

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2013

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

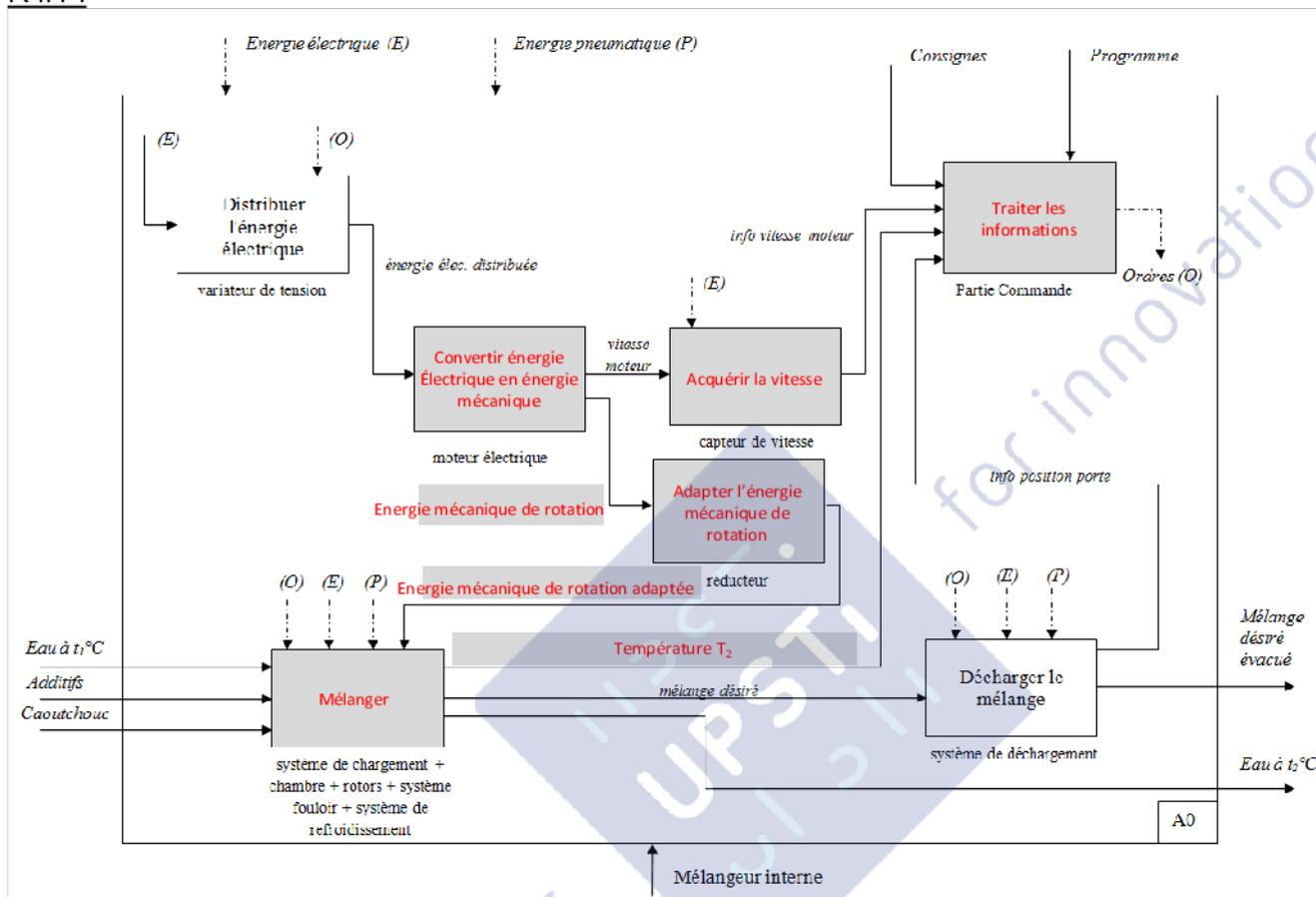
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Mélangeur interne à rotor engrenants

Partie I

R.I.1 :



R.I.2 :

Etapes	Dates (seconde)	Etapes	Dates (seconde)
1	à t = 0	8	à t = 226
2	à t = 108	9	à t = 230
3	à t = 130	10	à t = 252
4	à t = 142	11	à t = 266
5	à t = 166	12	à t = 280
6	à t = 190	13	à t = 290
7	à t = 204	14	à t = 300

R.1.3 : La puissance fournie par le moteur est maximale à $t = 210s$ car le couple est maximal (car le courant est maximal), ainsi que la vitesse de rotation.

Or la puissance fournie par le moteur est $P_m = C_m \cdot \omega_m$.

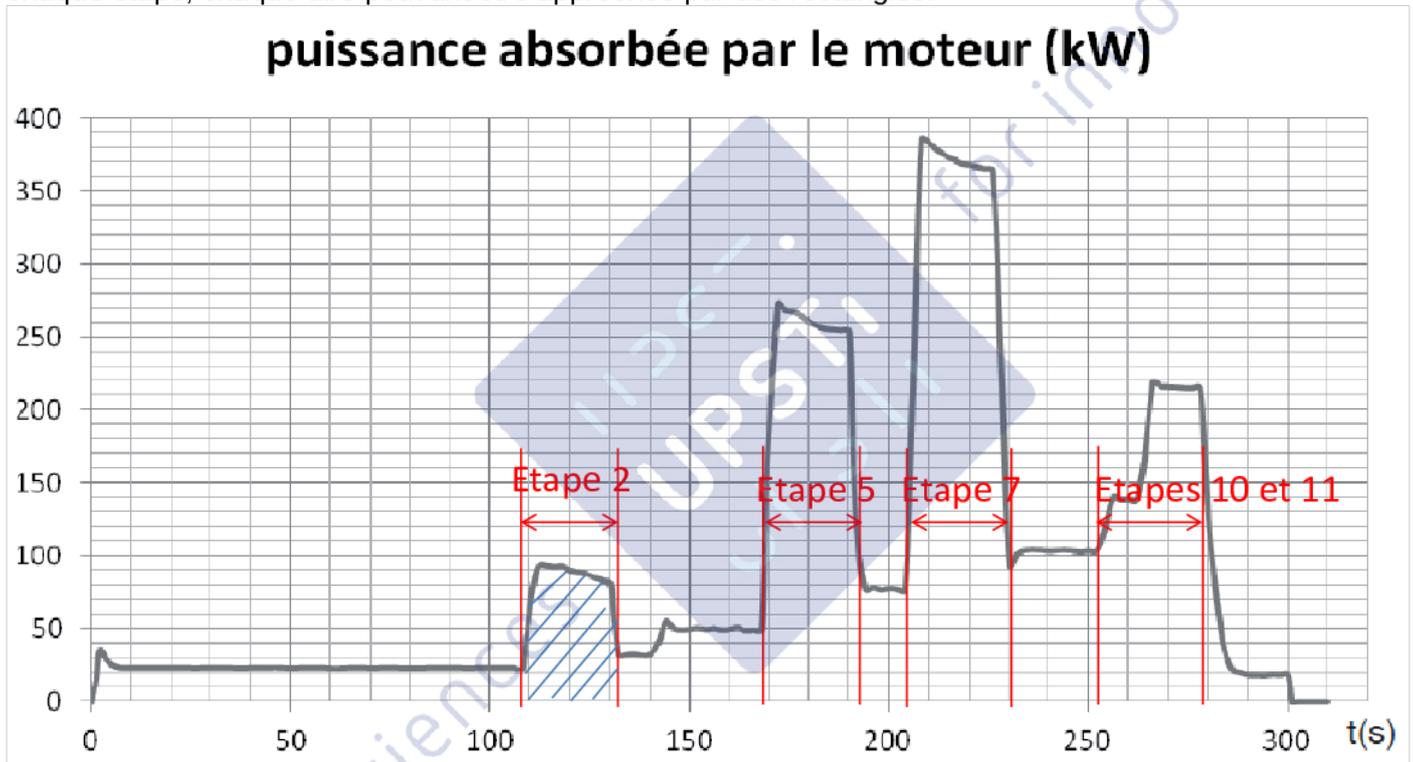
En reprenant les équations du moteur à courant continu, on a $C_m = k \cdot i$ et $U = R \cdot i + e + L \cdot \frac{di}{dt}$ avec $e = k \cdot \omega_m$. Dans la suite, on négligera le terme $L \cdot \frac{di}{dt}$.

