

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2013

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

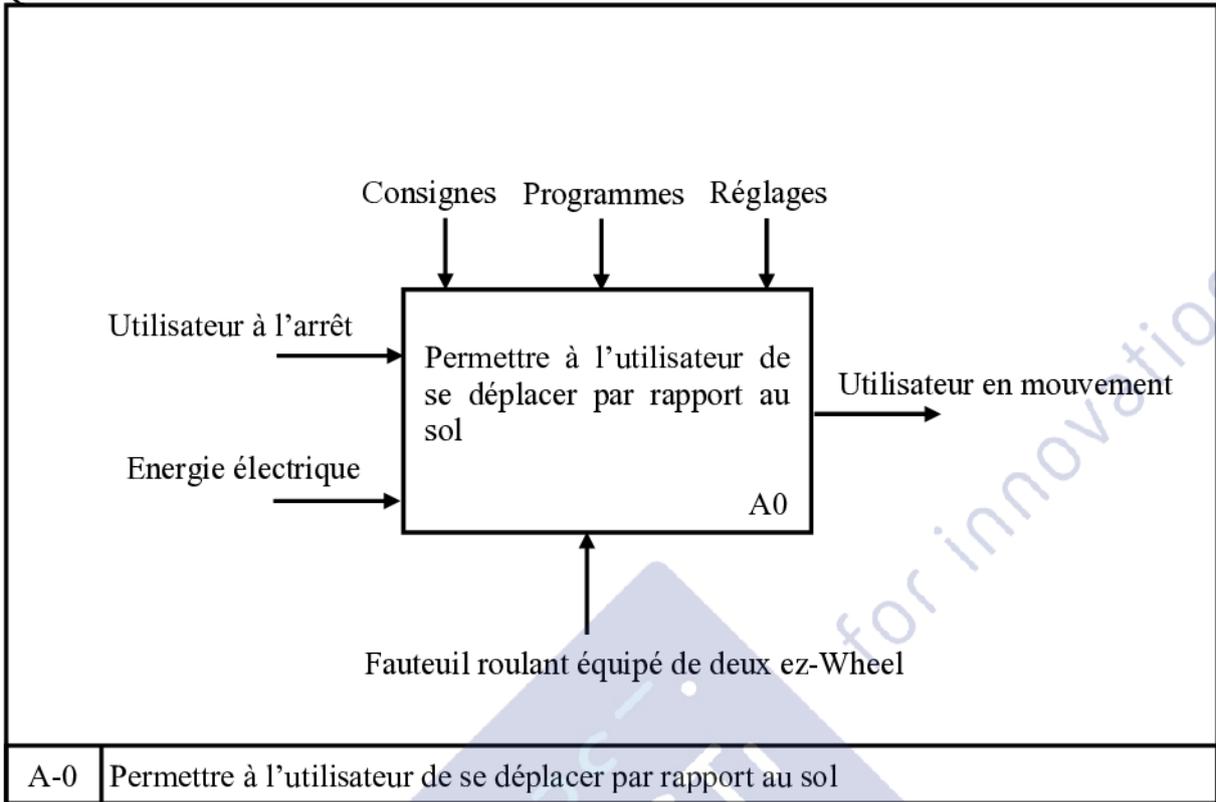
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

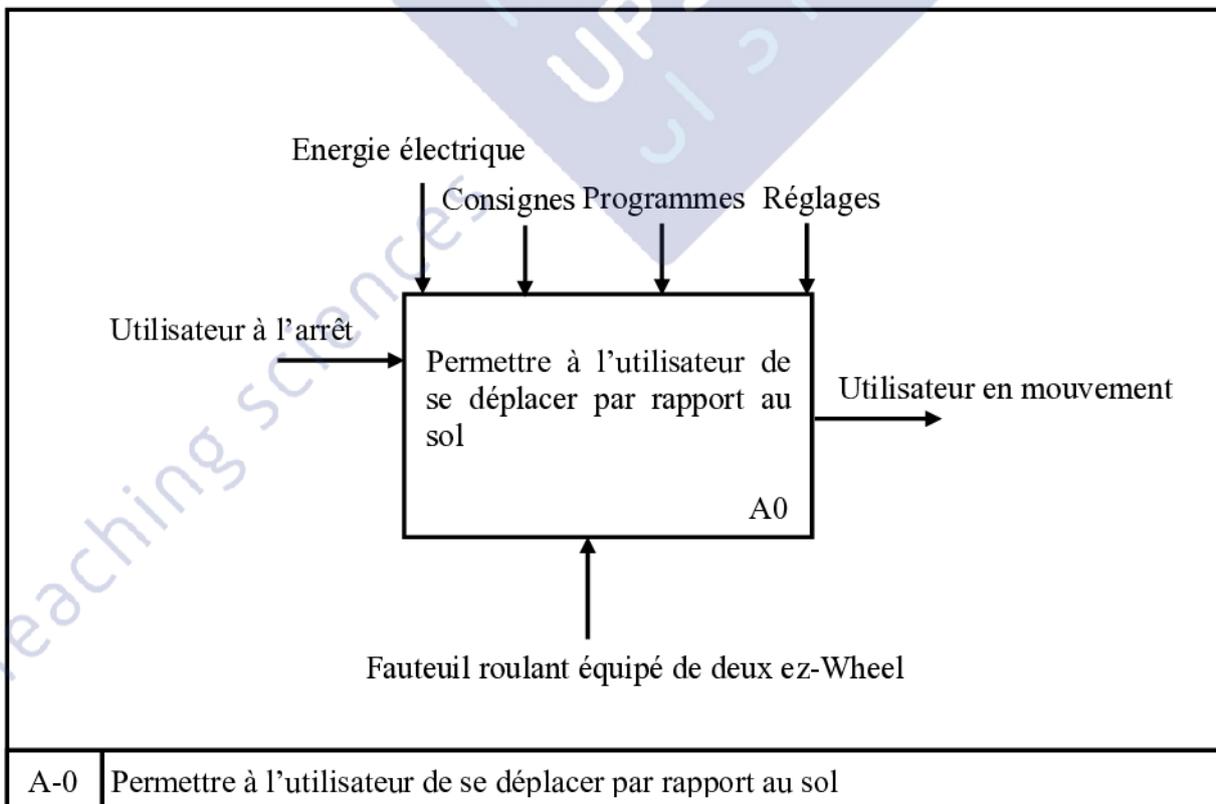
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

