

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2013

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

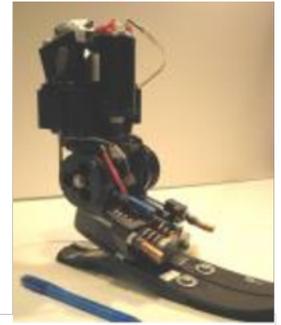
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

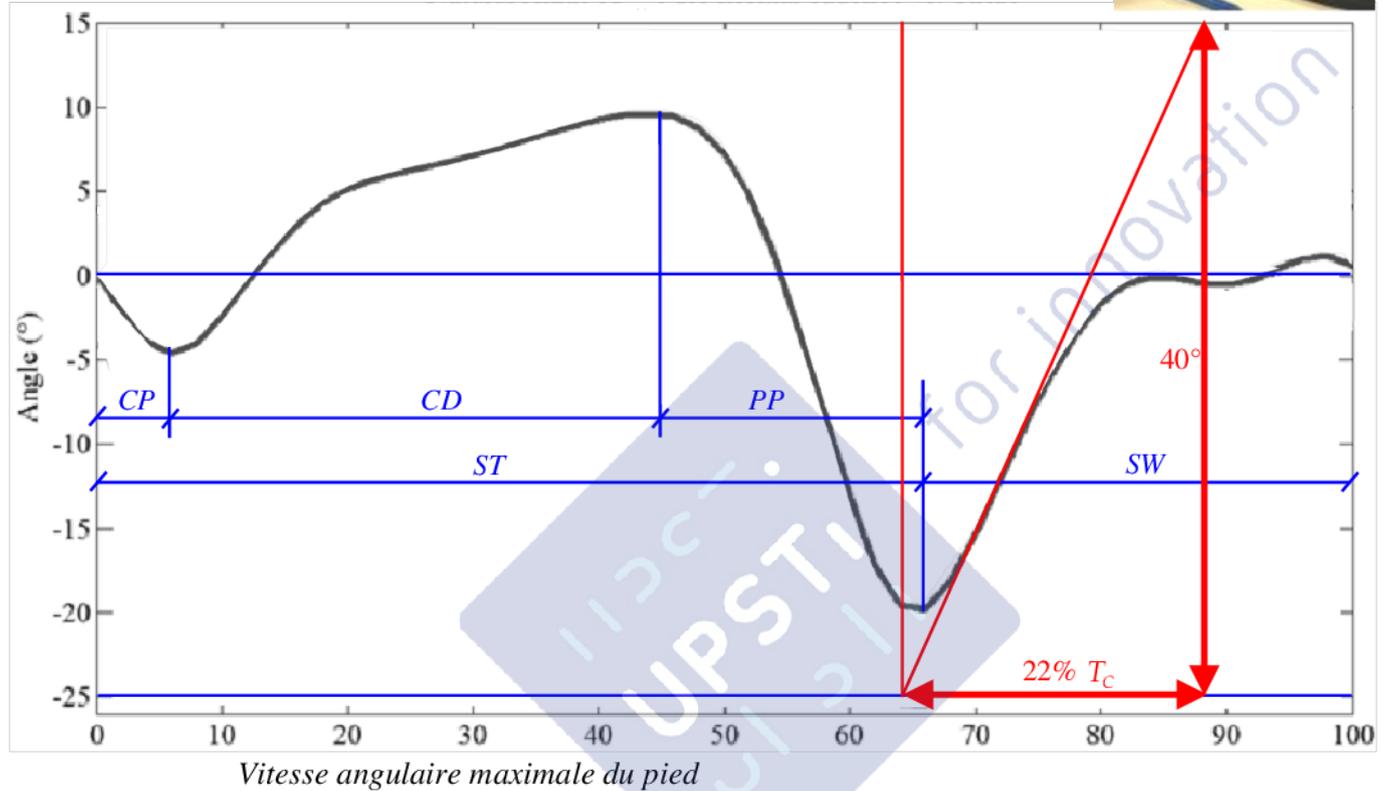
L'équipe UPSTI

PROTHESE ACTIVE TRANSTIBIALE



Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Question 1. Identification des phases de la marche



Un cycle est formé de deux pas. La marche normale est effectuée à une cadence $Cad = 105$ pas/mn. Le temps de

cycle est donc : $T_C = \frac{2 \cdot 60}{Cad}$. A.N. : $T_C = 1,14$ s

La vitesse de rotation maximale de la cheville est observée durant la sous phase SW. La mesure de la pente sur la

courbe fournie permet de calculer : $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = \frac{40}{0,217 \cdot T_C}$ en $^\circ/s$. Soit encore $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = 2,82$ rad/s