Donc la puissance peut être déterminée par $P_m = C_m \cdot \omega_m = k \cdot i \cdot \omega_m = k \cdot i \cdot \frac{U - R \cdot i}{k} = U \cdot i - R \cdot i^2$

A $t = 210s$, $i = 770A$, $U = U_{nom} = 500V$, $P_m = P_{max} = 376 kW$

Le choix du moteur respecte le cahier des charges car $P_{max} = 376 kW < 0,70 \cdot 615 = 430kW$

R.1.4 : A partir de la courbe de puissance P_m absorbée par le moteur, on peut identifier l'énergie fournie au mélange pour les phases de Mastification (étape 2), d'Incorporation (étape 5), de Dispersion (étape 7) et de Distribution (étapes 10 et 11). Pour estimer l'énergie E fournie au mélange sur une durée entre deux temps t_1 et t_2 , on a $E = \int_{t_1}^{t_2} P_m(t) \cdot dt$. Estimer l'énergie revient donc à estimer l'aire sous la courbe pour chaque étape, chaque aire pouvant être approchée par des rectangles.



On a donc pour chaque phase :

	Mastication	Incorporation	Dispersion	Distribution
Energie absorbée (Joule)	$E = \Delta t * P$ $\approx 20 * 85$ $\approx 1700kJ$	$E = \Delta t * P$ $\approx 21 * 260$ $\approx 5460kJ$	$E = \Delta t * P$ $\approx 22 * 360$ $\approx 7920kJ$	$E = \Delta t * P$ $\approx 10 * 120$ $+ 15 * 220$ $\approx 4500kJ$

Soit en sommant toutes les énergies, on obtient pour les 4 phases : $19.58 \cdot 10^3 kJ$.

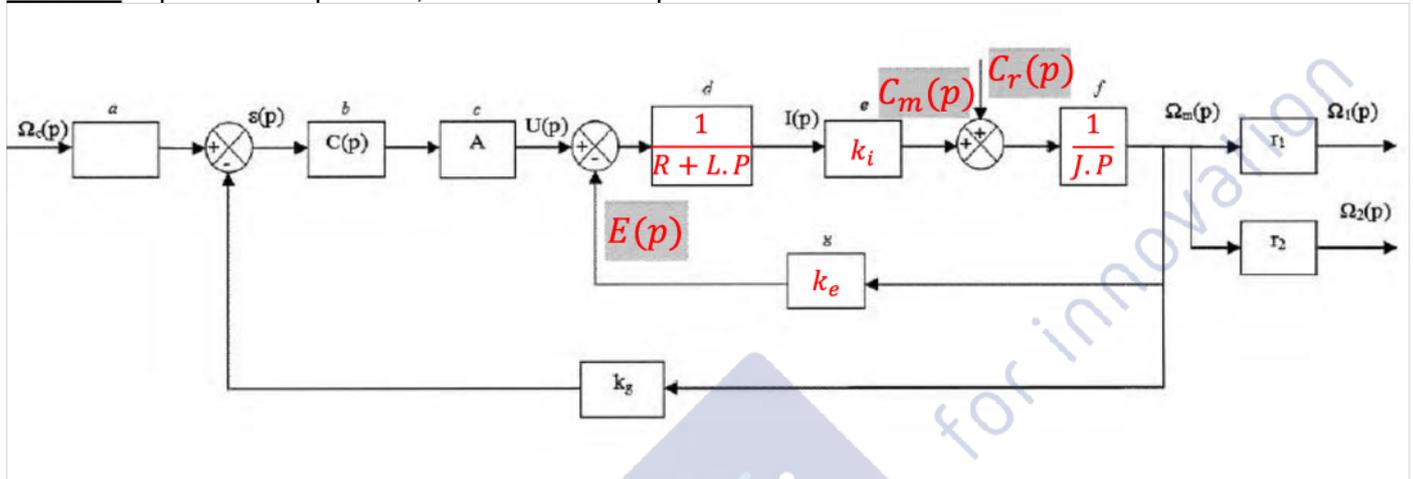
Le cahier des charges est encore respecté car l'énergie est bien comprise entre $19 \cdot 10^3 kJ$ et $25 \cdot 10^3 kJ$.