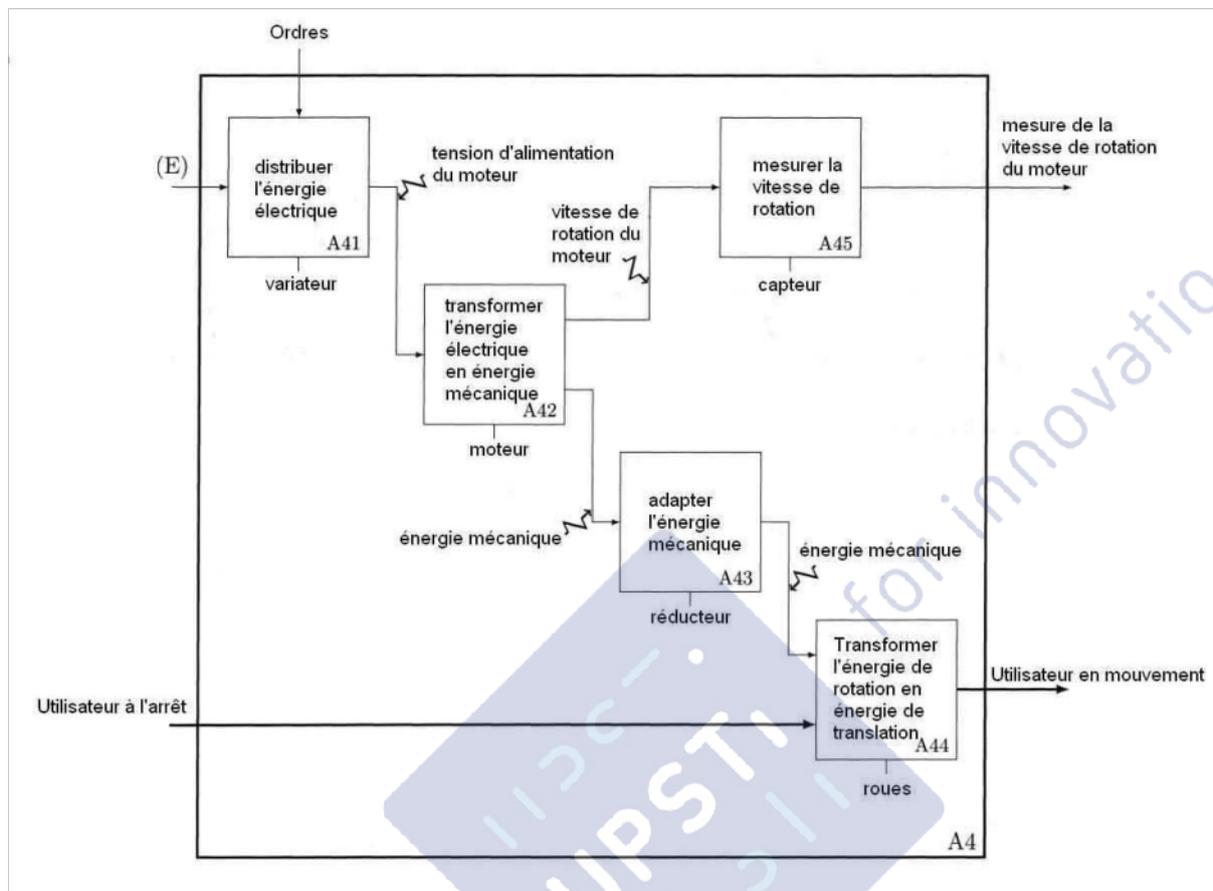
Q1



Ou



Q2



Q3a

$$\{T_{Sol \rightarrow \text{roues avant}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{N,Rf}$$

Q3b

$$\{T_{Sol \rightarrow \text{roues arrière}}\} = \begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{M,Rf}$$

Q3c

$$\{T_{Poids \rightarrow \text{fauteuil}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_S g & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Q4 Les masses et inerties des roues motorisées sont négligeables , donc :

$$\vec{\delta}(G, \text{roues motorisées} / R_o) = \vec{0}$$

L'utilisateur et le fauteuil se déplacent en ligne droite : il n'y a pas de mouvement de rotation .

$$\vec{\delta}(G, \text{fauteuil} + \text{utilisateur} / R_o) = \vec{0}$$

On a : $\vec{\delta}(G, S / R_0) = \vec{\delta}(G, \text{roues motorisées} / R_0) + \vec{\delta}(G, \text{fauteuil} + \text{utilisateur} / R_0)$

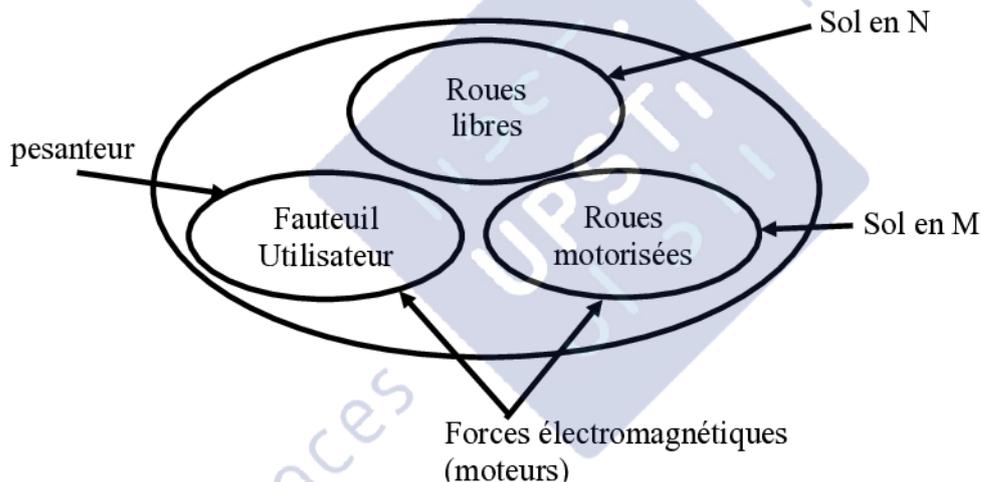
$\vec{\delta}(G, S / R_0) = \vec{0}$

Q5 Le problème étant considéré comme plan, deux équations scalaires proviennent de l'application du théorème de la résultante dynamique au système S en projection sur les axes \vec{x}_f et \vec{z}_f . La troisième équation scalaire provient de l'application du théorème du moment dynamique au système S en projection sur l'axe (G, \vec{y}_f) .

Les masses et inerties des roues motorisées sont négligeables, donc la résultante dynamique du système S est égale à la résultante dynamique du fauteuil et de l'utilisateur qui ont un mouvement de translation dirigé selon \vec{x}_f :

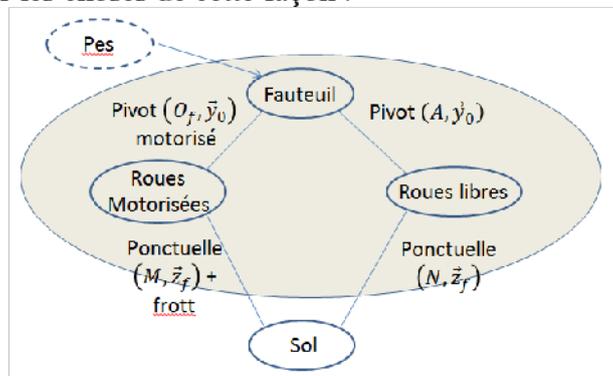
$M_S \vec{a}(G, S / R_0) = M_S \ddot{x}(t) \vec{x}_f$

Le bilan des actions mécaniques exercées par l'extérieur sur le système S donne :



« Je le présente de cette façon car il faut fournir de l'électricité aux moteurs pour qu'ils fournissent de la puissance mécanique aux roues motorisées, ce qui est forcément à l'extérieur du système » .

On peut aussi présenter les choses de cette façon :



Les actions des forces électromagnétiques (moteurs) sur les roues et sur le fauteuil s'annulent. Rappel : $\alpha \leq 0$, on obtient donc :

$(1) \quad X_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

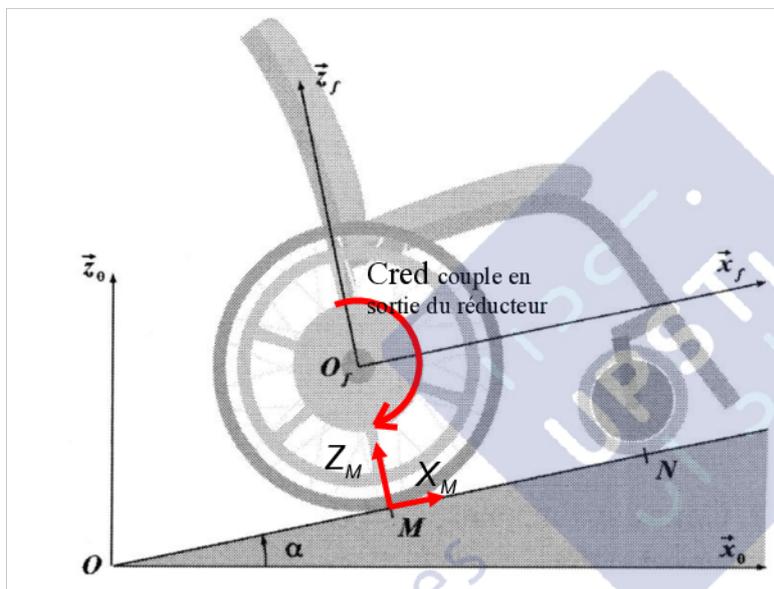
$$\vec{M}_{G_{Sol \rightarrow \text{roues avant}}} \cdot \vec{y}_f = (\vec{GN} \wedge Z_N \vec{z}_f) \cdot \vec{y}_f = [(-h \vec{z}_f + e \vec{x}_f) \wedge Z_N \vec{z}_f] \cdot \vec{y}_f = -e Z_N$$

$$\vec{M}_{G_{Sol \rightarrow \text{roues arri\`ere}}} \cdot \vec{y}_f = (\vec{GM} \wedge [X_M \vec{x}_f + Z_M \vec{z}_f]) \cdot \vec{y}_f = [(-h \vec{z}_f - l \vec{x}_f) \wedge [X_M \vec{x}_f + Z_M \vec{z}_f]] \cdot \vec{y}_f = -h X_M + l Z_M$$

$$(3) \quad -e Z_N - h X_M + l Z_M = 0$$

Q6 A la limite du glissement, on a d'après la loi de Coulomb :

$$(4) \quad X_M = f Z_M$$



Le fauteuil monte donc l'action tangentielle du sol sur la roue motorisée est dirigée selon $+\vec{x}_f$:

