cahier des charges (10 minutes).

### 3 Modélisation du quadricoptère

L'objectif de cette partie est de modéliser le quadricoptère en exploitant les équations de dynamique du drone et les équations électro-mécaniques des 4 moteurs. Ce modèle est indispensable pour concevoir les algorithmes de pilotage de haut niveau qui seront développés dans les parties suivantes.

#### 3.1 Modèle mécanique du drone

**Q13.** Déterminer la position du centre de gravité global  $\vec{OG}$ . Simplifier à partir de la figure ??, en justifiant succinctement, la forme de la matrice d'inertie du solide  $S$ . Cette matrice simplifiée sera utilisée dans la suite du sujet.

**Solution:**

Par définition du centre de gravité  $G$  on a :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} (m_s \vec{OG}_s + \sum_{i=1}^{i=4} m_i \vec{OG}_i) = \frac{1}{M} (-m_s h \vec{z} + m \sum_{i=1}^{i=4} \vec{OG}_i) = \frac{m_s}{M} (-h) \vec{z}$$

Le corps du drone possède deux plans de symétrie, la matrice est donc diagonale en tout point de l'intersection des plans, donc en  $G$  :  $I_G(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R$

##### 3.1.1 Équations de comportement dynamique du drone

**Q14.** Isoler l'ensemble du drone  $E = \{S \cup_{i=1}^{i=4} S_i\}$  et en déduire les deux équations vectorielles caractérisant son mouvement. Ne pas faire le calcul des éléments de cinétique dans cette question, calculer uniquement les termes provenant des actions mécaniques. On notera  $\vec{\delta}(G, E/S_0)$  le moment dynamique au point  $G$  de  $E$  par rapport à  $S_0$  et  $\vec{R}_D(E/S_0)$  la résultante dynamique de  $E$  par rapport à  $S_0$ .

**Solution:**

On isole l'ensemble du drone soumis à :

- l'action de la pesanteur sur l'ensemble
- l'action de l'air sur les 4 hélices

Le PFD dans le référentiel galiléen  $R_0$  au point  $G$  donne :

$$M \vec{a}(G, E/S_0) = -Mg \vec{z}_0 + \sum_{i=1}^{i=4} a \omega_i^2 \vec{z}$$

$$\vec{\delta}(G, E/S_0) = \left( \frac{d\vec{\sigma}(G, E/S_0)}{dt} \right)_{S_0} = \sum_{i=1}^{i=4} -b \varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + \sum_{i=1}^{i=4} \vec{G}G_i \wedge a \omega_i^2 \vec{z}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=4} -b \varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + a l ((\omega_3^2 - \omega_1^2) \vec{y} + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \vec{x})$$

- Q15.** Simplifier ces équations dans le cas d'un vol stationnaire (le repère  $R$  est alors confondu avec  $R_0$ ). Déterminer, en le justifiant, le signe de chaque  $\varepsilon_i$  (et donc le type de pas - à gauche ou à droite - de chaque hélice) sachant que  $\varepsilon_1 = 1$  et  $\varepsilon_3 = 1$  (pas à droite pour les hélices  $S_1$  et  $S_3$ ). Montrer alors que  $\omega_i = \bar{\omega}$  pour  $i \in \{1,2,3,4\}$  où l'on précisera l'expression de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $M$ ,  $g$  et  $a$ . Faire l'application numérique.

**Solution:**

Dans le cas d'un vol stationnaire, les éléments de cinétiques sont nuls. Ainsi :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{Mg}{a}$$

et  $\omega_3^2 = \omega_1^2$ ,  $\omega_2^2 = \omega_4^2$

$$\varepsilon_1\omega_1^2 + \varepsilon_2\omega_2^2 + \varepsilon_3\omega_3^2 + \varepsilon_4\omega_4^2 = 0$$

Ainsi  $2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 = \frac{Mg}{a}$  et  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\omega_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\omega_2^2 = 0$

Les  $\omega_i$  ne peuvent pas être nuls (sinon le drone ne vole pas !). Ainsi  $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \neq 0$  car sinon  $\omega_1 = 0$

On a donc :  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$  et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$

Si  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$  alors il n'y a pas de solution d'équilibre possible (impossible de respecter les deux équations).

Ainsi  $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -1$

Les hélices 1 et 3 ont un pas à droite tandis que les hélices 2 et 4 ont un pas à gauche.

Dans ces conditions,  $\omega_1^2 = \omega_2^2$  et  $\omega_1^2 = \frac{Mg}{4a}$

Ainsi comme les  $\omega_i > 0$ , on obtient :  $\omega_i = \bar{\omega} = \sqrt{\frac{Mg}{4a}}$

A.N. :  $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{0,9 \cdot 10}{4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5}}} = \frac{3}{8} \cdot 1000 = 375 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 3.1.2 Calcul des éléments cinétiques

- Q16.** Calculer  $\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0)$  moment cinétique en  $G_i$  de  $S_i$  par rapport à  $S_0$  et exprimer le résultat dans la base du repère  $R$ .

**Solution:**

$$\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = I_{G_i}(S_i) \cdot \vec{\Omega}_{S_i/S_0}$$

Or  $\vec{\Omega}_{S_i/S_0} = p\vec{x} + q\vec{y} + (r + \varepsilon_i\omega_i)\vec{z}$

Il est nécessaire d'exprimer le vecteur  $\vec{\Omega}_{S_i/S_0}$  dans la base  $R_i$  pour pouvoir faire le produit matriciel.