Définition du cahier des charges

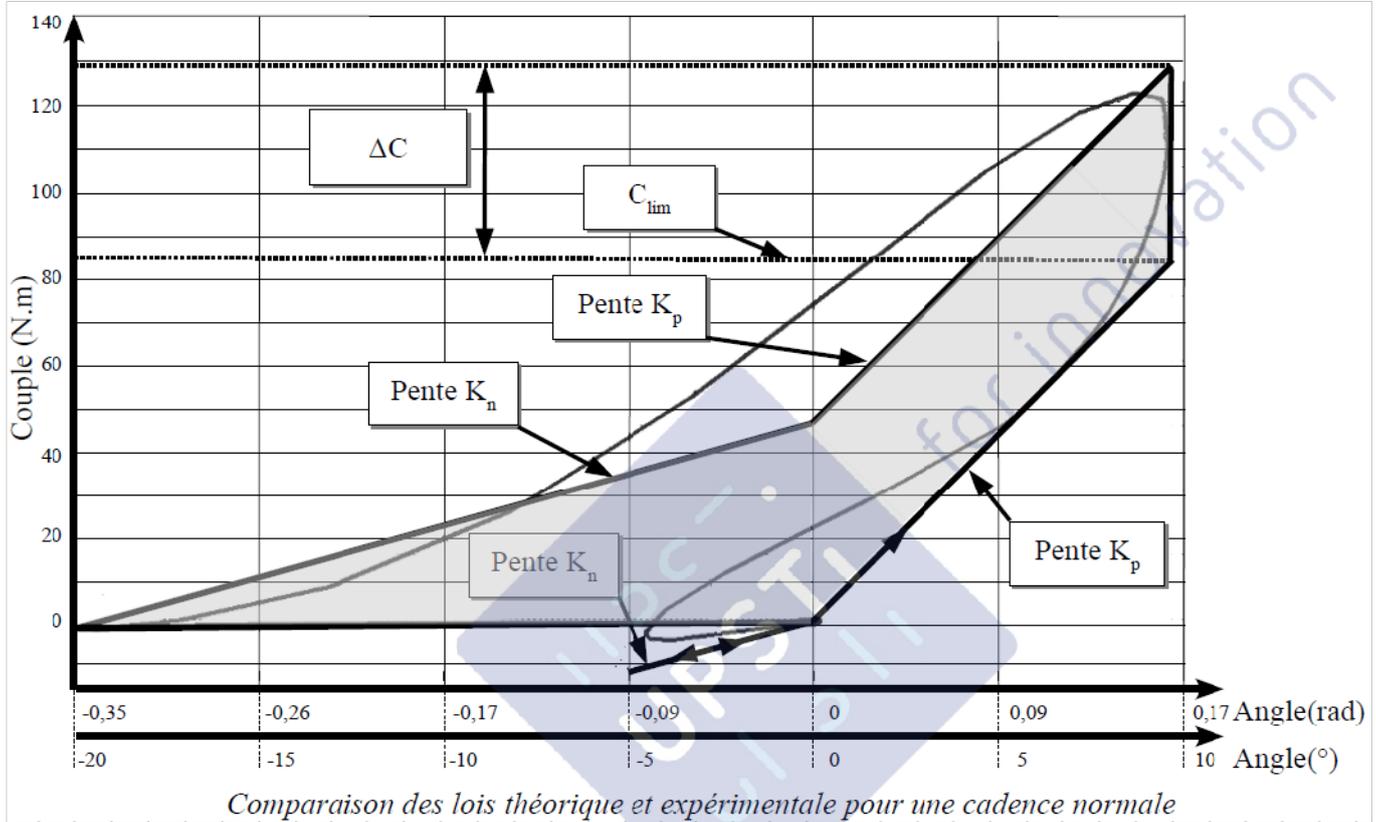
Question 2. Vérification des critères du cahier des charges

Critères	Valeurs du CDC	Valeurs relevées
Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire Propulsive : -25° Dorsiflexion : 15°	-20° 10°
Vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{\max}$	$5,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$	$3,1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
Couple maximal à fournir	140 Nm	127 Nm
Travail maximal à fournir	20 J	14 J

Conclusion : Les valeurs relevées sont toutes compatibles avec les performances attendues ; le cahier des charges convient.

Définition de la loi de consigne

Question 3. Détermination des paramètres de la loi de consigne



$K_n = 134 \text{ Nm/rad}$	$K_p = 516 \text{ Nm/rad}$	$C_{lim} = 85 \text{ Nm}$	$\Delta C = 44 \text{ Nm}$
----------------------------	----------------------------	---------------------------	----------------------------

Travail théorique

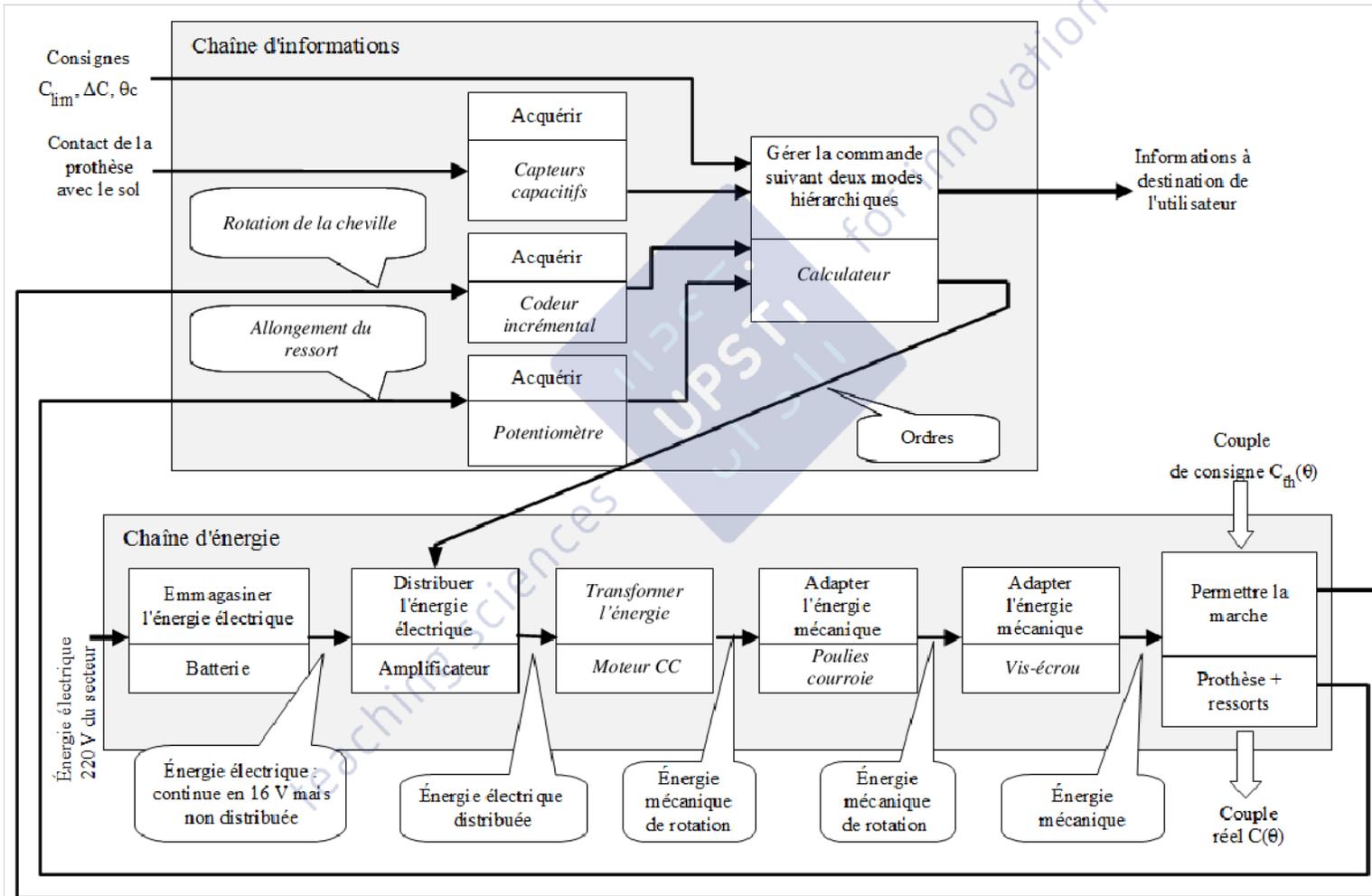
L'aire sous la courbe correspond au travail théorique fourni par la prothèse : $W_{th} = \Delta C \left(\theta_{max} + \frac{|\theta_{min}|}{2} \right)$, soit encore

