

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2014

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

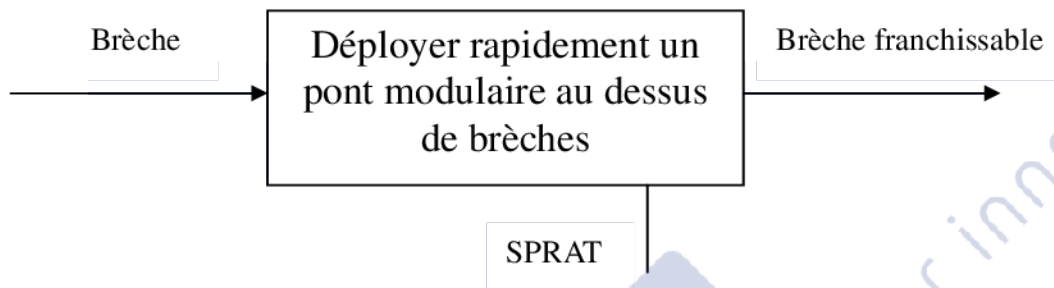
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Système de pose rapide de travures (SPRAT)

Partie 1 : Présentation du support et analyse fonctionnelle

Q1.1 : *Proposer un diagramme SADT de niveau A-0 du SPRAT.*



Q1.2 : *Donner une explication qualitative du choix technologique de suspension à roues indépendantes.*

Le SPRAT peut évoluer sur un sol très accidenté. Afin de pouvoir déposer les travures le plus efficacement possible, il doit pouvoir maîtriser ses déplacements et donc garder un maximum de contact avec le sol. Le choix de suspensions indépendantes est donc justifié.

Partie 2 : Etude de la manœuvrabilité du ponteur

Q2.1 : Exprimer la condition de roulement sans glissement au point de contact P entre une roue et le sol. En déduire l'orientation de cette roue.

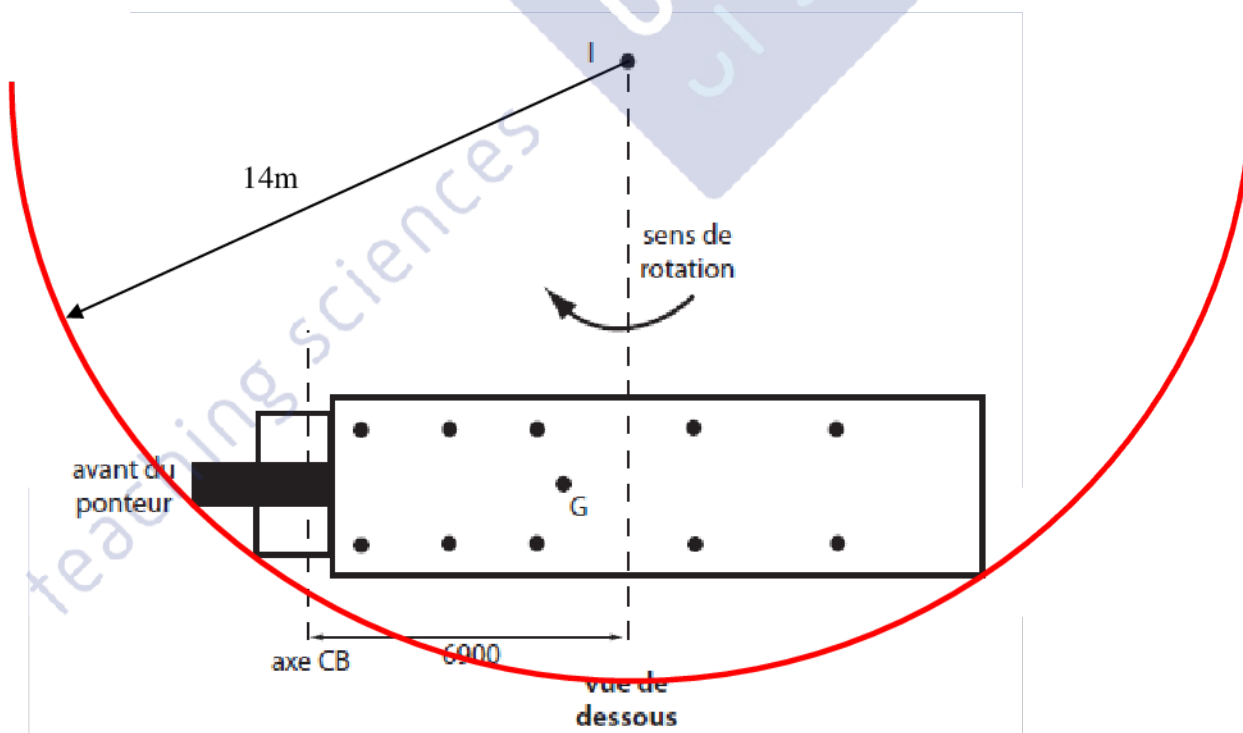
Roulement sans glissement au point P : $\overrightarrow{V_{P, \text{roue} / \text{sol}}} = \vec{0}$