Partie II

R II.A.1 : On obtient dans le domaine symbolique les équations suivantes :

$$\begin{aligned} C_m(p) + C_r(p) &= J \cdot p \cdot \Omega_m(p) \\ U(p) &= R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p) \\ C_m(p) &= k_i \cdot I(p) \\ E(p) &= k_e \cdot \Omega_m(p) \end{aligned}$$

R II.A.2 : A partir des équations, il est aisé de remplir le schéma suivant :



R II.A.3 : Le réducteur est un train d'engrenages à axes fixes.

$$r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_m} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menées}}{\prod Z_{menantes}} = (-1)^2 \frac{Z_{3b} \cdot Z_m}{Z_{1a} \cdot Z_{3a}} = \frac{1}{30}$$

$$r_2 = \frac{\omega_2}{\omega_m} = \frac{\omega_1}{\omega_m} = -\frac{1}{30}$$

R II.A.4 : On doit respecter : $\varepsilon(p) = 0$ lorsque $\Omega_c(p) = \Omega_1(p)$

$$\text{Or, } \varepsilon(p) = K_a \cdot \Omega_c(p) - K_g \cdot \Omega_m(p) = K_a \cdot \Omega_c(p) - K_g \cdot \Omega_1(p) / r_1$$

$$\text{Donc } K_a = K_g / r_1$$

R II.A.5 : En considérant que $C_r(p) = 0$, on peut déjà écrire que $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{k_i}{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{k_i \cdot k_e} p + \frac{L}{k_i \cdot k_e} p^2}$

$$\text{Puis } H(p) = \frac{\Omega_1(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_g}{r_1} \cdot \frac{\frac{\frac{k_c \cdot A}{k_e}}{1 + \frac{R}{k_i \cdot k_e} p + \frac{L}{k_i \cdot k_e} p^2}}{\frac{k_c \cdot A \cdot k_g}{1 + \frac{R}{k_i \cdot k_e} p + \frac{L}{k_i \cdot k_e} p^2}} \cdot r_1 = \frac{\frac{k_c \cdot A \cdot k_g}{k_e}}{1 + \frac{R}{k_i \cdot k_e} p + \frac{L}{k_i \cdot k_e} p^2} = \frac{\frac{k_c \cdot A \cdot k_g}{k_e + k_c \cdot A \cdot k_g}}{1 + \frac{R}{k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)} p + \frac{L}{k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)} p^2}$$

$$\text{Donc par identification, on obtient } = \frac{k_c \cdot A \cdot k_g}{k_e + k_c \cdot A \cdot k_g}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)}{L \cdot J}} \text{ et } \xi = \frac{R \cdot J}{2 \cdot k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)} \cdot \sqrt{\frac{k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)}{L \cdot J}}$$

$$\text{ou encore } \xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{J}{L \cdot k_i \cdot (k_e + k_c \cdot A \cdot k_g)}}$$

R II.B.1 : On nous donne dans l'annexe C : $\vec{V}(M) = V(r) \cdot \vec{y}_M$ avec $V(r) = \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \cdot R_1 \cdot \frac{2\pi N}{60}$.

$$\text{Or } \tau(M) = \mu \cdot \frac{dV(r)}{dr} = \mu \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \cdot R_1 \cdot \frac{2\pi N}{60} \right) = \frac{-\mu \cdot R_1}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2\pi N}{60} = -2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

R II.B.2 : $C_{r2} = \left(\int_S \vec{O}_2 \vec{P} \wedge d\vec{F}(P) \right) \cdot \vec{x}_0$ avec S la surface du cylindre en contact avec le mélange.

R II.B.3 : La surface élémentaire considérée est une portion de cylindre d'où $dS = R_1 \cdot d\theta \cdot L$

R II.B.4 : On va commencer par calculer le terme $\overrightarrow{O_2 P} \wedge d\vec{F}(P)$.

$$\overrightarrow{O_2 P} \wedge d\vec{F}(P) = R_1 \cdot \overrightarrow{z_M} \wedge (\tau(P) \cdot dS \cdot \overrightarrow{y_M} + p(P) \cdot dS \cdot \overrightarrow{z_M}) = -R_1 \cdot \tau(P) \cdot dS \cdot \overrightarrow{x_M} = \frac{\mu \cdot R_1^2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2\pi N}{60} \cdot R_1 \cdot d\theta \cdot L \cdot \overrightarrow{x_M}$$

$$\text{D'où } C_{r2} = \left(\int_S \overrightarrow{O_2 P} \wedge d\vec{F}(P) \right) \cdot \overrightarrow{x_0} = \left(\int_{-\pi/3}^{7\pi/6} \frac{\mu \cdot R_1^2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2\pi N}{60} \cdot R_1 \cdot d\theta \cdot L \cdot \overrightarrow{x_M} \right) \cdot \overrightarrow{x_0} = \frac{\mu \cdot R_1^3}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2\pi N}{60} \cdot L \cdot \left(\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\mu \cdot R_1^3}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2\pi N}{60} \cdot L \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\mu \cdot R_1^3}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\pi^2 N}{20} \cdot L = 15000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

R II.B.5 : Pour une vitesse de rotation différente et une viscosité différente, on a : $C_{r2} = 27800 \text{ N} \cdot \text{m}$

R II.C.1 : On cherche l'énergie cinétique de l'ensemble Σ constitué de l'ensemble $\{m, 1, 2, 3\}$.

$$T_{\Sigma/0} = T_{m/0} + T_{1/0} + T_{2/0} + T_{3/0} = \frac{1}{2} \cdot J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_3^2$$

On cherche l'inertie équivalente sous la forme $T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_m^2$

$$\text{Or } r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_m}, r_2 = \frac{\omega_2}{\omega_m} \text{ et } r_3 = \frac{\omega_3}{\omega_m}$$

$$\text{Donc } T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} \cdot (J_m + r_1^2 \cdot J_1 + r_2^2 \cdot J_2 + r_3^2 \cdot J_3) \cdot \omega_m^2 \text{ soit } J = J_m + r_1^2 \cdot J_1 + r_2^2 \cdot J_2 + r_3^2 \cdot J_3$$

Application numérique : $J = 17,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx J_m$

La part des inerties des pièces 1, 2 et 3 est négligeable sur l'inertie équivalente totale.

R II.C.2 : On cherche la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures.

$$P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma/0} = P_{\text{stator moteur} \rightarrow m/0} + P_{\text{mélange} \rightarrow 1/0} + P_{\text{mélange} \rightarrow 2/0} + P_{0 \rightarrow \Sigma/0} = C_m \cdot \omega_m + C_{r1} \cdot \omega_1 + C_{r2} \cdot \omega_2 - \lambda \cdot \omega_m^2$$

Il est évident que $C_m \cdot \omega_m > 0$ et que $C_{r2} \cdot \omega_2 < 0$ puisque dans le sujet $C_{r2} > 0$ et $\omega_2 < 0$.

$$\text{On peut donc mettre la puissance sous cette forme } P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma/0} = C_m \cdot \omega_m + C_{r1} \cdot r_1 \cdot \omega_m + C_{r2} \cdot r_2 \cdot \omega_m - \lambda \cdot \omega_m^2 = (C_m + C_{r1} \cdot r_1 + C_{r2} \cdot r_2 - \lambda \cdot \omega_m) \cdot \omega_m = (C_m + C_r) \cdot \omega_m \text{ avec } C_r = C_{r1} \cdot r_1 + C_{r2} \cdot r_2 - \lambda \cdot \omega_m$$