$$W_{th} = \Delta C \left(\frac{C_{lim}}{K_p} + \frac{\Delta C}{2K_n} \right) \text{ A.N. : } W_{th} = 14,9 \text{ J}$$

Conclusion : L'écart entre l'énergie calculée à partir de la loi théorique et l'énergie relevée expérimentalement est inférieur à 7% ; cet écart est acceptable et valide la loi de commande proposée.

Organisation structurelle de la prothèse active

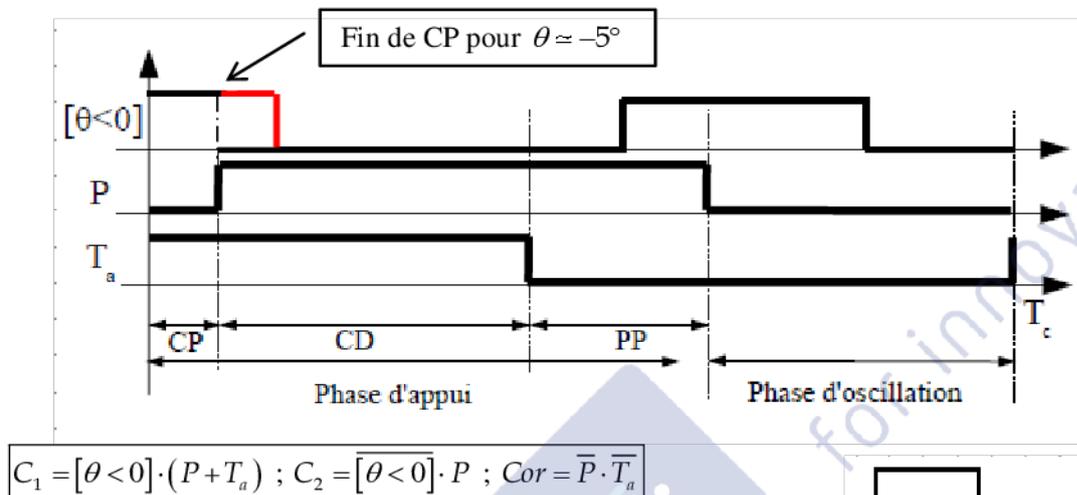
Question 4. Chaîne d'énergie et chaîne d'informations



Gestion des modes de commande

Question 5. Variables binaires de commande

Dans un premier temps, il convient de corriger le chronogramme fourni, pour tenir compte de la transition entre les sous-phases CP et CD correspondant à $\theta \approx -5^\circ$ (cf. figure 6).



Question 6. Grafset du mode de commande C3

Modélisation de la chaîne de transmission

Question 7. Longueur du vérin en fonction de l'angle du basculeur

L'équation de fermeture géométrique du mécanisme s'établit ainsi :

$$OA\dot{A} + AB\dot{B} - OB\dot{B} = \vec{0}, \text{ soit encore } a \cdot \dot{z}_0 - \lambda(t) \cdot \dot{y}_3 + b \cdot \dot{y}_2 = 0$$

On projette cette équation dans la base vectorielle B_2 :

$$\begin{cases} a \sin \alpha - \lambda \cos(\beta - \alpha) + b = 0 \\ a \cos \alpha - \lambda \sin(\beta - \alpha) = 0 \end{cases} \text{ . On en déduit :}$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha}$$

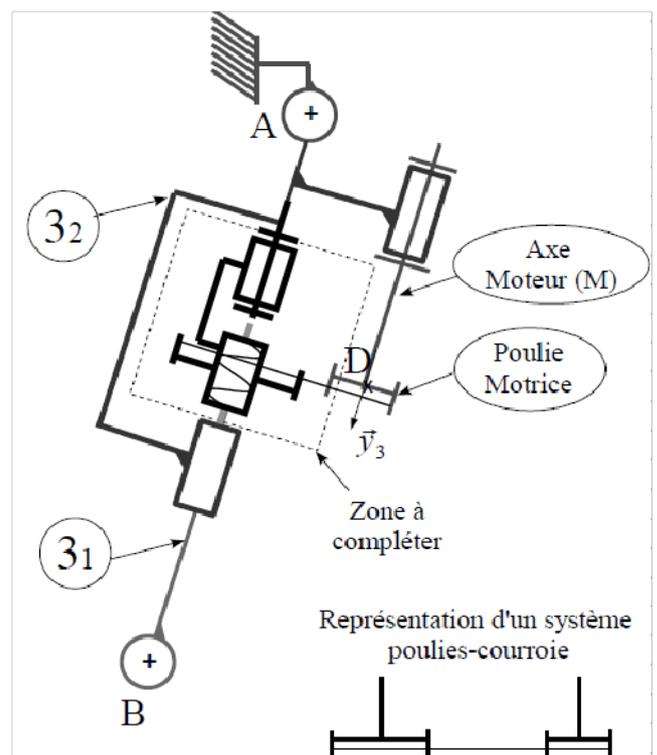
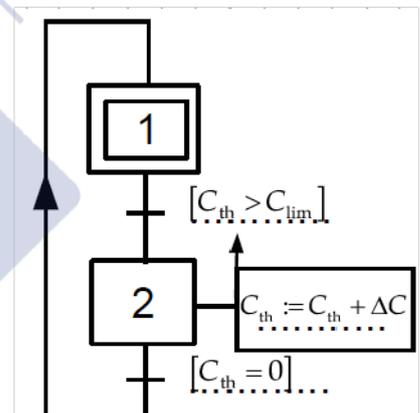
Forme linéarisée