Sachant que  $\vec{x} = \cos\theta_i\vec{x}_i - \sin\theta_i\vec{y}_i$  et  $\vec{y} = \cos\theta_i\vec{y}_i + \sin\theta_i\vec{x}_i$  on obtient :

$$\vec{\Omega}_{S_i/S_0} = (p\cos\theta_i + q\sin\theta_i)\vec{x}_i + (q\cos\theta_i - p\sin\theta_i)\vec{y}_i + (r + \varepsilon_i\omega_i)\vec{z}$$

Ainsi :  $\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = A_i(p\cos\theta_i + q\sin\theta_i)\vec{x}_i + B_i(q\cos\theta_i - p\sin\theta_i)\vec{y}_i + C_i(r + \varepsilon_i\omega_i)\vec{z}$

En exprimant les vecteurs dans la base de  $R$  :  $\vec{x}_i = \cos\theta_i\vec{x} + \sin\theta_i\vec{y}$  et  $\vec{y}_i = \cos\theta_i\vec{y} - \sin\theta_i\vec{x}$  on obtient :

$$\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = \begin{cases} A_i(p\cos^2\theta_i + q\sin\theta_i\cos\theta_i) - B_i(q\cos\theta_i\sin\theta_i - p\sin\theta_i\sin\theta_i) \\ A_i(p\cos\theta_i\sin\theta_i + q\sin\theta_i\sin\theta_i) + B_i(q\cos^2\theta_i - p\sin\theta_i\cos\theta_i) \\ C_i(r + \varepsilon_i\omega_i) \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = \begin{cases} A_i p \cos^2 \theta_i + B_i p \sin^2 \theta_i + (A_i - B_i) q \sin \theta_i \cos \theta_i \\ A_i q \sin^2 \theta_i + B_i q \cos^2 \theta_i + (A_i - B_i) p \cos \theta_i \sin \theta_i \\ C_i (r + \varepsilon_i \omega_i) \end{cases}$$

L'expression obtenue à la question précédente peut être simplifiée en considérant la moyenne temporelle de  $\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0)$  sur une période  $T_i$  de rotation d'une hélice.

- Q17.** Justifier la pertinence de cette hypothèse et montrer que la moyenne temporelle de  $\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0)$ , notée  $\langle \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle$ , sur une période  $T_i$  est égale à  $I_r p \vec{x} + I_r q \vec{y} + J_r (r + \varepsilon_i \omega_i) \vec{z}$ , où l'on donnera les expressions de  $I_r$  et  $J_r$  en fonction des termes de la matrice d'inertie  $I_{G_i}(S_i)$ .

**Solution:**

La vitesse angulaire d'une hélice est de l'ordre de 4000 tr/min, soit une période de 0,015s ce qui est très faible par rapport au mouvement du drone. On peut donc approcher les quantités à chaque instant par leur moyenne sur une période. Cette moyenne est définie de la manière suivante :

$$\langle \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) dt$$

Calculons explicitement la composante selon  $\vec{x}$  (notée  $\sigma_x$ )

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} (A_i p \cos^2(\omega_i t) + B_i p \sin^2(\omega_i t) + (A_i - B_i) \frac{q}{2} \sin(2\omega_i t)) dt$$

Or la moyenne des fonctions cosinus et sinus au carré vaut 1/2 sur une période et l'intégrale de  $\sin(2\omega_i t)$  est égale à 0.

Ainsi la moyenne est  $\langle \sigma_x \rangle = \frac{A_i + B_i}{2} p$

De la même manière, on établit le même résultat pour la composante selon  $\vec{y}$  (en prenant  $q$  à la place de  $p$ .)

Ainsi on obtient :  $\langle \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle = I_r p \vec{x} + I_r q \vec{y} + J_r (r + \varepsilon_i \omega_i) \vec{z}$  avec  $I_r = \frac{A_i + B_i}{2}$  et  $J_r = C_i$ .

- Q18.** Développer les deux équations vectorielles obtenues lors de l'isolement du quadrirotor et en déduire 6 équations scalaires projetées sur la base du repère  $R$ . L'accélération de la pesanteur sera notée sous la forme suivante :  $\vec{g} = g_1 \vec{x} + g_2 \vec{y} + g_3 \vec{z}$  où  $g_1, g_2$  et  $g_3$  seront détaillées dans la suite du sujet.

**Solution:**

$$\vec{\sigma}(G, E/S_0) = I_p \vec{x} + I_q \vec{y} + J_r \vec{z} + \sum_{i=1}^{i=4} J_r \varepsilon_i \omega_i \vec{z}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{\sigma}(G, E/S_0)}{dt} \right)_{R_0} &= I\dot{p} \vec{x} + p \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{R_0} + I\dot{q} \vec{y} + Iq \left( \frac{d\vec{y}}{dt} \right)_{R_0} + (J\dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i) \vec{z} + (Jr + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i) \left( \frac{d\vec{z}}{dt} \right)_{R_0} \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} -b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + al((\omega_3^2 - \omega_1^2) \vec{y} + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \vec{x}) \end{aligned}$$

Or on a les relations suivantes :

$$\left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{R_0} = (p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}) \wedge \vec{x} = -q\vec{z} + r\vec{y}$$

$$\left( \frac{d\vec{y}}{dt} \right)_{R_0} = (p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}) \wedge \vec{y} = p\vec{z} - r\vec{x}$$

$$\left( \frac{d\vec{z}}{dt} \right)_{R_0} = (p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}) \wedge \vec{z} = -p\vec{y} + q\vec{x}$$

D'où :

$$I\dot{p} - Iqr + (Jr + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i) q = al(\omega_2^2 - \omega_4^2)$$

$$I\dot{q} + Ipr - (Jr + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i) p = al(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

$$(J\dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i) = -b \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i^2$$

L'accélération est donnée par :

$$\vec{a}(G, E/S_0) = \dot{u} \vec{x} + \dot{v} \vec{y} + \dot{w} \vec{z} + u(-q\vec{z} + r\vec{y}) + v(p\vec{z} - r\vec{x}) + r(-p\vec{y} + q\vec{x})$$

Ainsi :

$$\dot{u} - rv + rq = g_1$$

$$\dot{v} + ru - rp = g_2$$

$$\dot{w} - uq + vp = g_3 + \frac{a}{M} \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i^2$$

- Q19.** En isolant chaque hélice  $S_i$ , donner les équations supplémentaires permettant de déterminer les évolutions des couples  $\Gamma_i$ .