Soit π le plan normal à $\vec{u}$ passant par Q .

Si on note I l'intersection entre le plan π et l'axe instantané de rotation du mouvement du SPRAT par rapport au sol, alors l'axe $(Q, \vec{v})$ doit passer par I .

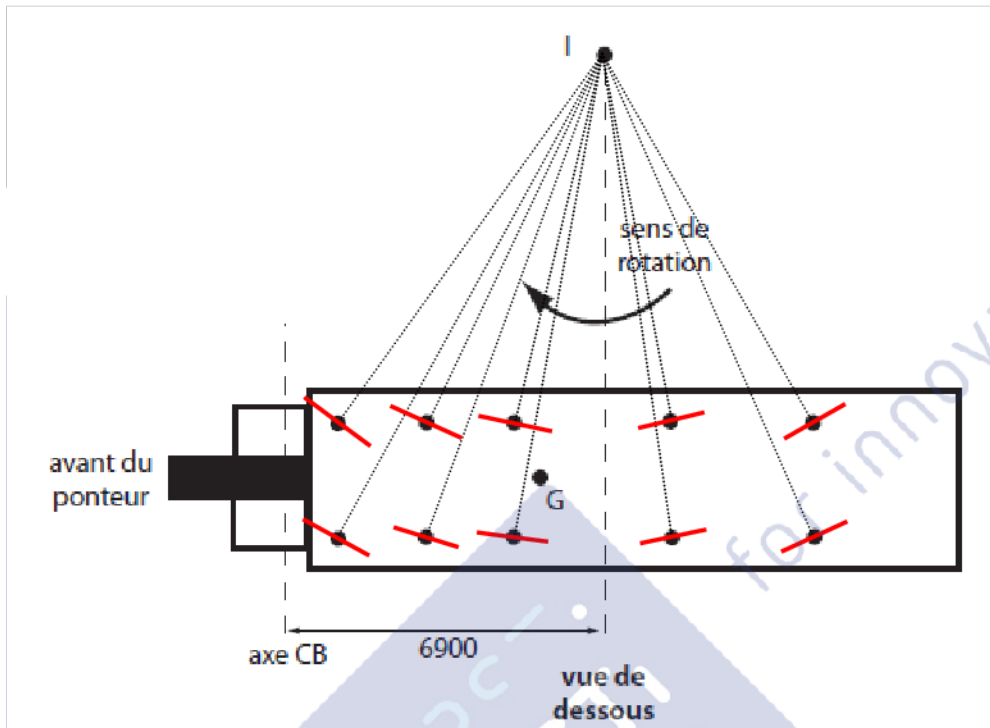
Q2.2 : Justifier graphiquement la position du point I donnée sur le document DR1, en détaillant la méthode permettant de l'obtenir.

Dans la situation étudiée (manœuvre dans une zone circulaire de rayon 14m), Le point I correspond au centre du cercle de rayon 14m de la figure 6.



Q2.3 : Représenter alors sur le document DR1 l'orientation des dix roues du ponteur pendant la phase de braquage maximal étudiée. Quelle est la

conséquence sur la loi de rotation des deux roues d'un même essieu.



Les deux roues d'un même essieu n'ont pas les mêmes angles de rotation par rapport à la direction longitudinale du ponteur.