A partir de l'illustration 9, on peut proposer une forme linéarisée de cette fonction pour un angle α du basculeur appartenant à l'intervalle $]-15^\circ; 25^\circ[$:

$$\lambda_{[mm]} = 123 + 0,58 \cdot \alpha_{[^\circ]}$$

De ce fait, $\frac{d\lambda}{dt} = K_G \frac{d\alpha}{dt}$, avec $K_G = 33,2 \text{ mm/rad}$

Question 8. Schéma cinématique du vérin électrique



Question 9. Fonctions de transfert

$$H_4(p) = \frac{1}{p}; \quad H_5(p) = \frac{1}{R_T}$$

Rapport de vitesse

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{K_G} \cdot k \left(\frac{-p_v}{2\pi} \right) \omega_M; \text{ le signe « - » est dû au pas à droite de l'ensemble vis écrou.}$$

$$\text{D'où : } R_T = \frac{-k p_v}{2\pi K_G}. \text{ A.N. : } R_T = 6,8 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Dès lors, } \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = R_T \frac{\pi N_M}{30}. \text{ A.N. : } \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = 5,4 \text{ rad/s}$$

Conclusion : La vitesse de rotation de la cheville obtenue à partir de la vitesse de rotation nominale du moteur (fonctionnement à vide) est supérieure à l'exigence du cahier des charges (5,2 rad/s). De ce point de vue, le moteur est validé.

Modélisation du comportement inertiel du pied artificiel

Question 10. Position du centre d'inertie ; forme simplifiée de la matrice d'inertie

$(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est plan de symétrie du pied artificiel ; alors :

- Le centre d'inertie G appartient à ce plan

- La matrice d'inertie est de la forme $I_G = \begin{bmatrix} L_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & L_{YY} & L_{YZ} \\ 0 & L_{YZ} & L_{ZZ} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

$$\text{Matrice d'inertie numérique } I_G = \begin{bmatrix} 2,19 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 4,74 \cdot 10^{-3} & -2,76 \cdot 10^{-3} \\ 0 & -2,76 \cdot 10^{-3} & 2,22 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Moment d'inertie du pied

On détermine le moment d'inertie du pied selon l'axe (O, \vec{x}) par le théorème de Huygens :

$$J_P = L_{XX} + M(y_{OG}^2 + z_{OG}^2). \text{ A.N. : } J_P = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Question 11. Inertie équivalente de l'ensemble {pied+arbre moteur}

On note Σ l'ensemble {pied+arbre moteur}. L'énergie cinétique de cet ensemble dans le référentiel tibia se calcule ainsi :

$$T(\Sigma/0) = T(\text{pied}/0) + T(\text{arbre moteur}/0), \text{ soit } T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_P \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_M \omega_M^2. \text{ On en déduit :}$$

$$T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_P \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_M}{R_T^2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \text{ L'inertie équivalente de l'ensemble \{pied+arbre moteur\} est :}$$

$$J_{\text{équi}} = J_P + \frac{J_M}{R_T^2} \quad \text{A.N. : } J_{\text{équi}} = 0,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

L'inertie du pied ($6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) est négligeable devant celle de l'arbre moteur ($0,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) dans la dynamique de l'ensemble {pied+arbre moteur} en rotation autour de l'axe (O, \dot{x}) .

Comportement dynamique de la prothèse

Question 12. Relation entre C et F_{RS}

On isole le pied 1, soumis à :

- L'action du tibia 0
- L'action des ressorts
- Au couple extérieur

Le théorème du moment dynamique appliqué en O au pied 1 en mouvement dans le référentiel tibia 0 supposé galiléen, en projection sur \vec{x} , s'écrit :

$$\underbrace{\delta(O, 1/0) \cdot \dot{x}}_{=0} = \underbrace{\overline{M}(O, 0 \rightarrow 1) \cdot \dot{x}}_{=0} + \underbrace{\overline{M}(O, \text{ressorts} \rightarrow 1) \cdot \dot{x}}_{O\dot{S} \wedge F_{RS} \cdot \vec{n}_1} - C \cdot \dot{x}$$

inertie négligée liaison parfaite

$$\text{D'où : } \boxed{C = b F_{RS} \cos(\delta + \theta - \alpha)}$$

Question 13. Relation simplifiée à l'ordre 0 autour de la position repos

On pose $\delta = \delta_R$, $\theta = \theta_R + \Delta\theta$ et $\alpha = \alpha_R + \Delta\alpha$. Alors, la relation obtenue à la question précédente s'écrit :

$$C = b F_{RS} \left[\cos(\delta_R - \alpha_R) \underbrace{\cos(\Delta\theta - \Delta\alpha)}_{=1 \text{ à l'ordre } 0} - \sin(\delta_R - \alpha_R) \underbrace{\sin(\Delta\theta - \Delta\alpha)}_{=0 \text{ à l'ordre } 0} \right]. \text{ On en déduit :}$$

$C = d_0 F_{RS}$ avec $\boxed{d_0 = b \cos(\delta_R - \alpha_R)}$. L'allongement des ressorts s'exprime alors ainsi : $\Delta\chi = d_0(\Delta\alpha - \theta)$, on en déduit la fonction de transfert $\boxed{H_7(p) = k_{RS} d_0^2}$.