**Solution:**

On isole une hélice  $i$  soumise :

- à l'action de l'air
- à la pesanteur
- au couple moteur  $\Gamma_i$
- à l'action de la liaison pivot

Le théorème du moment dynamique appliqué en  $G_i$  dans le référentiel galiléen  $S_0$  en projection selon  $\vec{z}$  donne :

$$\vec{\delta}(G_i, S_i/S_0) \cdot \vec{z} = \varepsilon_i \Gamma_i + M_i$$

Or  $\vec{\delta}(G_i, S_i/S_0) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \cdot \vec{z}) = J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r})$

En effet,  $(\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt}_{S_0} = 0)$

Ainsi  $J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r}) = \varepsilon_i \Gamma_i - b\varepsilon_i \omega_i^2$

**Q20.** Montrer que les équations établies précédemment linéarisées à l'ordre 1 permettent d'aboutir aux sous-systèmes définis ci-dessous (on ne cherchera pas à résoudre ces équations). Indiquer pourquoi la structure du comportement dynamique du drone est intéressante pour l'établissement des lois de contrôle du drone.

Sous-système longitudinal (noté *SSL*)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= g\theta \\ I\dot{q} &= 2a\bar{\omega}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1) \\ J_r(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1) &= \tilde{\Gamma}_3 - \tilde{\Gamma}_1 - 2b\bar{\omega}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1) \end{aligned}$$

Sous-système latéral (noté *SSL*)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g\varphi \\ I\dot{p} &= 2a\bar{\omega}(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4) \\ J_r(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4) &= \tilde{\Gamma}_2 - \tilde{\Gamma}_4 - 2b\bar{\omega}(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4) \end{aligned}$$

Sous-système vertical (noté *SSv*)

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (2\bar{\omega} \frac{a}{M}) \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \\ J_r \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\tilde{\omega}}_i &= \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \end{aligned}$$

Sous-système de cap (noté *SSc*)

$$(J - 4J_r)\dot{r} = - \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i (J_r \dot{\omega}_i + 2b\bar{\omega} \tilde{\omega}_i)$$

**Solution:**

Avec les figures géométrales on obtient :  $\vec{g} = -g(-\vec{x} \cos \varphi \sin \theta + \vec{y} \sin \varphi + \vec{z} \cos \varphi \cos \theta)$   
 donc  $g_1 = g \cos \varphi \sin \theta$ ,  $g_2 = -g \sin \varphi$ ,  $g_3 = -g \cos \varphi \cos \theta$   
 $\dot{u} - rv + rq = g_1$  donne :  $\dot{u} = g\theta$   
 $\dot{v} + ru - rp = g_2$  donne :  $\dot{v} = -g\varphi$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \omega_i^2 = \sum_{i=1}^{i=4} (\tilde{\omega}_i + \bar{\omega})^2 = \sum_{i=1}^{i=4} (\tilde{\omega}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{i=4} (\bar{\omega})^2$$

Soit au premier ordre :  $\sum_{i=1}^{i=4} \omega_i^2 = 2 \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{i=4} (\bar{\omega})^2$

D'où  $\dot{\omega} - uq + vp = g_3 + \frac{a}{M} \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i^2$  donne  $\dot{\omega} = -g + (\frac{a}{M})(2 \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{i=4} \bar{\omega}^2)$

Comme  $-g + (\frac{a}{M}) \sum_{i=1}^{i=4} (\bar{\omega})^2 = 0$ , il vient :  $\dot{\omega} = (2\frac{a}{M}) \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \bar{\omega}$

De même :

$I\dot{p} - Iqr + (Jr + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i)q = al(\omega_2^2 - \omega_1^2)$  donne :  $I\dot{p} = 2al\bar{\omega}(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1)$

car  $\sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i = \sum_{i=1}^{i=4} (\varepsilon_i \tilde{\omega}_i + \varepsilon_i \bar{\omega}) = \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \tilde{\omega}_i$  compte tenu des signes  $\varepsilon_i$ .

$I\dot{q} + Ipr - p(Jr + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i) = al(\omega_3^2 - \omega_1^2)$  donne :  $I\dot{q} = 2al\bar{\omega}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1)$

$(J\dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i) = -b \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i^2$  donne :  $(J\dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i) = -2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \tilde{\omega}_i$

$J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r}) = \varepsilon_i \Gamma_i - b\varepsilon_i \omega_i^2$  donne  $J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r}) = \varepsilon_i \tilde{\Gamma}_i + \varepsilon_i \bar{\Gamma}_i - b\varepsilon_i(\bar{\omega}^2 + 2\tilde{\omega}_i \bar{\omega})$

En régime stationnaire :  $\tilde{\Gamma}_i - b\bar{\omega}^2 = 0$ , on a donc :  $J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r}) = \varepsilon_i \tilde{\Gamma}_i - 2b\varepsilon_i \tilde{\omega}_i \bar{\omega}$

En soustrayant les équations de chaque hélice de l'équation de moment selon z, il vient :

$$(J - 4J_r)\dot{r} = - \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \tilde{\Gamma}_i$$

De même en soustrayant les équations des hélices 3 et 1 ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ ), on obtient :

$$J_r(\dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1) = \tilde{\Gamma}_3 - \tilde{\Gamma}_1 - 2b\bar{\omega}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1)$$

et de même, en soustrayant les équations des hélices 4 et 2 ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -1$ ), on obtient :

$$J_r(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_4) = \tilde{\Gamma}_2 - \tilde{\Gamma}_4 - 2b\bar{\omega}(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4)$$

En additionnant les équations des hélices 1 et 3 et en soustrayant celles des hélices 4 et 2, on obtient :

$$J_r \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\omega}_i = \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i$$

Le comportant dynamique du drone se décompose donc en 4 sous-systèmes indépendants. Cette propriété remarquable permet de faciliter grandement l'établissement des lois de contrôle du drone puisque chaque sous-système peut être étudié séparément.

**Q21.** En considérant que  $\dot{\tilde{\omega}}_i = 0$  (régime stationnaire) et en s'aidant des équations précédentes, indiquer pour chaque cas de la figure ?? comment doit on définir les variations de vitesses angulaires  $\tilde{\omega}_i$  afin d'obtenir ces différents mouvements. Préciser quels mouvements supplémentaires apparaissent le cas échéant.

**Solution:**

Cas 1 : translation verticale

Le sous-système d'équations pour obtenir un mouvement vertical fait intervenir la somme des vitesses angulaires et des couples. Il suffit donc d'imposer les mêmes variations (positives) pour obtenir une élévation. Les autres mouvements n'interviennent alors pas car les variations de vitesse étant identiques, elles s'annulent donc deux à deux.