- la roue motorisée arri\`ere est en \`equilibre puisque sa masse et son inertie sont n\`eglig\`ees.
- en appliquant le th\`eor\`eme du moment statique en projection sur l'axe (O_f, \vec{y}_f) \`a la roue motoris\`ee, on trouve que X_M est dirig\`e selon $+\vec{x}_f$

$$\text{Cred} - R X_M = 0 \Rightarrow X_M > 0$$

Rappel : $\alpha \leq 0$

On a donc le syst\`eme d'\`equations suivant :

$$(1) \quad f Z_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

$$(3) \quad -e Z_N - h f Z_M + l Z_M = 0$$

$$e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e + l - h f) Z_M = e M_S g \cos \alpha$$

D'o\`u :

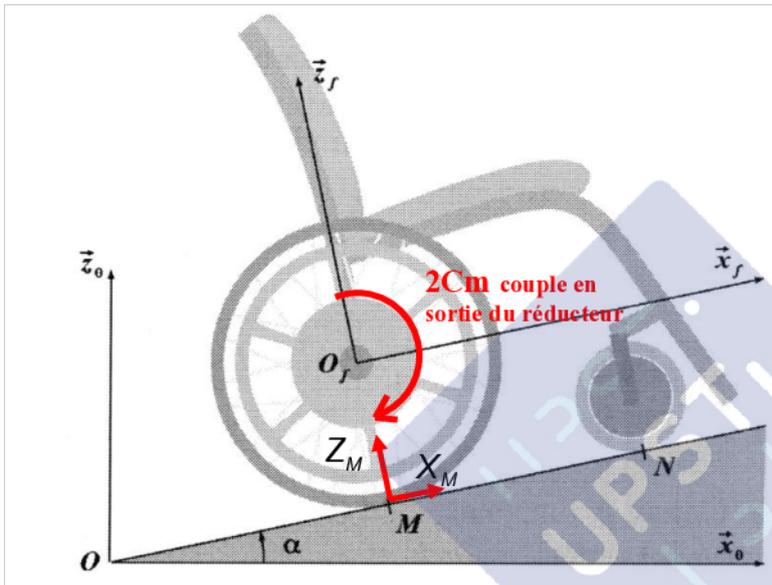
$$\ddot{x}(t) = g \left[\sin \alpha + \frac{f e \cos \alpha}{(e + l - h f)} \right]$$

Application num\`erique : on a alors $\tan|\alpha| = \frac{12}{100}$ pour une pente de 12%, d'o\`u $\alpha = -6,8^\circ$

$$\ddot{x} = 4,15 \text{ m.s}^{-2}$$

Q7 Si on cherche le couple moteur en fonction de l'accélération du fauteuil, il faut tenir compte du réducteur. Vu l'importance (70 N.m page 8/15 du sujet) du couple moteur fourni, je pense qu'il faut comprendre le couple moteur comme le couple en sortie du « motoréducteur » ce qui correspond à C_{red} comme indiqué sur la figure que j'utilise pour la Q6. On tient compte du fait qu'il y a deux moteurs et qu'on considère le problème comme plan.

On a



Le système isolé est à présent constitué des deux roues motorisées. La masse et l'inertie de ces roues étant négligées, j'applique le théorème du moment statique en projection sur l'axe (O_f, \vec{y}_f) :

$$\vec{M}_{Of \text{ Sol} \rightarrow \text{roues arrières}} \cdot \vec{y}_f + \vec{M}_{Of \text{ motoréducteurs} \rightarrow \text{roues arrières}} \cdot \vec{y}_f = 0$$

$$\vec{M}_{Of \text{ Sol} \rightarrow \text{roues arrières}} \cdot \vec{y}_f = (\vec{O}_f \vec{M} \wedge [X_M \vec{x}_f + Z_M \vec{z}_f]) \cdot \vec{y}_f = [-R \vec{z}_f \wedge X_M \vec{x}_f] \cdot \vec{y}_f = -R X_M$$

$$\text{avec } X_M = f Z_M$$

$$\text{On a donc : (5) } 2C_m - R f Z_M = 0$$

On avait précédemment trouvé :

$$(1) f Z_M + M_s g \sin \alpha = M_s \ddot{x}(t) \Leftrightarrow 2 \frac{C_m}{R} = M_s (\ddot{x}(t) - g \sin \alpha)$$

$$C_m = \frac{R}{2} M_s (\ddot{x}(t) - g \sin \alpha)$$

Application numérique dans le cas du glissement : $\ddot{x} = 4,15 \text{ m.s}^{-2}$

$$C_m \approx 160 \text{ Nm}$$

Q8 « Chaque moteur fournit 70 Nm au maximum » et on trouve qu'il faut un couple de 160 Nm pour que le fauteuil patine sur une pente de béton mouillé de 12%.

Les moteurs étant incapables de fournir ce couple élevé, le fauteuil ne patinera pas.

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0 \quad \text{et} \quad (5) \quad 2C_m - R f Z_M = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$Z_N = M_S g \cos \alpha - Z_M = M_S g \cos \alpha - \frac{2C_m}{R f} = 1461 - 1778 \quad [N]$$

$$Z_N = -317 \text{ N}$$

Ce qui est impossible : Z_N ne peut être que positif s'il y a contact entre la roue avant et le sol ou nul s'il n'y a pas contact avec le sol.

Donc, le fauteuil n'est pas en équilibre quand le couple moteur est de 160 Nm et quand il est à la limite du glissement sur une pente à 12% de béton mouillé : le fauteuil bascule.

D'où la nécessité de limiter le couple moteur pour empêcher le basculement.

Q9 On a maintenant le système d'équations suivant avec $C_m = 70 \text{ Nm}$

$$(1) \quad X_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

$$(5) \quad 2C_m - R X_M = 0 \quad X_M = 350 \text{ N}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{2C_m}{R M_S} + g \sin \alpha \quad \text{Application numérique : } \ddot{x}(t) = 1,17 \text{ m.s}^{-2}$$

Le fauteuil ne glissera pas sur une pente de béton mouillé de 12% puisque $C_m < 160 \text{ Nm}$.

On cherche à présent Z_N pour vérifier qu'il y a contact entre la roue avant et le sol.

On a le système d'équations :

$$(2) \quad Z_N + Z_M = M_S g \cos \alpha$$

$$(3) \quad -e Z_N + l Z_M = h X_M$$

$$l \times (2) - (3) \Leftrightarrow (e+l) Z_N = e M_S g \cos \alpha - h X_M \quad \text{avec} \quad (5) \quad X_M = \frac{2C_m}{R}$$

$$\text{On a donc : } Z_N = \frac{l M_S g \cos \alpha - h \frac{2C_m}{R}}{e+l}$$

Application numérique : $Z_N = 137N$

Le fauteuil ne bascule pas puisque $Z_N > 0$, les roues avant sont en contact avec le sol.

On peut vérifier qu'on n'a pas glissement en M :

$$e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e+l)Z_M = eM_s g \cos \alpha + h X_M$$

$$Z_M = \frac{eM_s g \cos \alpha + h \frac{2C_M}{R}}{e+l}$$

Application numérique : $Z_M = 1324N$

D'après la loi de Coulomb, on n'a pas glissement en M si : $|X_M| < f|Z_M|$

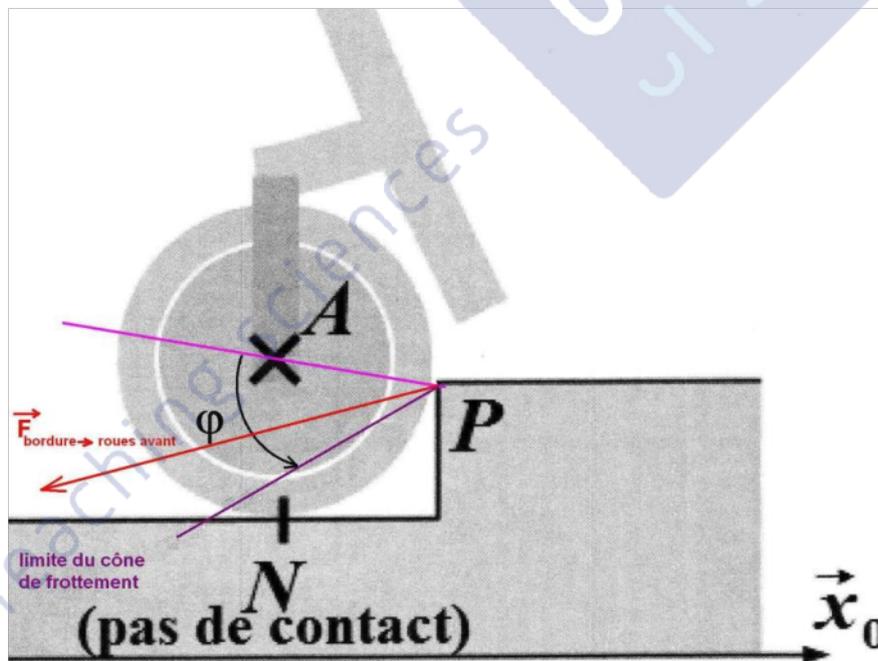
Le coefficient de frottement f des roues sur une rampe de béton mouillé de pente 12% est $f = 0,45$

On a bien : $350 < 0,45 \times 1324$.