Question 14. Puissance des inters efforts générés par le ressort

$P(\text{ressort} \leftrightarrow \text{prothèse}) = P(\text{ressort} \rightarrow 1/2)$, c'est-à-dire $P(\text{ressort} \leftrightarrow \text{prothèse}) = \overline{R}(\text{ressort} \rightarrow 1) \cdot \overline{V}(S, 1/2)$.

$$\dot{V}(S, 1/2) = S\dot{O} \wedge \dot{\Omega}(1/2) = b \cdot \dot{z}_2 \wedge \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) \cdot \dot{x}$$

$$\text{D'où : } \boxed{P(\text{ressort} \leftrightarrow \text{prothèse}) = b F_{RS} \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos(\delta + \theta - \alpha)}$$

Question 15. Dynamique de la cheville

On isole la prothèse et on lui applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel tibia supposé galiléen :

$$\frac{d}{dt} T(\text{prothèse} / 0) = P(\overline{\text{prothèse}} \rightarrow \text{prothèse} / 0) + P_i(\text{prothèse})$$

- $P(\overline{\text{prothèse}} \rightarrow \text{prothèse} / 0) = -C \frac{d\theta}{dt}$, les liaisons pivot $3_2 / 0$ et $1 / 0$ étant supposées parfaites ;
- $P_i(\text{prothèse}) = \underbrace{C_M \omega_M}_{\text{moteur}} - \underbrace{\mu_M \omega_M^2}_{\text{amortisseur}} + \underbrace{d_0 F_{RS}}_{\text{ressort}} \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right)$, toutes les liaisons étant supposées parfaites ;
- $T(\text{prothèse} / 0) = \frac{1}{2} J_M \omega_M^2$, toutes les inerties des pièces autres que l'arbre moteur étant négligées.

On en déduit :
$$J_M \omega_M \frac{d\omega_M}{dt} = -C \frac{d\theta}{dt} + C_M \omega_M - \mu_M \omega_M^2 + d_0 F_{RS} \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right)$$

Question 16. Fonctions de transfert mécaniques

L'équation précédente, au voisinage de la position repos, se met sous la forme : $\frac{J_M}{R_T^2} \frac{d^2 \Delta \alpha}{dt^2} + \frac{\mu_M}{R_T^2} \frac{d \Delta \alpha}{dt} = \frac{C_M}{R_T} - C$.

Les fonctions étant de conditions initiales nulles, on peut leur appliquer la transformée de Laplace :

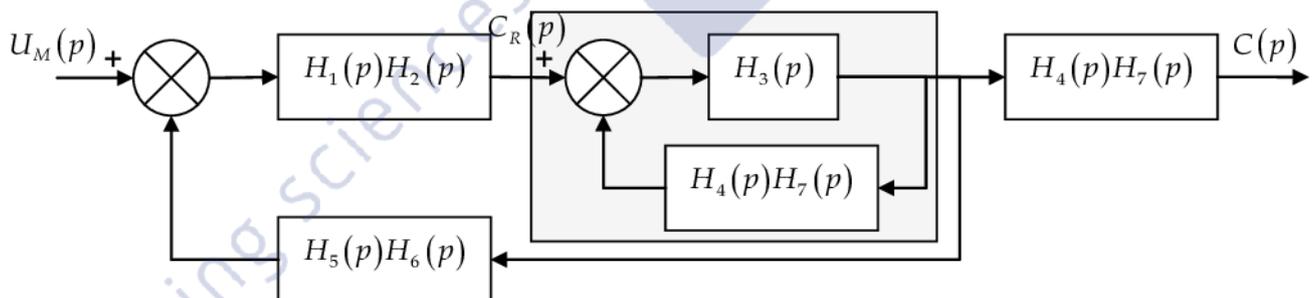
$$\frac{p \cdot J_M + \mu_M}{R_T^2} \cdot \Delta \alpha'(p) = \frac{C_M}{R_T} - C. \text{ On en déduit :}$$

$$H_1(p) = \frac{k_C}{R} ; H_2(p) = \frac{1}{R_T} ; H_3(p) = \frac{R_T^2}{p \cdot J_M + \mu_M} ; H_6(p) = k_C$$

Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Question 17. Fonction de transfert de la chaîne d'énergie

Le pied étant bloqué, $\theta(p) = 0$. On peut transformer le schéma bloc sous la forme suivante :



La fonction de transfert de la boucle interne est : $\frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p)}$. La fonction de transfert de l'ensemble est :

$$\frac{C(p)}{U_M(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_7(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_5(p)H_6(p)} H_4(p)H_7(p)$$

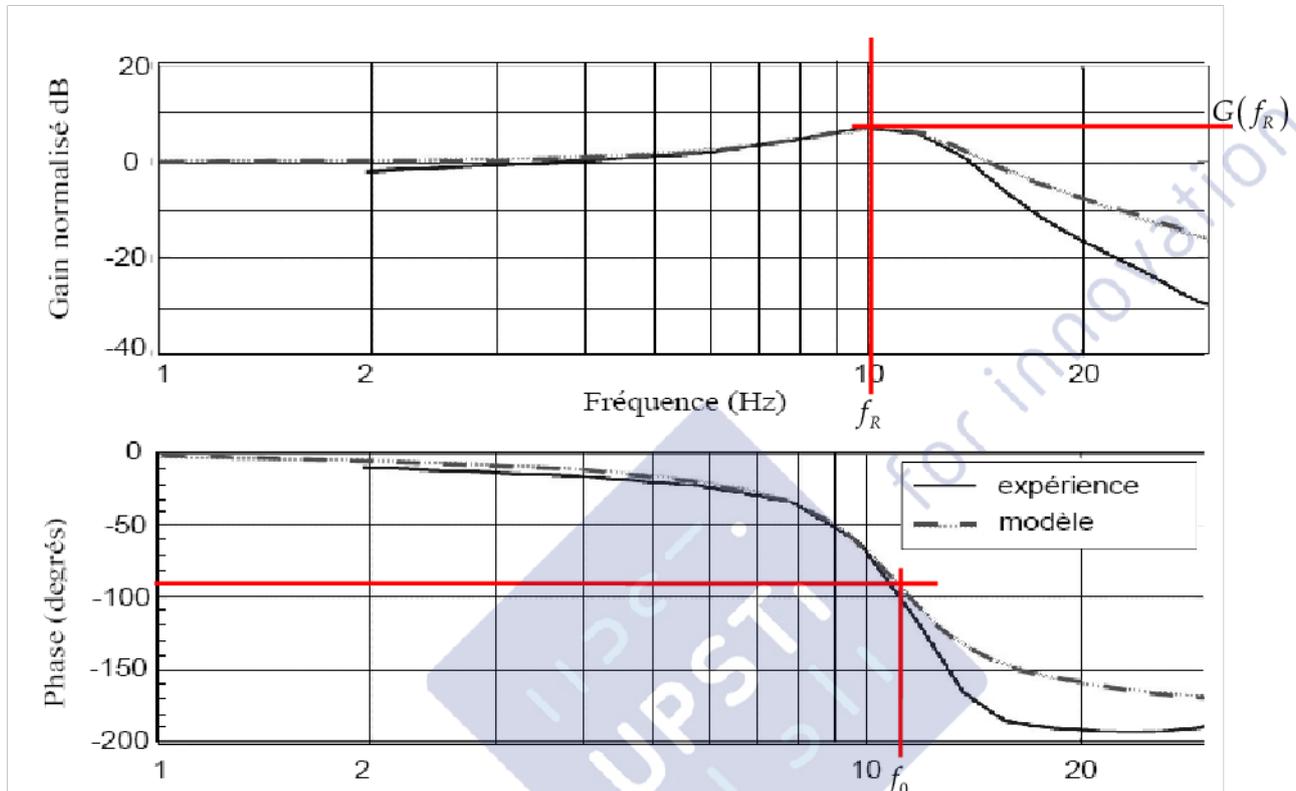
On remplace les fonctions de transfert par leurs expressions littérales :