Cas 2 : translation longitudinale

Pour obtenir un mouvement de translation selon  $\vec{x}$ , il faut que l'angle  $\theta$  augmente (positivement) et donc que  $\tilde{\omega}_3$  soit positif, que  $\tilde{\omega}_1$  soit négative et que ces deux variations soient égales en valeur absolue. Les autres variations de vitesses angulaires doivent être nulles pour ne pas avoir d'autres mouvements. La somme est donc également nulle. On constate cependant que le déplacement selon  $x$  entraîne une rotation d'angle  $\theta$  qu'il sera donc nécessaire de contrôler.

Cas 3 : translation latérale

Pour obtenir un mouvement selon  $y$ , il faut que l'angle  $\varphi$  diminue (négativement) et donc que  $\tilde{\omega}_4$  soit positif, que  $\tilde{\omega}_2$  soit négative et que ces deux variations soient égales en valeur absolue. Les autres variations de vitesses angulaires doivent être nulles pour ne pas avoir d'autres mouvements. On constate donc que le déplacement selon  $y$  entraîne une rotation d'angle  $\varphi$  qu'il sera donc nécessaire de contrôler.

Cas 4 : rotation propre

Pour obtenir une rotation autour de  $z$ , il faut que les vitesses soient égales deux à deux et que la somme soit également nulle. Il suffit donc que les variations  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_3$  soient égales et négatives, et que les variations  $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_4$  soient égales et positives, avec  $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_3 = -\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_4$ . La somme reste donc nulle et seul le mouvement de lacet intervient.

### 3.2 Modélisation électro-mécanique des moteurs

**Q22.** Donner l'expression de  $\bar{u}$  en fonction de  $\bar{\omega}$  et des paramètres  $R_m, K_m$  et  $b$ .

**Solution:**

En régime stationnaire, on a les relations

$$\begin{aligned}\bar{u}K_m &= R_m\bar{\Gamma}_i + K_m^2\bar{\omega} \\ \bar{\Gamma}_i &= b\bar{\omega}^2\end{aligned}$$

On en déduit :  $\bar{u} = \frac{R_m b}{K_m}\bar{\omega}^2 + K_m\bar{\omega}$ .

**Q23.** En prenant  $\bar{\omega} = 375 \text{ rad.s}^{-1}$ , vérifier que la tension nécessaire pour obtenir un vol stationnaire est compatible avec la tension maximale  $U_{batt}$  délivrée par la batterie.

**Solution:**

On obtient

$$\bar{u} = \frac{0,6 \cdot \frac{1}{375} 10^{-4}}{10^{-2}} 375^2 + 10^{-2} \cdot 375 = 0,6 \cdot 375 \cdot 10^{-2} + 3,75 = 2,25 + 3,75 = 6V.$$

Ce qui est bien inférieur à 11V.

**Q24.** Dédurre des relations caractérisant le moteur une équation couplant  $\tilde{\Gamma}_i, \tilde{u}_i$  et  $\tilde{\omega}_i$ . Linéariser également l'équation de dynamique reliant  $\tilde{\omega}_i$  et sa dérivée à  $\tilde{\Gamma}_i$ .

**Solution:**

En linéarisant les équations précédentes autour du point stationnaire, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \frac{R_m}{K_m}\tilde{\Gamma}_i + \frac{L_m}{K_m}\dot{\tilde{\Gamma}}_i + K_m\tilde{\omega}_i \\ J_r\dot{\tilde{\omega}}_i &= \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega}\tilde{\omega}_i\end{aligned}$$

**Q25.** Donner l'expression de la constante de temps électrique  $\tau_{el}$  en fonction de  $R_m$  et  $L_m$  ainsi que l'expression de la constante de temps mécanique  $\tau_m$  en fonction de  $J_r, b$  et  $\bar{\omega}$ . Faire l'application numérique.

**Solution:**

L'équation électrique fait apparaître la constante de temps :  $\tau_{el} = \frac{L_m}{R_m}$   
 L'équation de dynamique fait apparaître la constante de temps  $\tau_m = \frac{J_r}{2b\bar{\omega}}$   
 A.N :  $\tau_{el} = \frac{40 \cdot 10^{-6}}{0,6} \approx 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  et  $\tau_m = \frac{3,4 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot \frac{1}{375} \cdot 10^{-4} \cdot 375} = 0,17 \text{ s}$ .

**Q26.** Justifier que l'on puisse écrire pour chaque moteur l'équation suivante :

$$J_r \dot{\tilde{\omega}}_i = (\tilde{u}_i - K_m \tilde{\omega}_i) \frac{K_m}{R_m} - 2b\bar{\omega} \tilde{\omega}_i$$

**Solution:**

La constante de temps électrique étant négligeable devant la constante de temps mécanique, on peut donc négliger le temps d'établissement du courant dans le circuit électrique. On a alors :  
 $\tilde{u}_i = \frac{R_m}{K_m} \tilde{\Gamma}_i + K_m \tilde{\omega}_i$ . En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on aboutit à la relation demandée.

## 4 Contrôle de l'altitude du quadricoptère

L'objectif de cette partie est de contrôler l'altitude du quadricoptère grâce à un asservissement tenant compte de l'altitude de consigne  $z_{ref}$  et de la mesure de distance fournie par le sonar (capteur à ultrason) situé sous le drone et pointant vers le sol.

### 4.1 Modélisation du sous-système vertical

**Q27.** Montrer que

$$V_z(s) = \frac{Z(s)}{U_z(s)} = \frac{\alpha_z}{s^2(s + \beta_z)}$$

où l'on précisera les expressions de  $\alpha_z$  et  $\beta_z$  en fonction de  $R_m$ ,  $K_m$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $M$ ,  $J_r$  et  $\bar{\omega}$ .