Le fauteuil ne glisse pas sur une rampe de béton mouillé dont la pente est 12%.

Ce cas de figure étant le cas le plus défavorable, les moteurs mis en place sur le fauteuil permettent de respecter les normes d'accès aux bâtiments.

Q10



On isole la roue avant. Elle est soumise à deux forces :

- l'action du fauteuil par l'intermédiaire de la liaison pivot en A
- l'action de la bordure en P

Si la roue est en équilibre, ces deux forces sont de même direction : elles sont parallèles à [PA], ce qui correspond au cas où il n'y a pas de frottement. Or, il y a du frottement mais on ne sait pas s'il y a glissement.

Donc, la roue avant ne peut être en équilibre dans la configuration donnée et la force exercée par la bordure sur les roues avant est dans la partie inférieure du cône de frottement comme représenté sur la figure précédente.

Q11

Le système isolé est le fauteuil qui est soumis à trois forces :

- L'action de la pesanteur en G
- L'action du sol sur les roues motrices en M
- L'action de la bordure sur les roues avant en P

On considère que le fauteuil commence à monter : d'où l'action nulle en N du sol sur les roues avant.

Pour que le fauteuil puisse monter, il ne faut pas qu'il patine : donc il ne peut y avoir glissement en M et la force exercée par le sol sur les roues motrices ne peut être placée qu'à l'intérieur du cône d'adhérence.

Le point de concourance des trois forces ne peut se trouver que sur la demi-droite verticale au-dessus du point B.

Quand le fauteuil monte, s'il y a glissement en P sur la bordure et en sachant que les roues avant ne sont pas motrices, la bordure va s'opposer au mouvement des roues avant et donc la direction de la force exercée par la bordure sur les roues avant sera sur la limite inférieure du cône d'adhérence de sommet P.

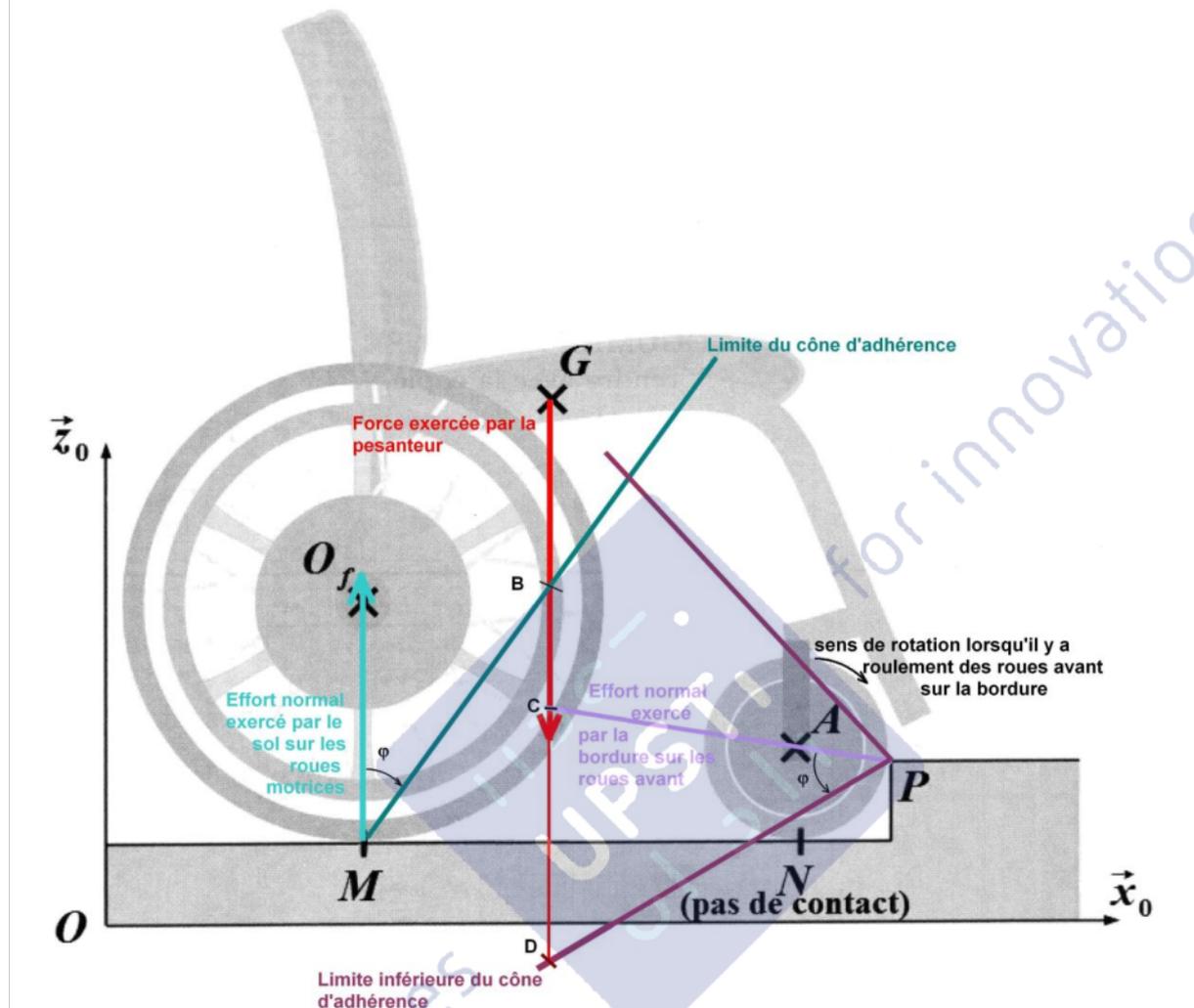
Alors l'équilibre est impossible car il n'y a pas de concourance des forces puisque D est en-dessous de B. Le chariot pivote car les forces exercées par la pesanteur et la bordure sur le fauteuil crée en M un moment négatif : donc le chariot retombe.

Quand le fauteuil monte, s'il y a roulement sans glissement en P, les roues avant doivent forcément tourner autour de l'axe (A, \vec{y}_0) dans le sens positif.

Donc il faut que l'effort tangentiel exercé par la bordure sur les roues avant soit dirigé vers le bas : la force exercée par la bordure sur les roues avant est forcément comprise dans la partie inférieure du cône d'adhérence de sommet P.

Le point de concourance est alors forcément sur le segment [BC]. Alors l'équilibre est impossible car il n'y a pas de concourance des forces et le chariot retombe.

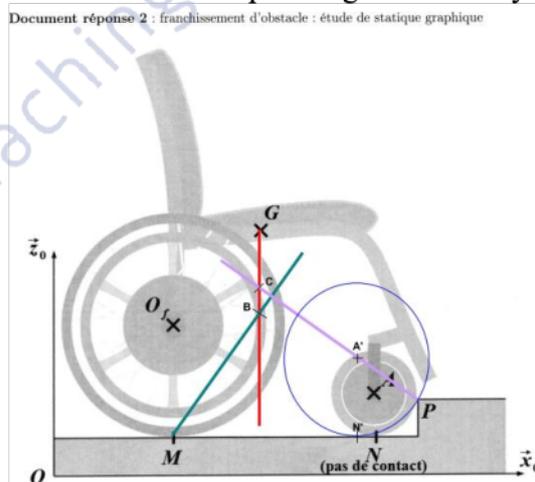
Document réponse 2 : franchissement d'obstacle : étude de statique graphique



Q12

Pour que le chariot puisse monter, il faut que le point C soit placé sur la verticale au-dessus du point B afin que les forces exercées sur le chariot puissent être concourantes.