Q2.4 : Exprimer la loi entrée-sortie reliant β_d à θ en fonction des données géométriques. Montrer, en considérant que $\Delta\alpha_d$ est petit, que cette loi peut se mettre sous la forme $c_2 t^2 + c_1 t + c_0 = 0$ avec $t = \tan(\beta_d/2)$ et c_1, c_2 des constantes à déterminer en fonction de l_1, l_3, l_4, α^0 et θ .

On réalise une fermeture géométrique entre les points A, B, C et D :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$l_1 \vec{u}_1 + l_3 \vec{u}_3 - l_4 \vec{u}_4 = -l_x \vec{x} + l_y \vec{y}$$

Attention aux signes dans les projections !

$$l_1 (-\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) + l_3 (-\sin \alpha_d \vec{x} + \cos \alpha_d \vec{y}) - l_4 (\cos \beta_d \vec{x} + \sin \beta_d \vec{y}) = -l_x \vec{x} + l_y \vec{y}$$

$$\begin{cases} -l_1 \cos \theta - l_3 \sin \alpha_d - l_4 \cos \beta_d = -l_x \\ l_1 \sin \theta + l_3 \cos \alpha_d - l_4 \sin \beta_d = l_y \end{cases}$$

En prenant comme hypothèse le $\Delta\alpha_d$ petit

$$\begin{aligned} \cos(\alpha^0 + \Delta\alpha_d) &= \cos \alpha^0 \cos \Delta\alpha_d - \sin \alpha^0 \sin \Delta\alpha_d \approx \cos \alpha^0 - \sin \alpha^0 \Delta\alpha_d \\ \sin(\alpha^0 + \Delta\alpha_d) &= \cos \alpha^0 \sin \Delta\alpha_d + \sin \alpha^0 \cos \Delta\alpha_d \approx \cos \alpha^0 \Delta\alpha_d + \sin \alpha^0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} -l_1 \cos \theta + l_3 \Delta\alpha_d \cos \alpha^0 - l_4 \cos \beta_d = -l_x - l_4 \\ l_1 \sin \theta + l_3 \Delta\alpha_d \sin \alpha^0 - l_4 \sin \beta_d = 0 \end{cases}$$

On élimine $\Delta\alpha_d$ de ces équations :

$$\tan \alpha^0 = \frac{-l_1 \sin \theta + l_4 \sin \beta_d}{l_1 \cos \theta + l_4 \cos \beta_d - l_4 - l_1}$$

On utilise ensuite les formules :

$$\begin{cases} \cos \beta_d = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin \beta_d = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha^0 \left(l_1 \cos \theta + l_4 \frac{1-t^2}{1+t^2} - l_4 - l_1 \right) = -l_1 \sin \theta + l_4 \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha^0 \left((1+t^2)l_1 \cos \theta + l_4(1-t^2) - (l_4 + l_1)(1+t^2) \right) = -(1+t^2)l_1 \sin \theta + 2tl_4$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} c_2 = \tan \alpha^0 (l_1 \cos \theta - 2l_4 - l_1) + l_1 \sin \theta \\ c_1 = -2l_4 \\ c_0 = \tan \alpha^0 (l_1 \cos \theta - l_1) + l_1 \sin \theta \end{cases}$$

Q2.5 : Analyser cette réponse, et conclure sur l'intérêt du mécanisme de braquage utilisé.

Le mécanisme de braquage utilisé permet d'avoir des rotations β_d et β_g très proches autour de $\theta = 0$ et d'avoir un léger écart entre ces 2 angles lorsque le braquage augmente. Ceci correspond bien à la situation trouvée à la question Q2.3.

Q2.6 : Exprimer la vitesse critique V_{basc1} pour laquelle le ponteur bascule dans la phase de braquage étudiée, en fonction des longueurs d_y , d_z et $\overline{IG}$. Calculer cette vitesse à partir des données des documents DT1 et DR1.