**Solution:**

Les équations considérées sont les suivantes :

$$\dot{w} = (2\bar{\omega} \frac{a}{M}) \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \text{ avec } \dot{z} = w$$

$$J_r \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\tilde{\omega}}_i = \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i \text{ ou compte tenu de la question précédente :}$$

$$J_r \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\tilde{\omega}}_i = \frac{K_m}{R_m} \sum_{i=1}^{i=4} (\tilde{u}_i - K_m \tilde{\omega}_i) - 2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i$$

$$\text{En posant } \omega_z = \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i, \text{ on obtient : } \ddot{z} = 2\bar{\omega} \frac{a}{M} \omega_z \text{ et } J_r \dot{\omega}_z = \frac{K_m}{R_m} (u_z - K_m \omega_z) - 2b\bar{\omega} \omega_z$$

En passant dans le domaine symbolique on obtient :

$$(J_r s + (2b\bar{\omega} + \frac{K_m^2}{R_m})) \Omega_z = \frac{K_m}{R_m} U_z \text{ et } s^2 Z = 2\bar{\omega} \frac{a}{M} \Omega_z$$

$$\text{Ainsi } \frac{Z}{U_z} = 2 \frac{\frac{\bar{\omega} a K_m}{J_r M R_m}}{s^2 (s + \frac{2b\bar{\omega} + \frac{K_m^2}{R_m}}{J_r})}$$

$$\text{On pose alors } \alpha_z = \frac{2\bar{\omega} a K_m}{J_r M R_m} \text{ et } \beta_z = \frac{2b\bar{\omega} + \frac{K_m^2}{R_m}}{J_r} \text{ pour aboutir au résultat demandé.}$$

### 4.2 Mesure de l'altitude

**Q28.** En supposant que le drone vole sensiblement à l'horizontal et à une distance suffisamment éloignée du sol, montrer, en vous appuyant sur un schéma, comment un tel capteur permet de mesurer l'altitude du drone  $z_{mes}$ . Exprimer  $z_{mes}$  en fonction de  $v_s$  et  $\Delta t$ .

**Solution:**

De façon très schématique, le principe de fonctionnement d'un tel sonar peut être illustré sur la figure 1. En supposant que le sol et le drone sont parfaitement parallèles, on a la relation  $z_{mes} = \frac{\cos \theta v_s \Delta t}{2}$ . Le drone volant suffisamment loin,  $\cos \theta \approx 1$  d'où  $z_{mes} = \frac{v_s \Delta t}{2}$ . Au premier ordre (hypothèse de travail de cette étude), l'inclinaison du drone ne joue pas.

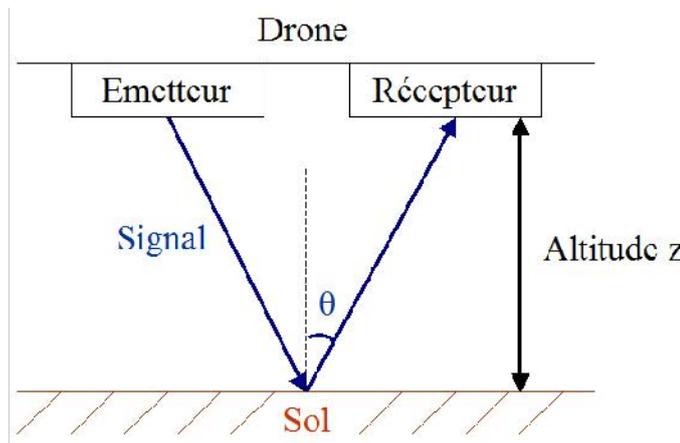


FIGURE 1 – CORRECTION - Schéma de principe de la mesure du sonar

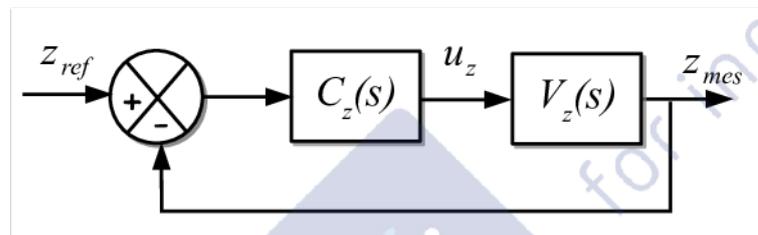


FIGURE 2 – CORRECTION - Schéma de principe de l'asservissement de la voie verticale

### 4.3 Élaboration de la commande

**Q29.** Réaliser un schéma bloc de l'asservissement, avec un correcteur  $C_z(s)$ , qui permet de suivre une altitude de consigne  $z_{ref}$ .

**Solution:**

Le schéma-bloc est donné sur la figure 2.

**Q30.** Justifier simplement que le système est instable avec un correcteur Proportionnel mais qu'un correcteur Proportionnel-Dérivé de la forme  $C_z(s) = K_z(1 + \tau_z s)$  permet de le stabiliser. Donner la condition sur  $\tau_z$  correspondante.

**Solution:**

La phase de  $V_z(s)$  est toujours inférieure à  $-180^\circ$ , donc un correcteur proportionnel (qui n'apporte pas de phase positive) ne permet pas de stabiliser le système. Le produit de la fonction de transfert en boucle ouverte  $C_z(s)V_z(s)$  vaut  $C_z(s)V_z(s) = \frac{K_z \alpha_z (1 + \tau_z s)}{s^2 (s + \beta_z)}$ . Le système bouclé est stable si  $\tau_z > \frac{1}{\beta_z}$ . En effet, la phase de  $C_z(s)V_z(s)$  est alors toujours supérieure à  $-180^\circ$  comme le montrerait le diagramme de Bode en phase (asymptotique) associé.

**Q31.** Indiquer pourquoi en pratique on utilise plutôt un correcteur à avance de phase de fonction de transfert  $C_z(s) = K_z \frac{1 + \tau_z s}{1 + a \tau_z s}$  plutôt qu'un correcteur Proportionnel-Dérivé. Préciser si  $a < 1$  ou  $a > 1$ .

**Solution:**

Un correcteur Proportionnel-Dérivé apporte un gain très important à haute fréquence, ce qui amplifie le bruit de la mesure. On utilise donc à la place un correcteur à avance de phase qui n'a plus le terme dérivateur à hautes fréquences (quand  $s$  est grand). Pour que ce soit un avance de phase, il faut nécessairement que  $a < 1$  pour que la phase négative apportée par le dénominateur (asymptotiquement à  $\frac{1}{a \tau_z}$ ) se situe à une fréquence supérieure à la phase positive apportée par le numérateur (asymptotiquement à  $\frac{1}{\tau_z}$ ).