R II.C.3 :

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble Σ .

$$dT_{\Sigma/0}/dt = P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma/0} + P_{\text{int}}. \text{ Or ici } P_{\text{int}} = 0.$$

$$\text{Soit } dT_{\Sigma/0}/dt = d\left(\frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_m^2\right)/dt = (C_m + C_r) \cdot \omega_m$$

$$\text{Ou encore } J \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m = (C_m + C_r) \cdot \omega_m \text{ donc } C_m = J \cdot \dot{\omega}_m - C_r$$

On cherche, maintenant, à calculer les accélérations angulaires $\dot{\omega}_{m1}$ et $\dot{\omega}_{m2}$ dans les cas 1 et 2.

$$\dot{\omega}_{m1} = \frac{55,2 \cdot \pi}{60,3 \cdot r_1} = 1,92,30 = 57,6 \text{ rad/s}^2$$

$$\dot{\omega}_{m1} = \frac{10,2 \cdot \pi}{60,2 \cdot r_1} = 0,52,30 = 15,7 \text{ rad/s}^2$$

On cherche à calculer les couples moteurs C_{max1} et C_{max2} dans les cas 1 et 2.

$$C_{max1} = J \cdot \dot{\omega}_{m1} - C_r = J \cdot \dot{\omega}_{m1} - C_{r1} \cdot r_1 - C_{r2} \cdot r_2 + \lambda \cdot \omega_{m1} \text{ avec pour le cas 1 } C_{r1} = C_{r2} = 0$$

Pour l'application numérique, on prendra la valeur maximale de ω_{m1} .

$$\text{Donc } C_{max1} = 17,3 \cdot 57,6 + 5,30 \cdot 55,2 \cdot \frac{\pi}{60} = 1860 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$C_{max2} = J \cdot \dot{\omega}_{m2} - C_r = J \cdot \dot{\omega}_{m2} - C_{r1} \cdot r_1 - C_{r2} \cdot r_2 + \lambda \cdot \omega_{m2} \text{ avec pour le cas 2 } C_{r1} = -28000 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ et } C_{r2} = 28000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pour l'application numérique, on prendra la valeur maximale de ω_{m2} .

$$\text{Donc } C_{max2} = 17,3 \cdot 15,7 + 5,30 \cdot 55,2 \cdot \frac{\pi}{60} + \frac{28000,2}{30} = 3000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

On cherche à calculer des couples moteurs P_{max1} et P_{max2} dans les cas 1 et 2.

$$P_{max1} = C_{max1} \cdot \omega_{m1} = 321 \text{ kW}$$

$$P_{max2} = C_{max2} \cdot \omega_{m2} = 519 \text{ kW}$$

R II.C.4 : Pour vérifier le bon dimensionnement du moteur, on doit vérifier que la vitesse de rotation maximale (1800 tr/mn) n'est pas atteinte, que le couple moteur maximale (3262 N.m) n'est pas atteint et que la puissance maximal (615 kW) du moteur n'est pas atteint.

On a $N_{max} = 30.55 = 1650 \text{ tr/mn} < 1800 \text{ tr/mn}$

On a $C_{max1} = 1860 \text{ N.m} < 3263 \text{ N.m}$ et $C_{max2} = 3000 \text{ N.m} < 3263 \text{ N.m}$

On a $P_{max1} = 321 \text{ kW} < 615 \text{ kW}$, $P_{max2} = 519 \text{ kW} < 615 \text{ kW}$

Donc le moteur est bien dimensionné.

R II.D.1 : La réponse fréquentielle de la FTBO nous indique que le gain reste négatif et que la phase reste supérieure à 180° donc le système est stable car la marge de gain est infinie.

R II.D.2 : On peut aisément exprimer l'écart en fonction de l'entrée et de la perturbation :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO} \Omega_c(p) - \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)} C_r(p)$$

Ensuite on utilise le théorème de la valeur finale pour les écarts en régime permanent.

On trouve donc :

Entrées	Ecart = $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$
Suivi de consigne : $\omega_c(t) = a.u(t)$ avec $C_r(t) = 0$	$\frac{a}{1 + K.A.3000.5,7.10^{-5}} = \frac{a}{1 + 0,855.K}$
Régulation : $C_r(t) = b.u(t)$ avec $\omega_c(t) = 0$	$\frac{b.5,7.10^{-5}}{1 + K.A.3000.5,7.10^{-5}} = \frac{b.5,7.10^{-5}}{1 + 0,855.K}$
Régulation : $C_r(t) = c.t.u(t)$ avec $\omega_c(t) = 0$	$-\infty$

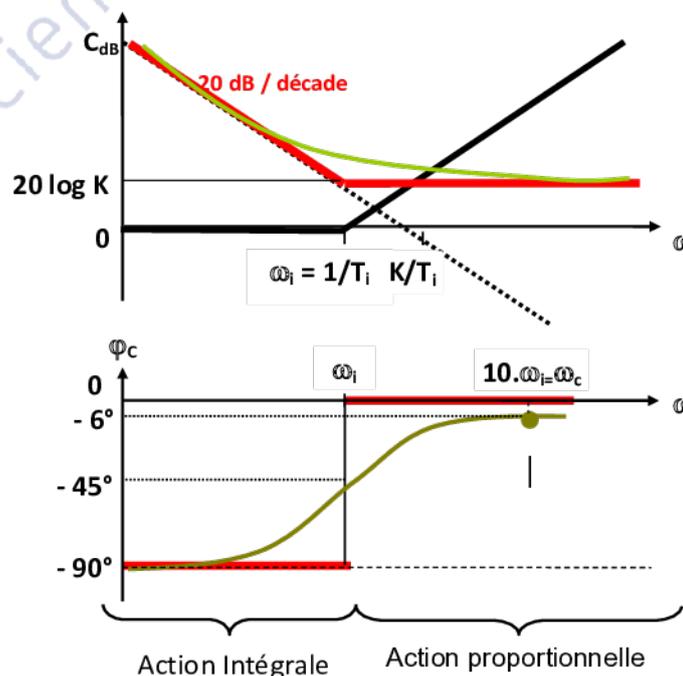
a, b et c sont des constantes ; u(t) est l'échelon unitaire.

Ceci ne respecte pas le cahier des charges.