$$\frac{C(p)}{U_M(p)} = \frac{k_C R_T k_{RS} d_0^2}{p^2 \cdot R J_M + p \cdot (R \mu_M + k_C^2) + R R_T^2 k_{RS} d_0^2}$$

Les caractéristiques de cette fonction de transfert du second ordre de classe 0 sont :

$$K_0 = \frac{K_C}{R R_T} ; \omega_0 = R_T d_0 \sqrt{\frac{k_{RS}}{J_M}} ; \xi_0 = \frac{R \mu_M + k_C^2}{2 R R_T d_0 \sqrt{k_{RS} J_M}}$$

Question 18. Identification des caractéristiques de la fonction de transfert



- Le gain statique nul du modèle approché indique que celui-ci présente un gain unitaire : $K_0 = 1$.
- On observe sur le diagramme de Bode un pic de résonance d'amplitude $G(f_R) = 7,7$ dB. On en déduit le taux d'amortissement réduit : $20 \log \left(\frac{1}{2 \xi_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}} \right) = 7,7$, soit $\xi_0 = 0,21$
- Le déphasage de -90° est obtenu à la fréquence $f_0 = 11$ Hz, ce qui correspond à une pulsation propre $\omega_0 = 70$ rad/s.

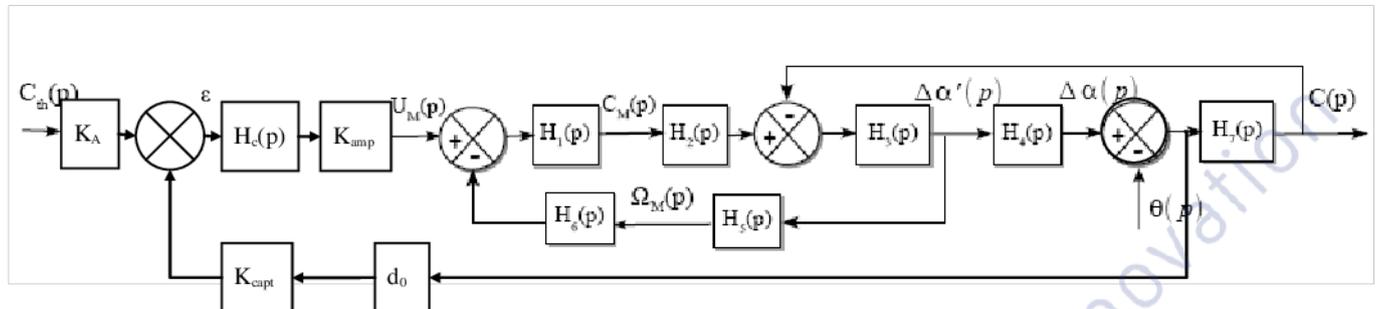
Question 19. Valeur expérimentale du moment d'inertie du moteur

De l'expression de la pulsation propre, on tire : $J_M = k_{RS} \left(\frac{R_T d_0}{\omega_0} \right)^2$. A.N. : $J_M = 1,43 \cdot 10^{-5}$ kg · m²

La valeur obtenue est du même ordre de grandeur que l'inertie du moteur seul. L'hypothèse selon laquelle on peut négliger les inerties des autres composants de la prothèse est vérifiée.

Mise en place de l'asservissement de couple

Question 20. Schéma bloc de l'asservissement en couple



Fonction de transfert de l'adaptateur

On détermine le gain K_A de l'adaptateur de sorte que l'écart ε soit nul lorsque $C = C_{th}$, soit encore

$$K_A C_{th} = \frac{K_{capt} d_0}{H_7(p)} C. \text{ On en déduit : } K_A = \frac{K_{capt}}{k_{RS} d_0}$$