**Q32.** Justifier que les critères de précision, dépassement et rapidité du cahier des charges sont respectés.

**Solution:**

Les trois points suivants sont à relever :

- pas d'erreur statique : la valeur finale est  $z_{mes} = 1m$  pour une consigne  $z_{ref} = 1m$ ,
- dépassement de  $5\% < 10\%$ ,
- temps de réponse à  $5\%$  vaut  $0,5s < 0,8s$ .

## 5 Contrôle du cap du quadrirotor

L'objectif de cette partie est de contrôler le cap du quadrirotor (direction de l'avant du drone par rapport au Nord), angle noté  $\psi$ , grâce à un asservissement tenant compte du cap de consigne  $\psi_{ref}$  et de la mesure de  $\psi$  fournie par le magnétomètre tri-axe.

### 5.1 Modélisation du sous-système de cap

**Q33.** Montrer que

$$V_\psi(s) = \frac{\Psi(s)}{U_\psi(p)} = K_0 \cdot \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

où l'on précisera les expressions de  $K_0$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  en fonction de  $K_m$ ,  $R_m$ ,  $J_r$ ,  $J$ ,  $b$ ,  $\bar{\omega}$ .

**Solution:**

En utilisant les équations et en combinant les équations en  $i$ , les différentes équations du sous-système de lacet s'écrivent en notation de Laplace :

$$\begin{aligned} p\psi &= r \\ (J - 4J_r)pr &= -(J_r p + 2b\bar{\omega})\omega_\psi \\ (J_r p + \frac{K_m^2}{R_m} + 2b\bar{\omega})\omega_\psi &= \frac{K_m}{R_m} U_\psi, \end{aligned}$$

où  $\omega_\psi$  est la transformée de Laplace de  $\dot{\omega}_\psi$ . On en déduit la forme recherchée avec

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_m}{R_m(J - 4J_r)} \frac{2b\bar{\omega}}{K_m^2/R_m + 2b\bar{\omega}} \\ \tau_1 &= \frac{J_r}{2b\bar{\omega}} \\ \tau_2 &= \frac{J_r}{K_m^2/R_m + 2b\bar{\omega}}. \end{aligned}$$

### 5.2 Mesure du cap

**Q34.** Tracer, en le justifiant, les évolutions temporelles de  $V_s$ ,  $V_e$  et  $I$  en régime établi.

**Solution:**

Lorsque  $V_e < V_h$ , alors  $V_s = V_r$ . Le circuit RL est décrit par l'évolution temporelle suivante :  $L \frac{dI}{dt} + R_b I = V_r$ . On obtient une évolution de  $I$  croissante de constante de temps  $L/R_b$ . Sachant que  $V_e = IR_b$ ,  $V_e$  a la même évolution. Lorsque  $V_e = V_h$  alors  $V_s = 0$ ,  $I$  vérifie donc l'équation suivante :  $L \frac{dI}{dt} + R_b I = 0$ , ce qui correspond à une décroissance exponentielle jusqu'à une valeur telle que  $V_e = V_b$ .  
On obtient des oscillations décrites sur la figure 3.

Un système non étudié ici permet de mesurer la période  $T_0$  du signal de sortie  $V_s$ .

**Q35.** Montrer que l'expression de la période d'oscillation  $T_0$  du signal de sortie est de la forme  $T_0 = \frac{L}{R_b} K_0$ , où  $K_0$  sera donné en fonction de  $V_r$ ,  $V_h$  et  $V_b$ .

**Solution:**

On pose  $\tau = L/R_b$  la constante de temps du circuit. Dans la phase de montée :  $V_e = V_r + A \exp(-t/\tau)$ . En supposant pour  $t=0$  (début d'une oscillation),  $V_e = V_b$ , on obtient :  $V_e = V_r + (V_b - V_r) \exp(-t/\tau)$ . L'instant  $t_1$  tel que  $V_e = V_h$  vaut donc  $t_1 = \tau \ln \left( \frac{V_r - V_b}{V_r - V_h} \right)$ . De même, on trouve que la durée  $T_0 - t_1$  nécessaire pour que  $V_e$  redescende à  $V_b$  vaut  $T_0 - t_1 = \tau \ln \left( \frac{V_h}{V_b} \right)$ .  
Par conséquent,  $T_0 = \frac{L}{R_b} K_0$  avec  $K_0 = \ln \left( \frac{V_r - V_b}{V_r - V_h} \right) + \ln \left( \frac{V_h}{V_b} \right)$ .

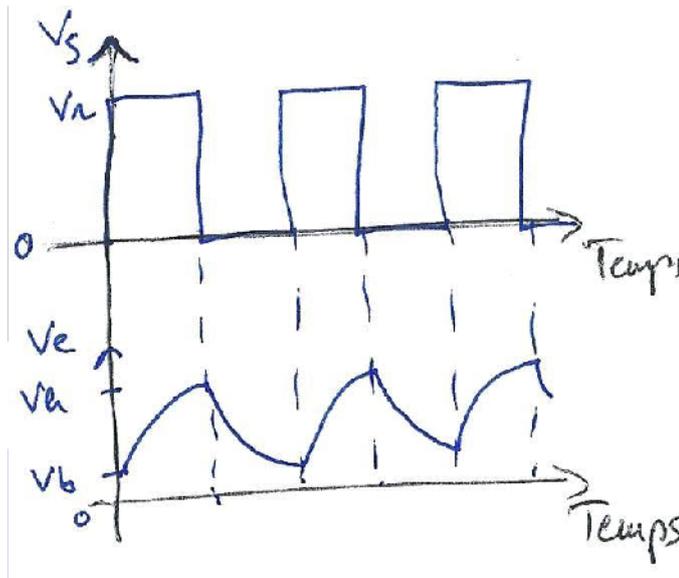


FIGURE 3 – CORRECTION - Evolution temporelle des tensions

**Q36.** Montrer que la mesure de cette période  $T_0$  permet de déterminer le champ  $H_{ext}$ , dont on donnera l'expression en fonction de  $T_0, \sigma, R_b, k_0, K_0, L_0, V_r, V_h, V_b$ .