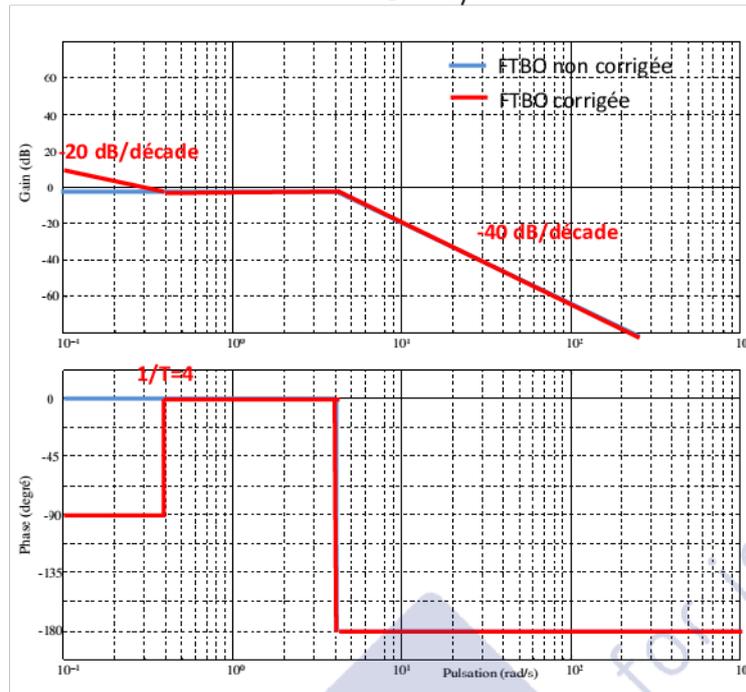
R II.D.3 : Pour répondre aux critères de précision du cahier, il faut une intégration en amont de la perturbation. Les correcteurs 2 et 4 peuvent donc a priori convenir.

1	2	3	4
$C(p) = \frac{K(1+T.p)}{1+d.T.p}$ avec $d > 1$	$C(p) = K(1 + \frac{1}{T.p})$	$C(p) = \frac{K(1+e.T.p)}{1+T.p}$ avec $e > 1$	$C(p) = \frac{K}{p}$
	★		★

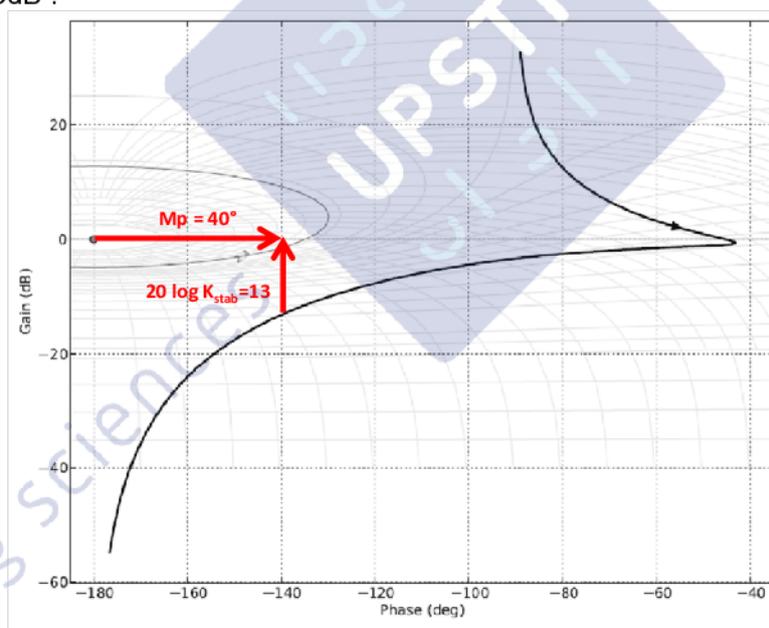
R II.D.4 : Ce correcteur est un correcteur Proportionnel Intégral.



R II.D.5 : La pulsation conduisant à un déphasage de -90° pour la FTBO non corrigée vaut 40 rad/s .
Donc la pulsation de cassure doit être de 4 rad/s soit $T = 1/4 \text{ s}$.

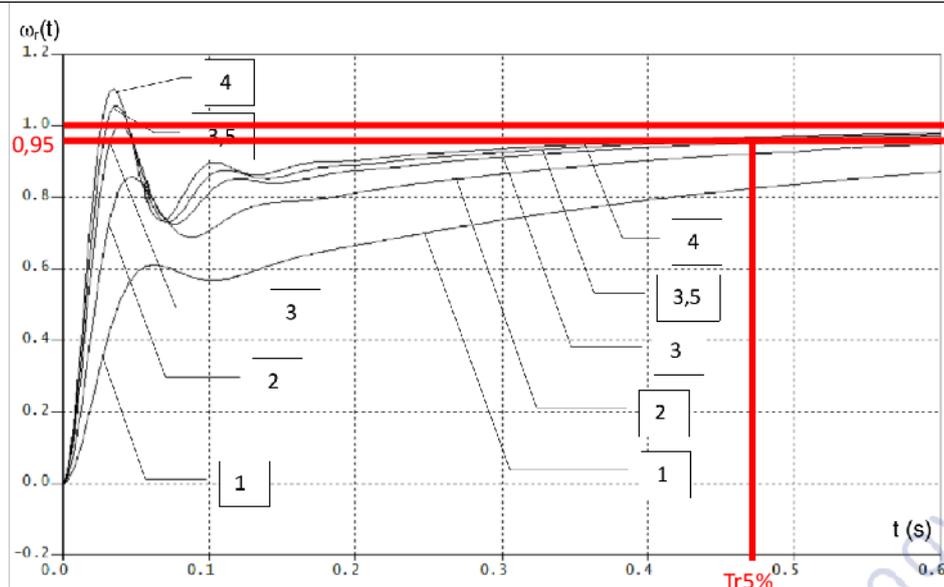


R II.D.6 : Pour assurer le critère de stabilité sur la marge de phase, la courbe de gain ne doit pas être remontée de plus de 13 dB :



Soit $K_{stab} = 10^{13/20} = 4.5$. Cette valeur est une valeur maximale à ne pas dépasser.
Le critère de marge de gain n'intervient pas puisque la marge de gain vaut $+\infty$.

R II.D.7 : Toutes les valeurs de K utilisées pour tracer les réponses temporelles satisfont le critère de la question précédente puisque $K < K_{stab}$.
La valeur de $K = 3$ permet de ne pas avoir de dépassement, d'avoir un temps de réponse de $0,5 \text{ s}$ et d'avoir un écart nul vis-à-vis de l'entrée.