Dans une rotation de rayon R à vitesse V constante, l'effet d'inertie a pour valeur : $F_c = m \frac{V^2}{R}$

L'équation du moment dynamique autour de l'axe $(H, \vec{x})$ donne donc (à la limite du basculement) :

$$P.d_y = \frac{PV_{basc1}^2}{g.IG}.d_z$$

Ou encore :

$$V_{basc1} = \sqrt{\frac{g.IG.d_y}{d_z}}$$

AN :

$$d_y = \frac{v_{ext}}{2} = 1.555m$$

$$d_z = (2.82 - 0.84) = 1.98m$$

$$IG \approx \sqrt{14^2 - 6.9^2} - 2 = 10.18m$$

$$V_{basc1} = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 10.18 \cdot 1.555}{1.98}} = 8.85m.s^{-1} = 31.9km.h^{-1}$$

Remarque : pour le calcul de IG on fait l'approximation que le point G est à la verticale du point I car le calcul précis n'est pas possible avec les données fournies.

Q2.7 : Conclure sur le respect du cahier des charges.

Le cahier des charges n'est pas respecté, le véhicule basculera avant 70km/h. Il ne faudra donc pas dépasser 31.9km/h en virage, mais en ligne droite on pourra aller jusqu'à 70km/h.

Le sujet précise d'ailleurs juste après que le braquage maximum autorisé dépend de la vitesse du véhicule.

Q2.8 : Justifier la présence d'un hystérésis dans la loi de verrouillage.

L'hystérésis permet d'éviter au système de verrouillage de s'activer/désactiver constamment lorsque le véhicule roule à vitesse constante autour de 25km/h.

Q2.9 : Par analyse du document DT3, identifier les trois informations manquantes notées « XXX » : entrée du calculateur, composants 6 et 7.

XXX entrée du calculateur : masse

XXX composant 6 : Potentiomètres roues arrière

XXX composant 7 : Potentiomètres roues avant

Q2.10 : Justifier l'intérêt du système de verrouillage hydraulique annexe.

Le verrouillage des roues arrière permet de mieux maîtriser la direction à grande vitesse.

Q2.11 : Montrer que l'hypothèse de roulement sans glissement pour l'ensemble des roues n'est plus possible pendant une manœuvre de braquage. Préciser l'impact du glissement sur le dimensionnement des roues du ponteur.

D'après la question Q2.3, on voit bien que les roues arrière doivent avoir des rotations différentes pour éviter le glissement des roues sur le sol.

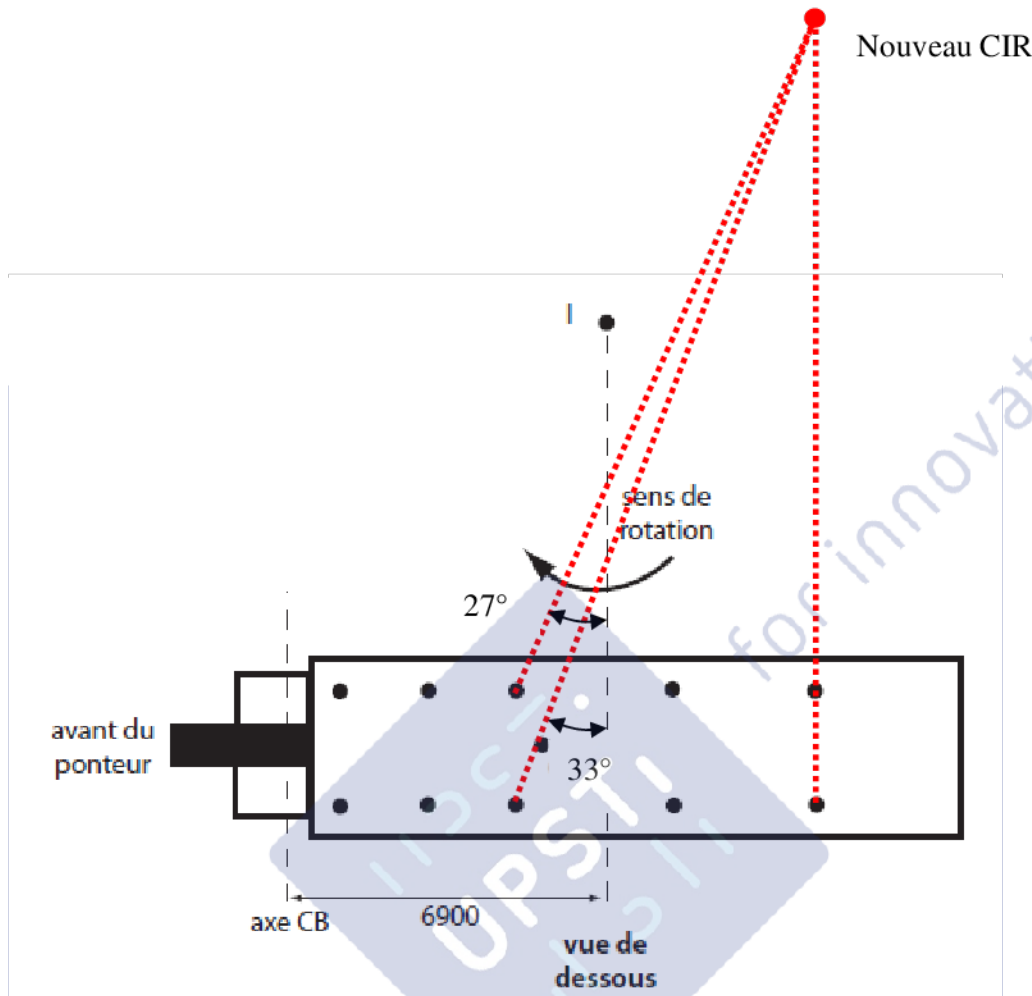
Le glissement des roues du ponteur sur le sol augmente leur usure. Il va donc falloir utiliser des roues avec une grosse épaisseur de gomme.