**Solution:**

D'après ce qui précède, on a les relations  $L = \frac{T_0 R_b}{K_0} = L_0 \exp\left(-\frac{(H_{ext} + k_0 \langle I \rangle)^2}{\sigma^2}\right)$ . D'où  $H_{ext} = \sigma \sqrt{\left(\ln\left(\frac{K_0 L_0}{R_b T_0}\right)\right) - k_0 \langle I \rangle}$ .

Sachant que la valeur moyenne de l'intensité aux bornes de la bobine est nulle, on détermine  $\langle I \rangle = \frac{\langle V_r \rangle}{R_b}$ .

Or  $\langle V_r \rangle = \frac{V_r t_1}{T_0} = \frac{V_r L}{T_0 R_b} \ln\left(\frac{V_r - V_b}{V_r - V_h}\right) = \frac{V_r}{K_0} \ln\left(\frac{V_r - V_b}{V_r - V_h}\right)$ .

D'où  $H_{ext} = \sigma \sqrt{\left(\ln\left(\frac{K_0 L_0}{R_b T_0}\right)\right) - \frac{k_0 V_r}{K_0 R_b} \ln\left(\frac{V_r - V_b}{V_r - V_h}\right)}$ .

**Q37.** Justifier que ce système permet de déterminer le champ extérieur  $H_{ext}$  en s'affranchissant de l'incertitude sur la valeur de  $R_b$ .

**Solution:**

La différence entre les deux circuits est dans l'orientation de la bobine par rapport au reste du circuit. Avec les conventions du second circuit, comme la bobine n'a physiquement pas bougé par rapport au champ extérieur constant, on a maintenant la relation  $L = L_0 \exp\left(-\frac{(H_0 - H_{ext})^2}{\sigma^2}\right)$ .

$R_b$  est constante sur plusieurs cycles de mesure de  $T_0$  et  $T'_0$ , respectivement périodes d'oscillation de  $V_s$  (première configuration) et  $V'_s$  (seconde configuration). Par conséquent, on a le système d'équations suivant :

$$H_{ext} = \sigma \sqrt{\left(\ln\left(\frac{K_0 L_0}{R_b T_0}\right)\right) - \frac{k_0 V_r}{K_0 R_b} \ln\left(\frac{V_r - V_b}{V_r - V_h}\right)}$$

$$H_{ext} = \sigma \sqrt{\left(\ln\left(\frac{K_0 L_0}{R_b T'_0}\right)\right) + \frac{k_0 V_r}{K_0 R_b} \ln\left(\frac{V_r - V_b}{V_r - V_h}\right)}$$

On a donc deux équations à deux inconnues  $H_{ext}$  et  $R_b$ , ce qui permet d'avoir une mesure du champ  $H_{ext}$  indépendante de  $R_b$  (c'est-à-dire indépendante de la température).

**Q38.** Le drone volant sensiblement à l'horizontale, justifier qu'il est possible de remonter à une mesure de l'angle de lacet  $\psi_{mes}$  avec seulement 2 magnétomètres placés le long des axes horizontaux du drone ( $\vec{x}, \vec{y}$ ).

**Solution:**

Chacun des magnétomètres mesure la projection  $\vec{H}_T$  selon son axe. Étant donné que le drone est supposé être à l'horizontal (découplage des sous-systèmes), les deux champs magnétiques  $H_{mes,x}$  et  $H_{mes,y}$ , respectivement mesurés par le magnétomètre aligné selon  $\vec{x}$  et selon  $\vec{y}$ , sont liés avec les composantes de  $\vec{H}_T$  connues par la relation suivante :

$$(H_{mes,x}, H_{mes,y}) = Rot(\psi) \cdot (H_{Tx}, H_{Ty}).$$

soit

$$\begin{aligned} H_{mes,x} \cos\psi - H_{mes,y} \sin\psi &= H_{Tx} \\ H_{mes,y} \cos\psi + H_{mes,x} \sin\psi &= H_{Ty} \end{aligned}$$

On peut donc en déduire  $\psi_{mes}$  à partir des sinus et cosinus.

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{H_{Tx}H_{mes,x} + H_{Ty}H_{mes,y}}{H_{mes,x}^2 + H_{mes,y}^2} \\ \sin\psi &= \frac{H_{Tx}H_{mes,y} - H_{Ty}H_{mes,x}}{H_{mes,x}^2 + H_{mes,y}^2} \end{aligned}$$

**Q39.** En pratique, la mesure de cap a une fiabilité limitée. Proposer une raison qui explique cet inconvénient.

**Solution:**

La fiabilité de la mesure est limitée principalement à cause des perturbations magnétiques non connues : moteurs et batterie pour le drone, ainsi que l'environnement extérieur tel que des masses métalliques ou buildings (particulièrement vrai en vol indoor). A ce moment-là, l'hypothèse de bien connaître  $H_{ext}$  n'est plus valable..

### 5.3 Analyse de la réponse indicielle

Un contrôleur proportionnel  $C_\psi(s)$  est utilisé afin que le drone puisse atteindre son cap de référence  $\psi_{ref}$  en tenant compte de la mesure  $\psi_{mes}$  fournie par les magnétomètres. On suppose que cette mesure est parfaite.

**Q40.** Les figures de l'annexe 2 présentent 4 réponses temporelles à une entrée en échelon unitaire. Déterminer quelle est celle qui correspond à la réponse indicielle du système bouclé. Justifier, sans calcul, pour les autres cas la raison qui invite à les écarter. En déduire la conformité ou non au cahier des charges.