R II.D.8 : En considérant $\Omega_c(p) = 0$, on a $\varepsilon(p) = -\frac{H_2(p)}{1+F(p).H_2(p)} C_r(p)$

R II.D.9 : On prend ici $C_r(t) = b.u(t)$ soit $C_r(p) = b/p$ donc $\varepsilon_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{p.H_2(p).b}{1+F(p).H_2(p)} = 0$

R II.D.10 : On prend ici $C_r(t) = c.t.u(t)$ soit $C_r(p) = c/p^2$ donc $\varepsilon_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{p.H_2(p).c}{1+F(p).H_2(p)}$

$$\text{D'où } \varepsilon_2 = \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{H_2(p).c}{p+p.F(p).H_2(p)} = -\frac{5,7.10^{-5}.c}{2,25.10^5.5,7.10^{-5}} = -\frac{c}{2,25.10^5}$$

Soit pour $c = -50$ on trouve $\varepsilon_2 = 2,2.10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,0021 \text{ tr/mn}$.

Donc le cahier des charges est bien respecté.

Partie III

R III.A.1 :

Descente Haute Pression : $D_h = V_1 \cdot \bar{V}_2 \cdot V_3 \cdot \bar{V}_4$

Descente Basse Pression : $D_b = V_1 \cdot \bar{V}_2 \cdot \bar{V}_3 \cdot \bar{V}_4$

Montée Haute Pression : $M_h = \bar{V}_1 \cdot V_2 \cdot \bar{V}_3 \cdot \bar{V}_4$

R III.A.2 : Commande pour un arrêt à une position quelconque : $A = \bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 \cdot \bar{V}_3 \cdot V_4$

R III.B.1 :

On isole l'ensemble {fouloir+piston+tige}.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids
- Effort dû à la pression dans la chambre inférieure
- Effort dû à la pression dans la chambre supérieure
- Effort dû à la modélisation du frottement visqueux.

Equation de la résultante suivant \vec{z}_0 : $M.\ddot{z} = -M.g + P_i.\pi.\frac{D^2-d^2}{4} - P_s.\pi.\frac{D^2}{4} - f.\dot{z}$

Sous la forme demandée on obtient : $\dot{z} + \frac{M}{f}.\ddot{z} = -\frac{M.g}{f} + P_i.\pi.\frac{D^2-d^2}{4.f} - P_s.\pi.\frac{D^2}{4.f}$

En posant $K = -\frac{M.g}{f} + P_i.\pi.\frac{D^2-d^2}{4.f} - P_s.\pi.\frac{D^2}{4.f} \approx 2,3 \text{ m/s}$ et $T = \frac{M}{f} = 0,7 \text{ s}$

L'équation se met bien sous la forme demandée : $\dot{z} + T.\ddot{z} = K$

R III.B.2 : C'est une équation d'un système du premier ordre d'inconnue \dot{z} . En prenant la condition initiale

nulle ($\dot{z}(0) = 0 \text{ m/s}$), on obtient : $\dot{z}(t) = K.(1 - e^{-t/T})$

On intègre une seconde fois pour déterminer $z(t)$. D'après le paramétrage, la condition initiale est nulle ($z(0) = 0 \text{ m}$) : $z(t) = K \cdot (t + T \cdot e^{-t/T})$

R III.B.3 : Sur le graphe donné en annexe D, on prend la courbe pour laquelle $K = 2,3$. Pour une course utile du vérin de 1 m, on trouve un temps de montée de 0,97s.

Cette valeur est bien inférieure au 1s donnée par le cahier des charges, qui est donc respecté.

R III.B.4 :

$$F_S^{Dh} = P_S^{Dh} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} + M \cdot g = 87,3 \text{ kN}$$

$$F_S^{Db} = P_S^{Db} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} + M \cdot g = 64,8 \text{ kN}$$

R III.B.5 : La compression étant supposée adiabatique réversible, on a : $(P + P_{atm}) \cdot V^\gamma = (P_0 + P_{atm}) \cdot V_0^\gamma$

$$\text{Soit } P = (P_0 + P_{atm}) \cdot \frac{S^\gamma l_0^\gamma}{S^\gamma V^\gamma} - P_{atm} = (P_0 + P_{atm}) \cdot \frac{l_0^\gamma}{(l_0 - z(t))^\gamma} - P_{atm}$$

$$\text{L'effort s'écrit donc : } F_a(t) = P \cdot S = \left[(P_0 + P_{atm}) \cdot \frac{l_0^\gamma}{(l_0 - z(t))^\gamma} - P_{atm} \right] \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$\text{R III.B.6 : } F_a(t) = \left[(P_0 + P_{atm}) \cdot \frac{l_0^\gamma}{l_0^\gamma \left(1 - \frac{z(t)}{l_0}\right)^\gamma} - P_{atm} \right] \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$F_a(t) = \left[(P_0 + P_{atm}) \cdot \left(1 + \gamma \frac{z(t)}{l_0}\right) - P_{atm} \right] \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$F_a(t) = P_0 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + (P_0 + P_{atm}) \frac{\gamma \pi \cdot D^2}{4} \cdot z$$

Cette expression est bien sous la forme demandée avec : $k = (P_0 + P_{atm}) \frac{\gamma \pi \cdot D^2}{4} = 84446 \text{ N/m}$

R III.B.7 :

On isole l'ensemble {fouloir ; piston ; tige}. Le système est soumis à :

- Effort du mélange $F(t)$
- Poids
- Effort dû à la modélisation du frottement fluide
- Effort du fluide dans la chambre supérieure $F_a = P_0 S + k \cdot z$

L'équation de la résultante dynamique en projection sur l'axe \vec{z} donne :

$$M \cdot \ddot{z} = -f \cdot \dot{z} - F_a + F(t) - M \cdot g$$

$$M \cdot \ddot{z} = -f \cdot \dot{z} - P_0 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - k \cdot z + F(t) - M \cdot g$$

A l'équilibre ($t=0s$), l'équation devient : $-P_0 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + F_0 - M \cdot g = 0$

Finalement, il reste : $M \cdot \ddot{z} = -f \cdot \dot{z} - k \cdot z + F(t) - F_0$

D'où $M \cdot \ddot{z} + f \cdot \dot{z} + k \cdot z = F(t) - F_0$

On identifie alors avec la forme de l'énoncé : $a = M$; $b = f$; $c = k$

R III.B.8 :

Les conditions initiales étant nulles, la transformée de Laplace de l'équation précédente est :