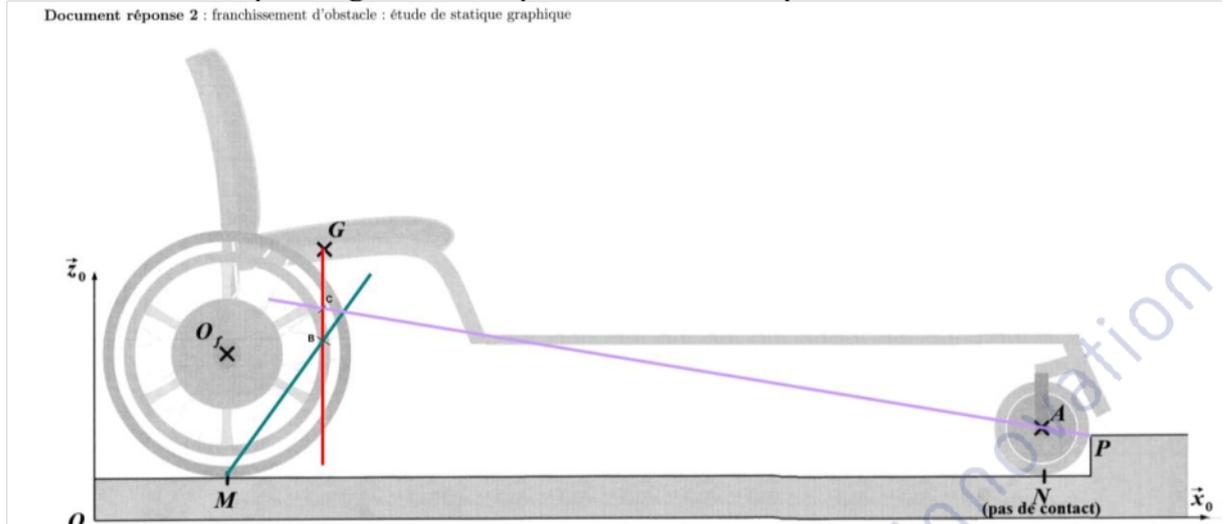
- Solution 1 : on peut augmenter le rayon des roues avant . Par exemple :



La nouvelle roue avant est en bleu.

Mais on voit qu'on est vite limité par le risque de contact entre roues motrices et roues avant.

- Solution 2 : on peut augmenter l'empattement .Par exemple :



Mais on voit qu'on a alors un fauteuil très encombrant et peu maniable et on ne peut pas déplacer G vers la droite car les mains de l'utilisateur doivent pouvoir agripper le cerclage des roues arrière.

Q13 a

Quand la trajectoire du fauteuil est une droite le rayon de courbure est infini : $\rho \rightarrow +\infty$ et

$$\omega_g = \omega_d$$

Quand le fauteuil tourne autour de l'axe (Of, \vec{z}_0) , il pivote sur lui-même, le rayon de courbure est nul : $\rho = 0$ et $\omega_g = -\omega_d$

Q13b Quand le fauteuil tourne autour de l'axe (Og, \vec{z}_0) , il pivote sur sa roue gauche et O_f parcourt un cercle rde rayon a autour de O_g , le rayon de courbure est nul : $\rho = a$ et $\omega_g = 0$

Q14a La condition de roulement sans glissement en I_g donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}(I_g, Rg / R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \underbrace{\vec{V}(Of, Rf / Rg)}_{\vec{0} \text{ car } Of \in (Og, \vec{y}_f)} + \vec{V}(Of, Rg / R_0) = \underbrace{\vec{V}(I_g, Rg / R_0)}_{\vec{0}} + \overline{Of Ig} \wedge \vec{\Omega}(Rg / R_0)$$

$$\vec{\Omega}(Rg / R_0) = \vec{\Omega}(Rg / Rf) + \vec{\Omega}(Rf / R_0) = \omega_g \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f$$

$$\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \left(\frac{a}{2} \vec{y}_f - R \vec{z}_f \right) \wedge (\omega_g \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f) = \frac{a}{2} \vec{y}_f \wedge \dot{\beta} \vec{z}_f - R \vec{z}_f \wedge \omega_g \vec{y}_f$$

$$\boxed{\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \left(\frac{a}{2} \dot{\beta} + R \omega_g \right) \vec{x}_f}$$

Q14b La condition de roulement sans glissement en I_d donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}(Id, Rd / R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \underbrace{\vec{V}(Of, Rf / Rd)}_{\vec{0} \text{ car } Of \in (Od, \vec{y}f)} + \vec{V}(Of, Rd / R_0) = \underbrace{\vec{V}(Id, Rd / R_0)}_{\vec{0}} + \overline{Of} Id \wedge \vec{\Omega}(Rd / R_0)$$

$$\vec{\Omega}(Rd / R_0) = \vec{\Omega}(Rd / Rf) + \vec{\Omega}(Rf / R_0) = \omega_d \vec{y}f + \beta \vec{z}f$$

$$\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \left(-\frac{a}{2} \vec{y}f - R \vec{z}f \right) \wedge \left(\omega_d \vec{y}f + \beta \vec{z}f \right) = -\frac{a}{2} \vec{y}f \wedge \beta \vec{z}f - R \vec{z}f \wedge \omega_d \vec{y}f$$

$$\boxed{\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \left(-\frac{a}{2} \beta + R \omega_d \right) \vec{x}f}$$

$$\text{Q14c } \vec{V}(Of, Rf / R_0) = \underbrace{\vec{V}(O, Rf / R_0)}_{\vec{0}} + \overline{Of} \vec{O} \wedge \vec{\Omega}(Rf / R_0)$$

$$\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \rho \vec{y}f \wedge \beta \vec{z}f_0$$

$$\boxed{\vec{V}(Of, Rf / R_0) = \rho \beta \vec{x}f}$$

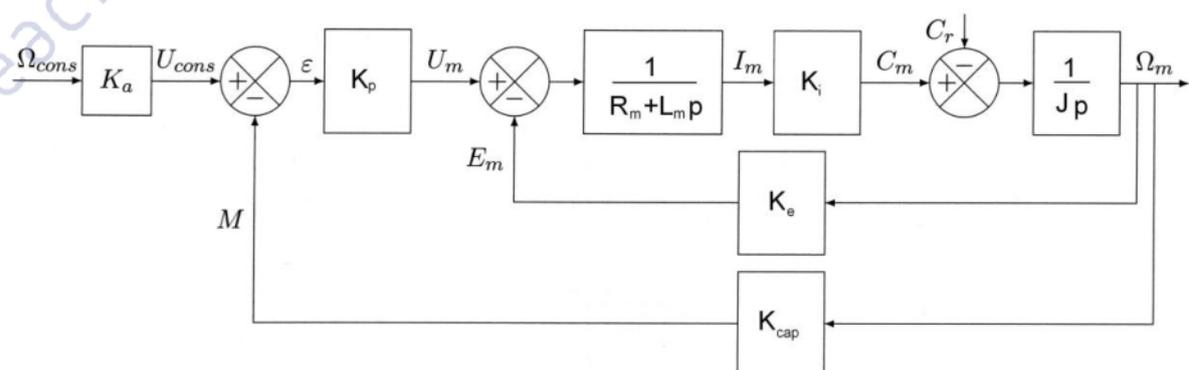
Q15 On a : $V(t) = \rho \dot{\beta}$ et on obtient le système d'équations suivant en utilisant les résultats de la Q14 :

$$\frac{a}{2} \dot{\beta} + R \omega_g = \rho \dot{\beta} \Rightarrow \frac{a}{2} \frac{V(t)}{\rho} + R \omega_g = V(t) \quad \boxed{\omega_g = \frac{1}{R} V(t) \left(1 - \frac{a}{2\rho} \right)}$$

$$-\frac{a}{2} \dot{\beta} + R \omega_d = \rho \dot{\beta} \quad \boxed{\omega_d = \frac{1}{R} V(t) \left(1 + \frac{a}{2\rho} \right)}$$

Q16

Document réponse 3 : modélisation de l'asservissement en vitesse de rotation d'un moteur

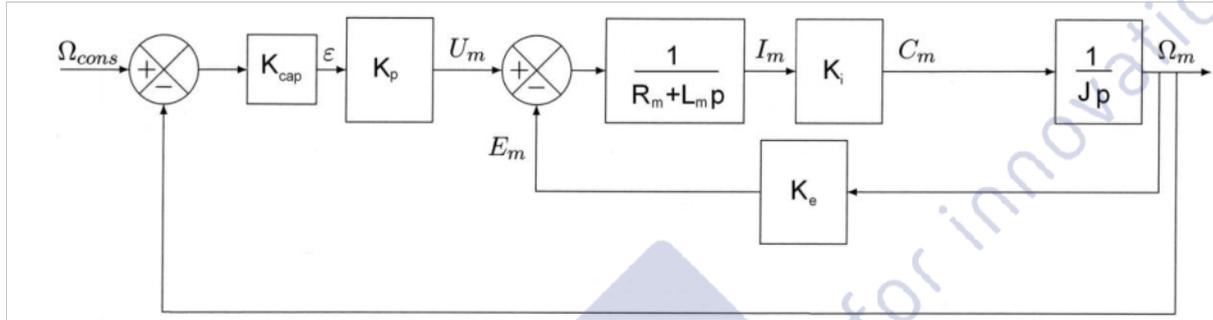


Pour que la vitesse de rotation du moteur soit correctement asservie, il faut que ε soit proportionnel à $\Omega_{cons} - \Omega_m$ or $\varepsilon = K_a \Omega_{cons} - K_{cap} \Omega_m$.