**Solution:**

La bonne réponse indicielle est la numéro 3. La justification est la suivante (pas besoin de calculer de fonction de transfert en boucle fermée!) :

- Courbe 1 : impossible car le sous-système bouclé est stable (phase de la FTBO est toujours  $> -180^\circ$  puisque  $\tau_2 < \tau_1$  - cf. leur dénominateur),
- Courbe 2 : impossible car l'erreur statique doit être nulle : justifié directement par la présence d'un terme en  $\frac{1}{s}$  au dénominateur, ou bien application du théorème de la valeur finale à la FTBF,
- Courbe 4 : impossible car la tangente à l'origine doit être nulle : justifié directement par la présence d'un terme en  $\frac{1}{s^2}$  au dénominateur, ou bien application du théorème de la valeur initiale à la dérivée sur la FTBF.

L'erreur statique est bien nulle. Cependant le dépassement est supérieur à 15%. On en conclut que la réponse du sous-système de cap avec le correcteur considéré n'est pas conforme au cahier des charges.

## 6 Contrôle de l'assiette du quadrirotor

### 6.1 Mesure accélérométrique et gyrométrie

**Q41.** En supposant que la mesure accélérométrique n'a pas de défaut, montrer alors qu'elle permet de

remonter à la valeur de l'angle de tangage  $\theta$ . Indiquer pourquoi un autre accéléromètre placé selon l'axe  $(O, \vec{z})$  ne permettrait pas de déterminer cet angle  $\theta$ .

**Solution:**

Par définition, la mesure accélérométrique vaut  $\ddot{u} - g \sin(\theta) \approx -g \sin(\theta)$  avec l'approximation de l'énoncé. Comme on est autour du vol stationnaire (approximation petits angles), on obtient  $-g\theta$ . L'autre accéléromètre suivant  $(O, \vec{z})$  mesurerait  $g \cos(\theta)$ , ce qui ne permet pas de remonter à  $\theta$  à cause de l'incertitude sur le signe de l'angle de tangage.

**Q42.** Justifier simplement que la mesure accélérométrique permet de ne déterminer ni  $\theta$ , ni  $q = \dot{\theta}$ . Montrer que la mesure gyroscopique ne le permet pas non plus.

**Solution:**

Le bruit de la mesure accélérométrique a une forte intensité, ce qui empêche de mesurer précisément  $\theta$ . La dérivée de ce signal pour obtenir  $q$  ne ferait qu'amplifier ce problème. En ce qui concerne la mesure gyroscopique, la présence d'une dérive dans la mesure va faire une erreur constante sur la mesure de  $q$ , et une erreur divergente sur la mesure de  $\theta$  : l'intégration de  $0,1^\circ/s$  introduit une erreur de  $10^\circ$  en 100s, ce qui est bien trop grand.

## 6.2 Utilisation d'un observateur

**Q43.** En ne considérant pas le bruit accélérométrique  $\epsilon_a$ , montrer que l'observateur permet d'estimer asymptotiquement l'angle  $\theta$  et la dérive  $q_b$  sans erreur, c'est-à-dire que les limites en l'infini de  $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$  et  $e_b = \hat{q}_b - q_b$  tendent vers 0. En déduire que l'observateur permet également asymptotiquement d'estimer la vitesse de rotation  $q$  sans erreur.

**Solution:**

Sans considérer  $\epsilon_a$ , on a  $a_m = -g\theta$ . En posant  $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$  et  $e_b = \hat{q}_b - q_b$ , les équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_\theta \\ \dot{e}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -gl_1 & -1 \\ gl_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_\theta \\ e_b \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} e_\theta \\ e_b \end{pmatrix}$$

Le discriminant de  $L$  vaut  $\lambda^2 + gl_1\lambda + gl_2$ . Les deux erreurs convergent donc bien vers 0. En posant  $\hat{q} = q_m - \hat{q}_b$ , on obtient  $\hat{q} = q + q_b - \hat{q}_b$ , donc  $\hat{q}$  tend bien vers  $q$ .

**Q44.** Montrer que l'observateur permet également de filtrer le bruit sur l'estimation de  $\theta$  par rapport à l'estimation qui aurait été effectuée à partir uniquement de la mesure accélérométrique :  $\hat{\theta} = -\frac{a_m}{g}$ .

**Solution:**

Une méthode possible est de passer par la notation de Laplace. Considérons  $\epsilon_a(p)$  la "transformée de Laplace du bruit" : par exemple une raie sinus très haute fréquence. En utilisant la mesure accélérométrique, la meilleure estimation de  $\theta$  est  $\hat{\theta} = -\frac{a_m}{g} = \theta - \frac{\epsilon_a(p)}{g}$ . On a donc la relation

$$\frac{e_\theta(p)}{\epsilon_a(p)} = -\frac{1}{g}$$

Si on considère les équations de l'observateur, on a maintenant :

$$\frac{e_\theta(p)}{\epsilon_a(p)} = -\frac{l_1 p + l_2}{p^2 + l_1 g p + l_2 g}$$

Cette fonction passe-bas de l'observateur entre le bruit accélérométrique et l'erreur d'estimation de tangage lui permet d'avoir donc également une fonction de filtrage.

## 7 Synthèse de la stratégie de contrôle du quadrirotor

L'objectif de cette partie est de faire un schéma-bloc de synthèse de la stratégie de contrôle du quadrirotor développée dans cette étude.

**Q45.** En utilisant la description des différents contrôleurs et observateurs ainsi que les résultats de la modélisation dynamique, compléter les blocs en pointillés du schéma-bloc de synthèse du document

réponse et spécifier la matrice  $P$  introduite dans ce schéma définie par : 
$$P = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\theta \\ U_\varphi \\ U_z \\ U_\psi \end{pmatrix}$$

**Solution:**

La correction est donnée en rouge sur le schéma. La matrice recherchée est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Q46.** Pour les sous-systèmes horizontaux, une fonction de plus haut niveau peut être mise en place afin d'atteindre des coordonnées de référence (dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ),  $x_{ref0}, y_{ref0}$ , définies par un utilisateur. Compléter la zone en tirets sur le schéma-bloc du document réponse de manière à atteindre cet objectif, en ajoutant deux autres boucles de contrôle dont les contrôleurs  $C_x(s)$  et  $C_y(s)$  ne seront pas explicités.

**Solution:**

La correction est donnée en marron sur le schéma. La matrice introduite est :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \bar{\psi} & \sin \bar{\psi} \\ -\sin \bar{\psi} & \cos \bar{\psi} \end{pmatrix}$$