Analyse des performances de l'asservissement de couple

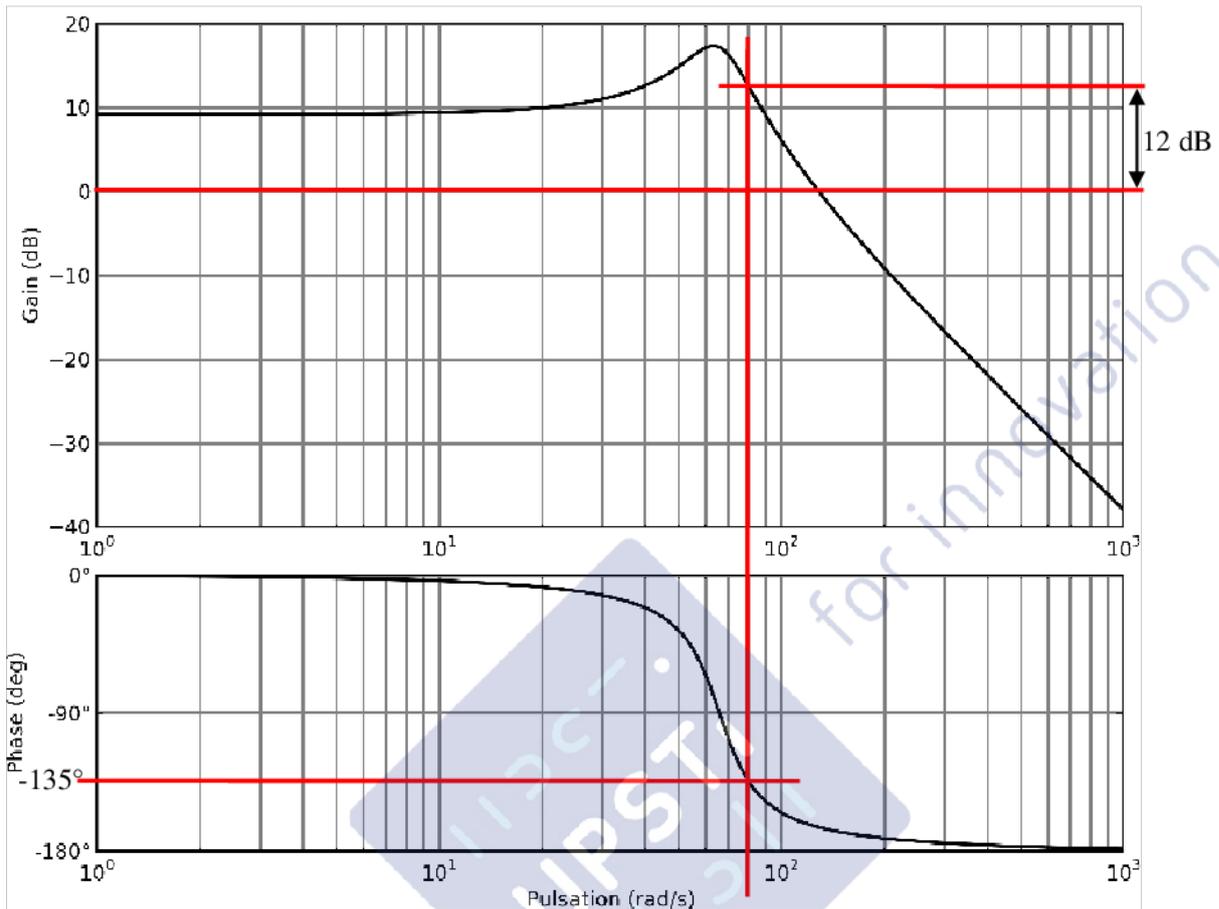
Question 21. Réglage du correcteur proportionnel assurant la précision demandée

$$H_C(p) = K_{cor1}; \text{ la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement s'écrit : } H_{bo}(p) = \frac{a_0 K_{cor1}}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}.$$

L'écart statique relatif er_s d'un système bouclé dont la fonction de transfert en boucle ouverte est un second ordre de classe 0 dépend du gain en boucle ouverte : $\frac{1}{1 + K_{bo}}$. On en déduit $er_s = \frac{1}{1 + a_0 \cdot K_{cor1}}$.

Le cahier des charges impose une erreur maximale de 10%. Donc, $K_{cor1} \geq \frac{9}{a_0}$, soit $K_{cor1} \geq 3,1 \text{ V}/(\text{N.m})$

Question 22. Réglage du correcteur proportionnel assurant les marges de stabilité demandées



Il faut abaisser la courbe de gain de 12 dB pour que le déphasage soit de -135° à la pulsation de coupure à 0 dB, ce qui assure une marge de phase de 45° . On en déduit : $K_{\text{cor2}} = 10^{-\frac{12}{20}}$, soit $K_{\text{cor2}} = 0,25 \text{ V}/(\text{N}\cdot\text{m})$.

Conclusion relative à l'emploi d'un correcteur proportionnel

Le correcteur proportionnel ne peut assurer simultanément la précision et la stabilité du système.

Question 23. Diagramme de Bode asymptotique du correcteur

Le correcteur proposé est :

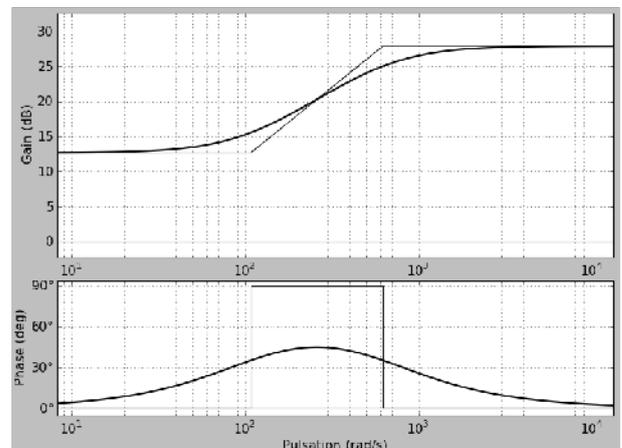
$$H_{\text{cor}}(p) = K_p + K_d \frac{\tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

Il peut se réécrire sous la forme :

$$H_{\text{cor}}(p) = K_p \frac{1 + \left(\frac{K_p + K_d}{K_p} \tau_d \right) \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