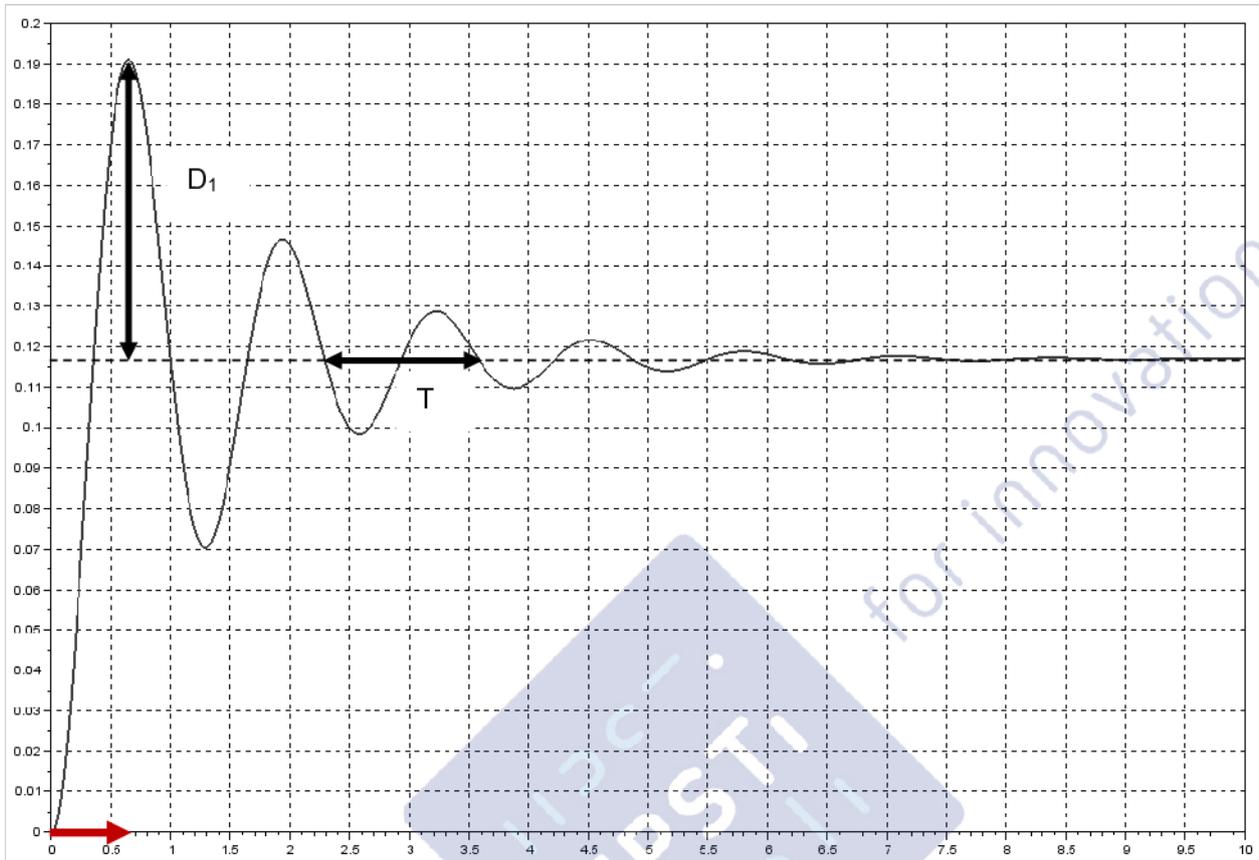
$$(M \cdot p^2 + f \cdot p + k) \cdot Z(p) = F(p)$$

$$\text{La fonction de transfert est donc : } \frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{M \cdot p^2 + f \cdot p + k} = \frac{1/k}{1 + \frac{f}{k} p + \frac{M}{k} p^2}$$

C'est une fonction du second ordre dont on identifie les constantes caractéristiques : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 4,93 \text{ rad/s}$

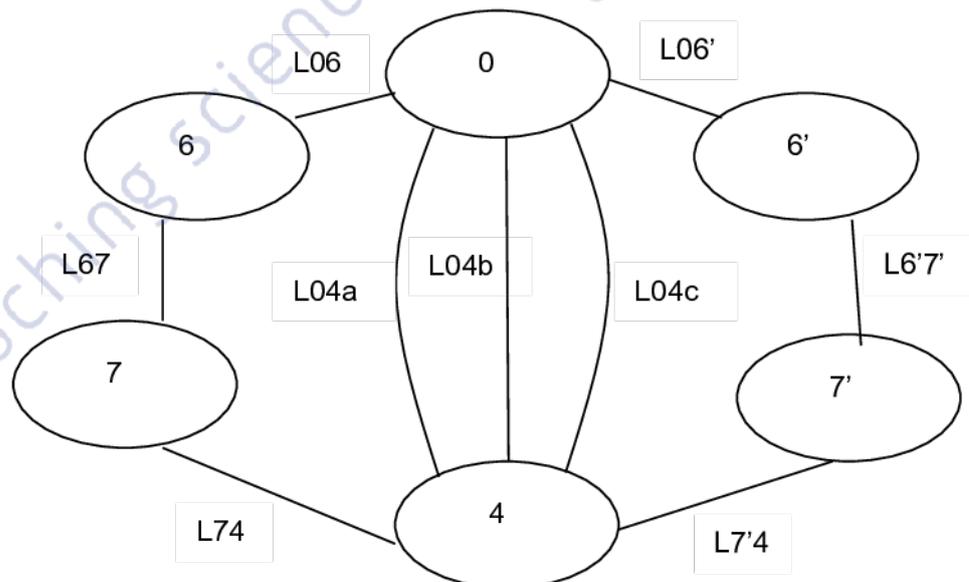
$$K = \frac{1}{k} = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ m/N} , \quad \xi = \frac{1}{2} \omega_0 \frac{f}{k} = 0,145$$

R III.B.9 : On peut calculer la pseudo-période de la réponse : $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = 1,29 \text{ s}$. La courbe de la réponse donne :



D'après l'abaque de l'annexe E on a : $D_1 = 68\% \cdot 0,117 = 0,08 \text{ m}$
 Pour conclure sur le cahier des charges, on calcule la variation de hauteur du fouloir en cours de mélangeage : $\Delta h = z_\infty + D_1 = 19,5 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$
 Le cahier des charges est vérifié.