Il faut donc $K_a = K_{cap}$

Q17 $H_1(p)$ est la fonction de transfert $\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{cons}(p)}$ lorsqu'on néglige le couple $C_r(p)$.

Dans ce cas, puisque $K_a = K_{cap}$, le système peut être modélisé comme un système à retour unitaire :



$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_t}{Jp(R_m + L_m p)} \times \frac{1}{1 + \frac{K_t K_e}{Jp(R_m + L_m p)}} = \frac{K_t}{K_t K_e + Jp(R_m + L_m p)}$$

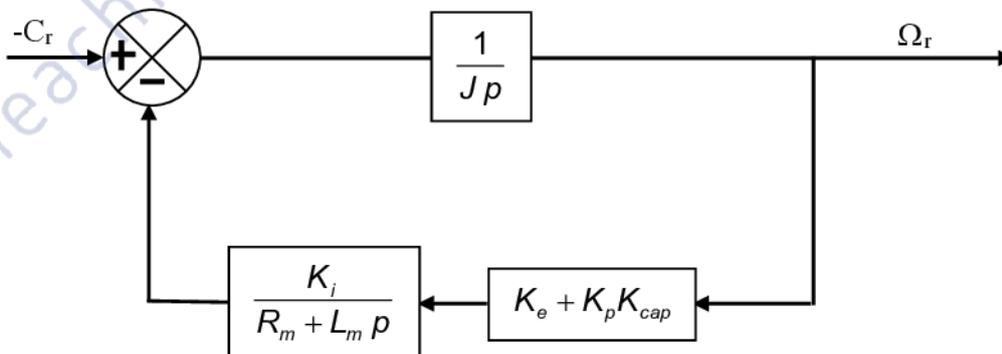
La FTBO est : $FTBO(p) = \frac{K_{cap} K_p K_t}{K_t K_e + Jp(R_m + L_m p)}$ et on a $H_1(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$

$$H_1(p) = \frac{K_{cap} K_p K_t}{K_t K_e + Jp(R_m + L_m p)} \frac{1}{1 + \frac{K_{cap} K_p K_t}{K_t K_e + Jp(R_m + L_m p)}} = \frac{K_{cap} K_p K_t}{K_{cap} K_p K_t + K_t K_e + Jp(R_m + L_m p)}$$

$$H_1(p) = \frac{K_{cap} K_p}{K_{cap} K_p + K_e} \frac{1}{1 + \frac{JR_m}{K_t(K_{cap} K_p + K_e)} p + \frac{JL_m}{K_t(K_{cap} K_p + K_e)} p^2}$$

Q18 $H_2(p)$ est la fonction de transfert $\frac{\Omega_m(p)}{-C_r(p)}$ lorsqu'on annule la consigne $\Omega_{cons}(p)$.

On a maintenant le schéma-blocs suivant :



On a donc :
$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{Jp}}{1 + \frac{K_i(K_p K_{cap} + K_e)}{Jp(R_m + L_m p)}} [-C_r(p)]$$

$$\Omega_m(p) = \frac{(R_m + L_m p)}{Jp(R_m + L_m p) + K_i(K_p K_{cap} + K_e)} [-C_r(p)]$$

$$H_2(p) = \frac{R_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} \frac{1 + \frac{L_m}{R_m} p}{1 + \frac{JR_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} p + \frac{JL_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} p^2}$$

Q19 On a le choix du critère pour répondre à cette question :

- Q17 j'ai introduit la FTBO : $H_{1BO}(p) = \frac{K_{cap} K_p K_i}{K_i K_e + Jp(R_m + L_m p)}$ qui est un système d'ordre 2 dont la phase est toujours supérieure à -180° : le système sera stable en boucle fermée quelle que soit la valeur de K_p .
- Q18 on a déterminé la fonction de transfert

$$H_i(p) = \frac{K_{cap} K_p}{K_{cap} K_p + K_e} \frac{1}{1 + \frac{JR_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} p + \frac{JL_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} p^2}$$
 dont le

dénominateur est un polynôme d'ordre 2 dont les coefficients sont positifs, donc les racines sont à partie réelle négative. Si on vérifie en utilisant le critère de Routh qui donne les calculs suivants :

$$\begin{vmatrix} \frac{JL_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} & \frac{JR_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{JR_m}{K_i(K_{cap} K_p + K_e)}$$

On trouve bien un terme positif.

Le système sera stable en boucle fermée quelle que soit la valeur de K_p .

Q20 D'après la Q17, on a $FTBO(p) = \frac{K_{cap} K_p K_i}{K_i K_e + Jp(R_m + L_m p)}$

$$FTBO(p) = \frac{K_{cap} K_p}{K_e} \frac{1}{1 + \frac{JR_m}{K_i K_e} p + \frac{JL_m}{K_i K_e} p^2}$$
 et comme $K_e = K_{cap} = K_i$

$$FTBO(p) = \frac{K_p}{1 + \frac{JR_m}{K_i^2} p + \frac{JL_m}{K_i^2} p^2}$$

Q21 On cherche le coefficient d'amortissement m de FTBO(p) :

$$FTBO(p) = \frac{K_p}{1 + \frac{JR_m}{K_i^2} p + \frac{JL_m}{K_i^2} p^2} = \frac{K_p}{1 + 2,25 p + 0,01 p^2} = \frac{K_p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

D'où : $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

$$\frac{2m}{\omega_0} = 2,25 \Rightarrow m = \frac{2,25 \times 10}{2} = 11,25$$

Le coefficient d'amortissement étant nettement supérieur à 1 , il faut rechercher les racines car cette FTBO correspond à deux premiers ordres en série :

$$FTBO(p) = K_p \frac{1}{1 + T_1 p} \frac{1}{1 + T_2 p}$$

Pour simplifier les calculs , je recherche les racines du polynôme

$100 \times (1 + 2,25 p + 0,01 p^2) = p^2 + 225 p + 100$ dont le discriminant est :

$$\Delta = 225^2 - 4 \times 100 = 50225 \quad \sqrt{\Delta} = 224,11$$

$$\text{Les racines sont : } p_1 = \frac{-225 + 224,11}{2} \approx -0,445 \Rightarrow \frac{1}{T_1} = 0,445 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$p_2 = \frac{-225 - 224,11}{2} \approx -225 \Rightarrow \frac{1}{T_2} = 225 \text{ rad.s}^{-1}$$

Le tracé des asymptotes est en rouge.

Le tracé des tangentes intermédiaires $\left[\frac{1}{5T_i}, \frac{5}{T_i} \right]$ est en violet pour la courbe de la phase. C'est