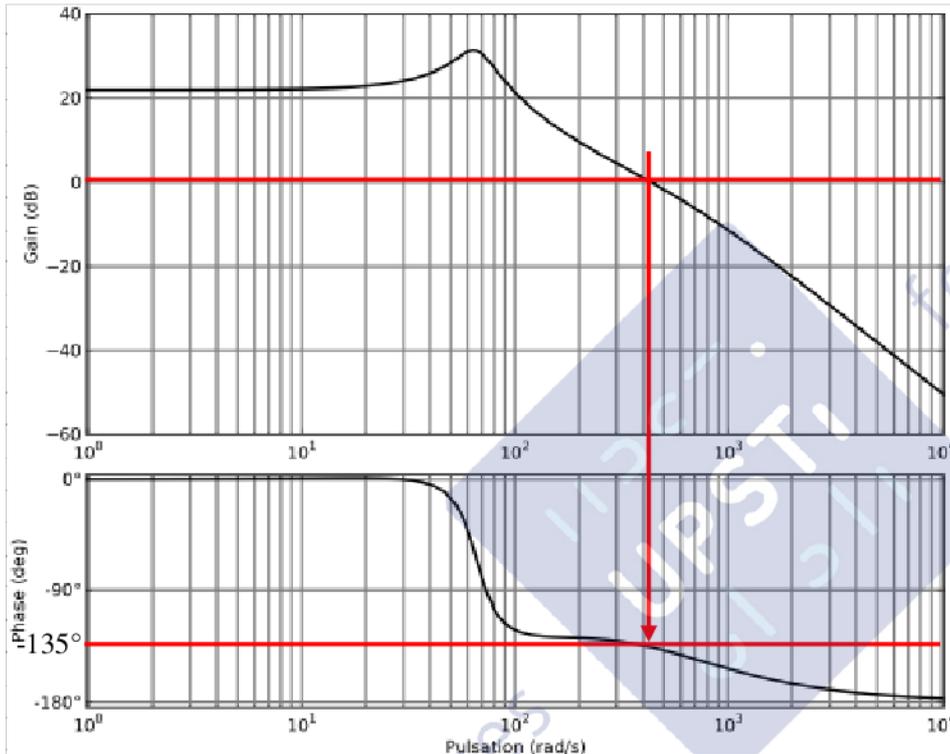
Il s'agit d'un correcteur proportionnel dérivé filtré :

- le gain statique est réglé par $K_p = 4,3 \text{ V}/(\text{N}\cdot\text{m})$, soit 12,7 dB ; on ajuste alors la précision du système



- la constante de temps du correcteur est définie au numérateur du correcteur $\left(1 + \frac{K_d}{K_p}\right) \tau_d = 133 \text{ ms}$, soit une pulsation de cassure de $7,53 \text{ rad/s}$; le gain K_p et la constante de temps τ_d étant fixés, le gain K_d permet le réglage de la largeur de bande du correcteur et du déphasage maximal introduit par celui-ci;
- le filtrage du correcteur dérivé est de constante de temps τ_d correspondant à une pulsation de cassure de 625 rad/s .

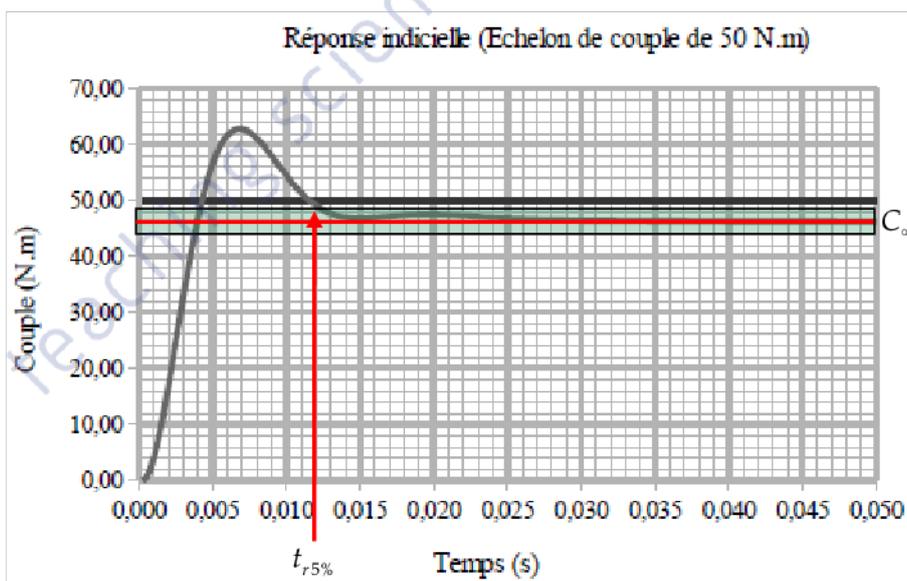
Question 24. Validation des critères du cahier des charges



La marge de phase mesurée est de 45° , en accord avec le cahier des charges.

L'erreur statique relevée sur la réponse à un échelon de couple de $50 \text{ N}\cdot\text{m}$ est de $4 \text{ N}\cdot\text{m}$. L'erreur relative est alors de $7,3\%$, valeur inférieure à l'exigence du cahier des charges (10% max autorisé).

Le temps de réponse à 5% est estimé à $0,012 \text{ s}$, valeur bien inférieure à la contrainte imposée par le cahier des charges ($0,1 \text{ s}$ max); le critère de rapidité est respecté.



La courbe d'évolution de la tension de la commande de la prothèse sous une consigne en échelon de couple fait apparaître une tension de démarrage de 1200 V , ce qui est industriellement irréalisable. On peut palier ce défaut en ajoutant à la commande un dispositif de saturation de la tension.

Validation clinique de la prothèse active

Question 25. Analyse comparative des performances de la prothèse active

Avant-propos : La définition du travail des forces n'est pas claire dans cette question. Il ne peut s'agir du travail de la force exercée par le sol sur le pied dans le référentiel sol (sauf à introduire du glissement, ce qui n'a aucun intérêt ici). Peut-être est-il question du travail des forces de contact entre le pied et le tapis de marche *déformable* ?

Avec la précision des mesures fournies, la prothèse conventionnelle fournit autant d'énergie qu'elle n'en absorbe sur un cycle de marche. La prothèse active diffère de ce schéma sur deux points :

1. la moyenne du travail résistif est plus faible de 21%
2. la moyenne du travail propulsif est plus forte de 4,4%

L'utilisateur de la prothèse active doit donc sentir une plus grande facilité à poser et à plier le pied artificiel, tout en gardant une bonne propulsion vers le pas suivant.

L'apport d'énergie de la prothèse active sur un cycle est de 17 J. Cette valeur est en accord avec le cahier des charges (20 J max) établi à partir de mesures faites lors de la marche avec un membre sain.

Le coût métabolique moyen des patients à prothèse conventionnelle est 0,27. Ce chiffre descend à 0,23 lorsqu'une prothèse active est utilisée, soit un abaissement de la dépense énergétique de 15%. La prothèse active permet donc d'abaisser significativement l'apport supplémentaire d'énergie que doit fournir la personne amputée pour atteindre une vitesse donnée par rapport à un individu non handicapé.