R III.C.1 :



L04a	Pivot glissant d'axe (O_0, \vec{z}_0)	L06'	Rotule de centre O'_6
L04b	Pivot glissant d'axe (O'_0, \vec{z}_0)	L6'7'	Pivot glissant d'axe (O'_6, \vec{z}_0)
L04c	Glissière de direction \vec{z}_0	L7'4	Rotule de centre O'_7
L06	Rotule de centre O_6	L74	Rotule de centre O_7
L67	Pivot glissant d'axe (O_6, \vec{z}_0)		

Le nombre cyclomatique est donné par le nombre de boucles indépendantes : $\gamma = 4$

R III.C.2 : Le système possède une mobilité utile (translation de la traverse), et 4 mobilités internes (rotations propres des 2 tiges des vérins, et rotations propres des 2 corps du vérin). On a donc :

$$m = m_i + m_u = 5$$

Le degré d'hyperstatisme est donc : $h = 6.\gamma - N_C + m$

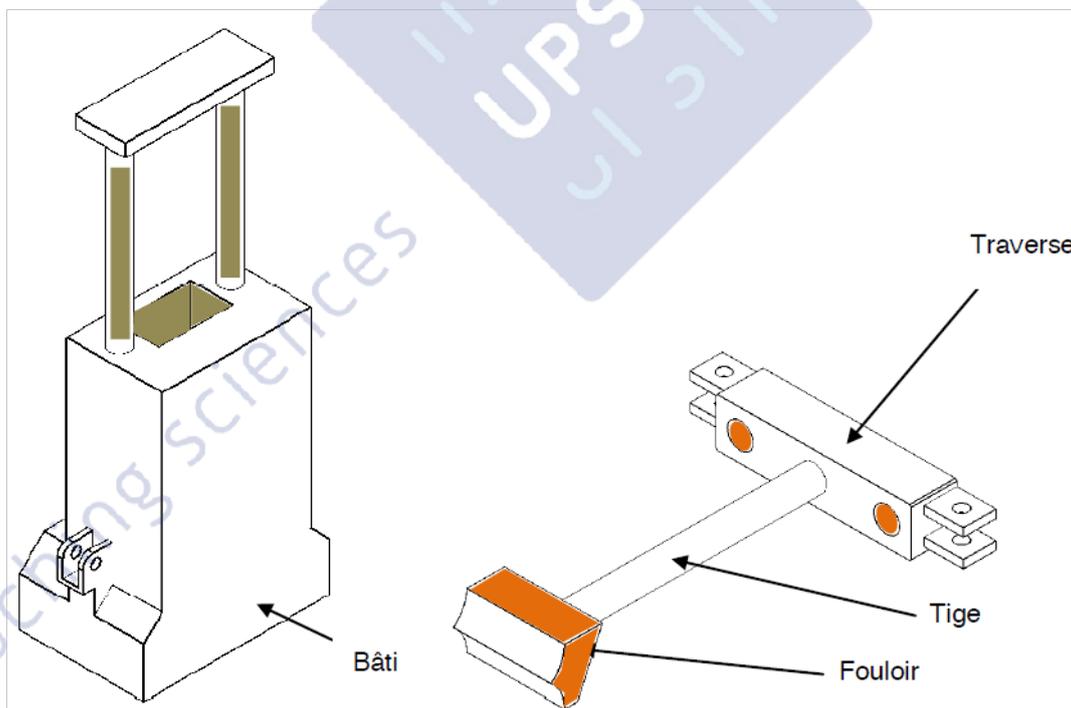
$$\text{D'où } h = 6 \times 4 - (2 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3) + 5 = 8$$

R III.C.3 : Pour le système constitué des pièces 0 et 4 uniquement, on a : $\gamma' = 4$. Il n'y a plus qu'une seule mobilité utile, et plus de mobilité interne : $m = 1$

Le nouveau degré d'hyperstatisme est : $h' = 6 \times 2 - (1 + 2 + 2) + 1 = 8$

Le degré d'hyperstatisme du sous-système étant égal au degré du système complet, il n'y a aucune contrainte géométrique pour monter les 2 vérins entre le bâti et la traverse.

R III.C.4 :



R III.C.5 : Pour assurer un bon guidage de la traverse par rapport au bâti, il faut imposer :

- Le parallélisme des directions \vec{z}_4 et \vec{z}'_4 avec \vec{z}_0
- Les points O_4 et O'_4 doivent être respectivement sur les droites (O_0, \vec{z}_0) et (O'_0, \vec{z}_0)

On doit donc avoir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_4 &= u'_4 = 0 \\ v_4 &= v'_4 = 0 \\ x_4 &= x'_4 = 450 \\ y_4 &= y'_4 = 0 \end{aligned}$$

Soit 8 relations.

Partie IV

R IV.1 : Le roulement sans glissement au niveau du contact entre le pignon et la crémaillère, impose : $c = R \cdot \theta$

Le cahier des charges impose une rotation de 120° d'où $c_{\min i} = \frac{80}{2} \cdot \frac{120\pi}{180} = 83,77 \text{ mm}$

R IV.2 :

Système matériel isolé	Théorème utilisé	Au point (éventuellement)	En projection sur
5	Equation des moments	A	\vec{x}_0
8	Equation des résultantes		\vec{y}_0

R IV.3 :

Bilan des actions mécaniques sur 5 :

- Action du poids sur 5
- Action du mélange sur 5
- Action de 8 sur 5
- Action du bâti sur 5 par la liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0)

Bilan des actions mécaniques sur 8 :

- Action de 5 sur 8
- Action du vérin sur 8
- Action du bâti sur 8 par la liaison glissière de direction \vec{y}_0

R IV.4 :

L'équation des moments sur le système 5 en A en projection sur \vec{x}_0 donne :

$$(\vec{AB} \wedge \vec{F}_{8 \rightarrow 5} + \vec{AD} \wedge \vec{F}_{M \rightarrow 5} + \vec{AB} \wedge \vec{P}_5 + \vec{M}_{0 \rightarrow 5}) \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\text{On obtient : } -F_{85} \cdot R \cdot \cos \alpha + 260 \cdot (F_{M5} + P_5) = 0$$

L'équation des résultantes sur le système 8 en projection sur \vec{y}_0 donne : $(-\vec{F}_{8 \rightarrow 5} + \vec{R}_{0 \rightarrow 8} + \vec{R}_{V \rightarrow 8}) \cdot \vec{y}_0 = 0$

$$\text{Soit : } -F_{85} \cdot \cos \alpha + Y_{V8} = 0$$

$$\text{D'où : } Y_{V8} = F_{85} \cdot \cos \alpha = \frac{260 \cdot (F_{M5} + P_5)}{R} = -10835 \text{ N}$$

R IV.5 : Le vérin est alimenté par une pression $P = 6,5 \text{ bars}$. La section minimale pour le vérin est donc :

$$S = \frac{|Y_{V8}|}{P} = 16670 \text{ mm}^2$$

$$\text{Cela correspond à un diamètre de : } D = \sqrt{4S/\pi} = 145,7 \text{ mm}$$

R IV.6 : On choisit le vérin ayant un diamètre de piston immédiatement supérieur à la valeur trouvée :

Modèle DNG-160-100-PPV-A