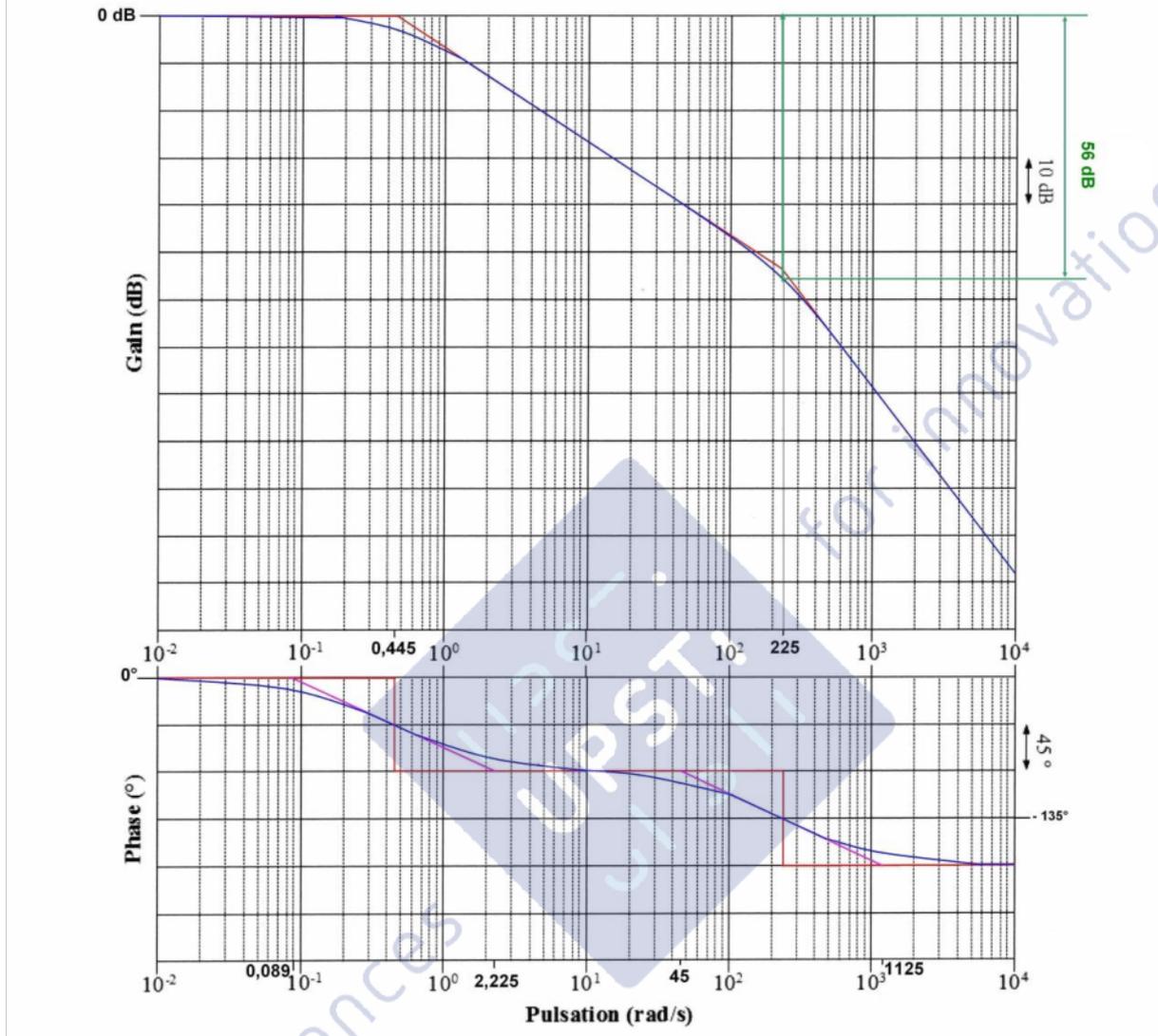
une astuce qui sert bien quand on n'a pas les abaques. A $\frac{1}{5T_i}$, la courbe réelle passe à -12°

par rapport à l'asymptote et à $\frac{5}{T_i}$ la courbe réelle passe à $+12^\circ$ par rapport à l'asymptote. A

La pulsation de coupure, ça tangente parfaitement.

Le tracé réel est en bleu.

Document réponse 4 : tracé asymptotique des diagrammes de Bode de $FTBO(p)$ pour $K_p = 1$



Q22 D'après le cahier des charges , on veut une marge de gain supérieure ou égale à 15 dB. Etant donné l'ordre 2 de la FTBO, la marge de gain tend vers l'infini, quelle que soit la valeur de K_p .

Q23 Comme on nous a fait tracé la courbe de gain réelle, je privilégie ici aussi l'aspect graphique. D'après le cahier des charges , on veut une marge de phase supérieure ou égale à 45° . Or la courbe de phase passe par -135° pour $\omega_2 = 225 \text{ rad.s}^{-1}$. D'après le diagramme de Bode, il faut $20 \log K_p = +56 \text{ dB}$ pour que $\omega_2 = 225 \text{ rad.s}^{-1}$ soit la pulsation de coupure à 0dB.

$$20 \log K_p = +56 \text{ dB} \Rightarrow K_p = 10^{\frac{56}{20}} \quad K_p \approx 630$$

Il faut donc $K_p \leq 630$ pour que la marge de phase soit supérieure ou égale à 45° .

Q24 La valeur finale de $\omega_m(t)$ dépend du gain statique de la fonction donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \frac{K_{cap} K_p}{K_{cap} K_p + K_e} \omega_c = \frac{K_p}{K_p + 1} \omega_c$$

car $K_e = K_{cap}$

Le critère de précision sur la vitesse est une erreur statique de $\pm 10\%$ pour la vitesse du chariot, or, en ligne droite, la vitesse du chariot est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur, donc on veut :

$$\frac{K_p}{K_p + 1} \geq 0,9 \Rightarrow K_p \geq 0,9(K_p + 1) \Rightarrow \boxed{K_p \geq 9}$$

Q25 On a $H_1(p) = \frac{K_{cap} K_p}{K_{cap} K_p + K_e} \frac{1}{1 + \frac{J R_m}{K_i (K_{cap} K_p + K_e)} p + \frac{J L_m}{K_i (K_{cap} K_p + K_e)} p^2}$

D'où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_i (K_{cap} K_p + K_e)}{J L_m}} \quad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{J R_m}{K_i (K_{cap} K_p + K_e)}$$

$$m = \frac{R_m}{2 \sqrt{L_m K_i (K_{cap} K_p + K_e)}}$$

Or $K_e = K_{cap} = K_i$

$$\omega_0 = K_i \sqrt{\frac{(K_p + 1)}{J L_m}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_m}{2 K_i \sqrt{L_m (K_p + 1)}}$$

Application numérique :

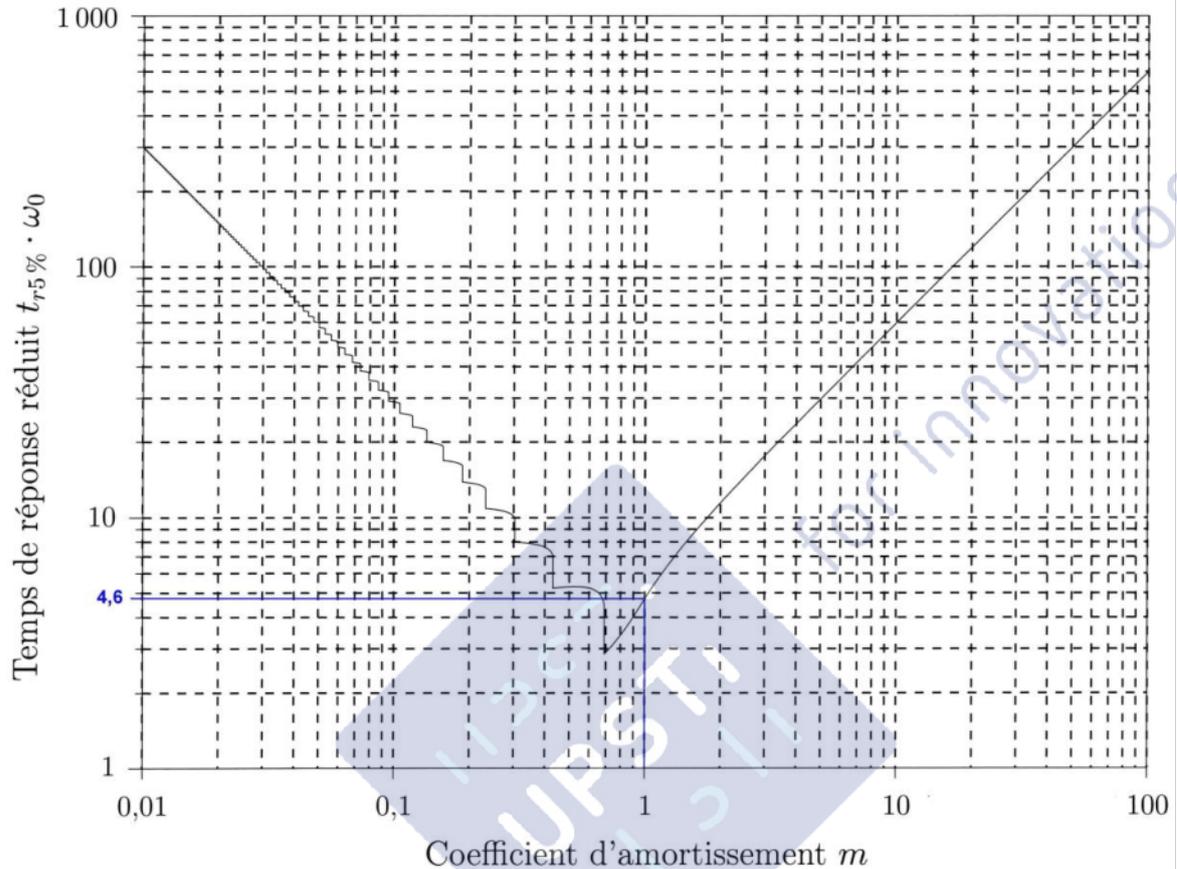
$$\omega_0 = 10 \sqrt{K_p + 1} \quad m = \frac{11,25}{\sqrt{K_p + 1}}$$

Q26 La réponse de la roue la plus rapide sans dépassement correspond à $\boxed{m = 1}$ d'où $\boxed{K_p = 125,5}$ et dans ce cas, la pulsation propre non amortie est $\omega_0 = 112,5 \text{ rad.s}^{-1}$.

D'après les tracés réalisés sur le document-réponse 5, on a :

$$\boxed{t_{r5\%} = 41 \cdot 10^{-3} \text{ s}}$$

Document réponse 5 : rapidité du système



$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 4,6$$

$$t_{r5\%} = 41.10^{-3} \text{ s}$$

Q28 Privilégier le critère de rapidité revient à chercher la valeur de K_p qui permet d'obtenir le temps de réponse le plus court, ce qui correspond à la valeur du coefficient

d'amortissement : $m=0,69$. Avec la relation $m = \frac{11,25}{\sqrt{K_p + 1}}$, on trouve alors la valeur de K_p :

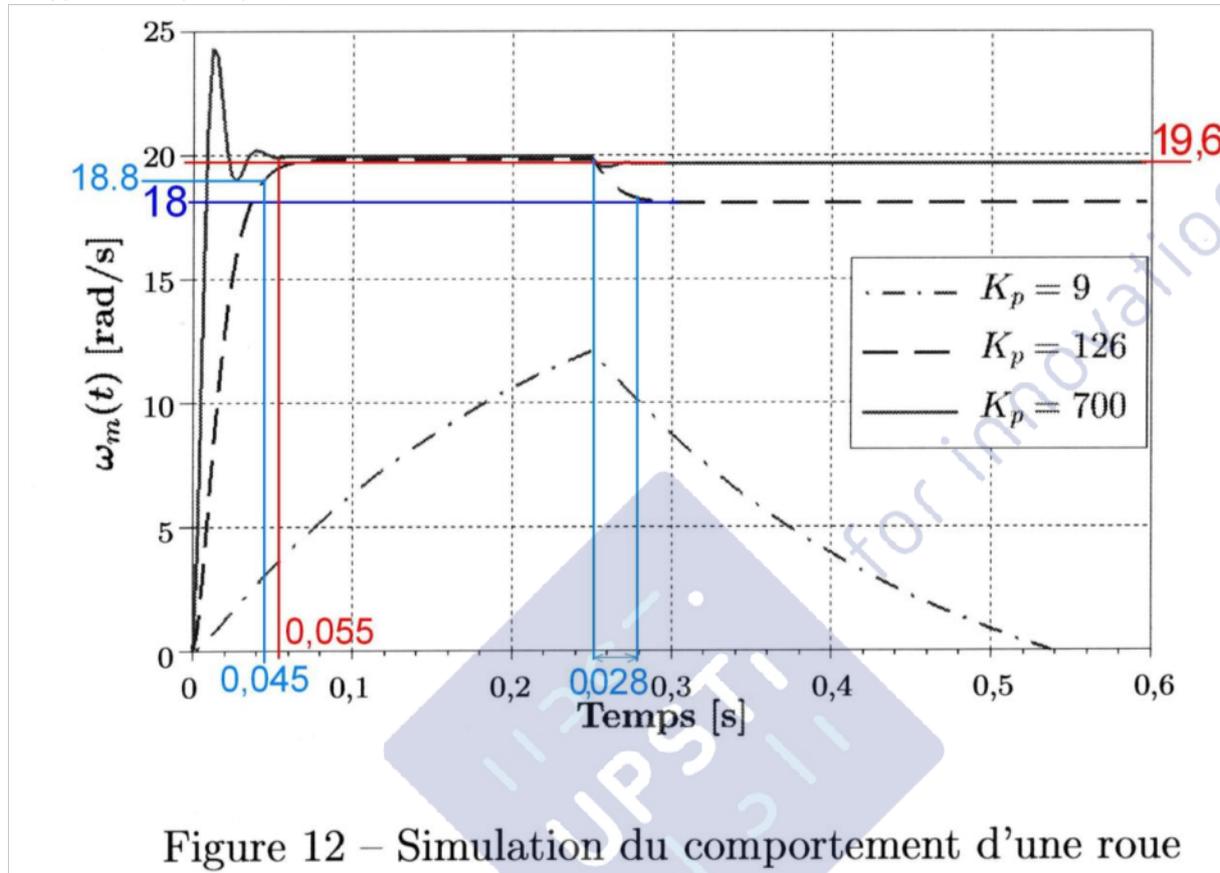
$$K_p = 264,8$$

Q29 Q18 on a déterminé :

$$H_2(p) = \frac{R_m}{K_i(K_{cap}K_p + K_e)} \frac{1 + \frac{L_m}{R_m} p}{1 + \frac{JR_m}{K_i(K_{cap}K_p + K_e)} p + \frac{JL_m}{K_i(K_{cap}K_p + K_e)} p^2}, \text{ donc, quel que soit la}$$

valeur de K_p , le gain statique n'est pas nul et un couple perturbateur va avoir une influence sur la vitesse de rotation du moteur en régime permanent, donc sur la précision.

$\Omega_m(p) = H_1(p)\Omega_{cons}(p) - H_2(p)C_r(p)$ ce qui justifie bien la diminution de la vitesse de rotation du moteur à partir du moment où on applique un couple perturbateur $c_r(t) = 50 \mathcal{U}(t - \tau)$ [Nm].



Courbe $K_p=9$: valeur due au critère de précision

- Précision : la précision n'est pas bonne car le gain K_p est peu élevé bien qu'il corresponde au critère d'une erreur statique de 10% (Q24) mais c'était sans tenir compte de la perturbation.
- Dépassement : le coefficient d'amortissement est supérieur à 1 : on trouve $m = \frac{11,25}{\sqrt{K_p + 1}} = 3,56$. Il n'y a pas de dépassement .
- Rapidité : étant donné le fort amortissement, le système répond lentement.

Courbe $K_p=126$: valeur due au critère de rapidité sans dépassement

- Précision : l'erreur statique $20 - 18 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ vérifie bien le critère de précision de 10% en dépit de la perturbation.
- Dépassement : le coefficient d'amortissement est égal à 1 , on retrouve bien le fait qu'il n'y a pas de dépassement .
- Rapidité : le système répond rapidement , on trouve graphiquement un temps de réponse de $45 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ proche de la valeur déterminée Q27 ($41 \cdot 10^{-3} \text{ s}$). Lorsque le perturbation agit, le temps de réponse du système pour atteindre 18 rad.s^{-1} est de $28 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Courbe $K_p=700$:

- Précision : l'erreur statique $20 - 19,6 = 0,4 \text{ rad.s}^{-1}$ est faible : on vérifie bien le critère de précision de 10% en dépit de la perturbation.

- Dépassement : le coefficient d'amortissement est inférieur à 1 , on trouve $m = \frac{11,25}{\sqrt{K_p + 1}} = 0,42$.On retrouve bien le fait qu'il y a dépassement .
- Rapidité : le système a un temps de montée court mais répond rapidement , on trouve graphiquement un temps de réponse de 55.10^{-3} s compatible avec la valeur du cahier des charges : 0,3s.

En conclusion , on choisit la valeur $K_p = 126$ car cela garantit la vérification des critères de rapidité, de précision et de non-dépassement tels que spécifiés dans le cahier des charges.

Q30 –

Les couples résistants étant nuls, le théorème du moment dynamique appliqué à la roue droite donne

$$J_d \frac{d\omega_d(t)}{dt} = C_{md}(t)$$

Donc, pour un couple donné, l'accélération angulaire est inversement proportionnelle au moment d'inertie. Autrement dit , plus l'inertie est grande, plus les variations de vitesses sont faibles.

On retrouve bien ce résultat sur la figure 13.

Pour le rayon de courbure, on reprend la figure 10.

En ligne droite les vitesses de rotations sont les mêmes.

On veut tourner donc on demande une variation de vitesse des roues et on a montré qu'elle était de même amplitude mais de signe opposé :

- si l'inertie est la même, le temps de réponse est le même et le rayon de courbure est « bon »
- si l'inertie de la roue droite est plus grande que celle de la roue gauche, elle réagit moins vite. Pendant une phase transitoire, la roue extérieure va moins vite que nécessaire donc le rayon de courbure augmente.

Et inversement si l'inertie de la roue droit est plus petite.D'où la figure 14 .

FIN