Q2.12 : Dans le cas du braquage maximal des roues avant étudié à la question 2.3, représenter sur le document DR1 la nouvelle position du CIR du ponteur. Conclure sur l'effet du blocage des roues arrière vis-à-vis de la vitesse V_{basc2}

provoquant le basculement du ponteur en configuration de braquage maximal des roues avant.

En position braquage maximum, on lit sur la figure 8 : $\beta_g = 27^\circ$ et $\beta_d = 33^\circ$





Le blocage des roues arrière éloigne le CIR du véhicule. On ne peut donc plus garantir un rayon de braquage minimal de 14m.

Le calcul de la nouvelle vitesse de basculement donne (IG est à peu près doublé par rapport à la situation précédente) :

$$V_{basc2} = \sqrt{\frac{g \cdot IG \cdot d_y}{d_z}} = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 20.36 \cdot 1.555}{1.98}} = 12.52 \text{ m.s}^{-1} = 45.09 \text{ km.h}^{-1}$$

Q2.13 : En pratique, la vitesse critique V_{basc2} reste inférieure à la vitesse de 70 km/h préconisée par le cahier des charges. Proposer alors un moyen d'éviter le basculement du ponteur en virage pour des vitesses de roulage comprises entre V_{basc2} et 70 km/h.

Le sujet propose de diminuer le braquage maximum autorisé lorsque la vitesse augmente (cf page 8).

Partie 3 : Etude de la stabilité en pontage

Q3.1 : Calculer le degré d'hyperstatisme de chacune des cinq liaisons entre le ponteur et le sol (une liaison pour chacun des pieds stabilisateurs).

stabAV

1 seule boucle.

Cette boucle comporte 1 mobilité (1 rotation autour de $(T, \vec{y})$).

$$h = m + 6\gamma - N_c = 1 + 6 \cdot 1 - 5 = 2$$

stabLAT

Même boucle que stabAV donc $h=2$

stabAR

Chaîne ouverte : $h=0$

Q3.2 : Déterminer la liaison équivalente (globale) entre le ponteur et le sol, ainsi que son degré d'hyperstatisme. Conclure.

Le stabilisateur avant permet 3 rotations et 2 translations du ponteur. Il réalise donc une liaison ponctuelle entre le ponteur et le sol.

Les stabilisateurs latéraux permettent chacun les mêmes mouvements que le stabilisateur avant sans la rotation d'axe $\vec{y}$. Ils réalisent donc chacun une liaison linéaire rectiligne de normale $\vec{z}$ et de direction $\vec{y}$ entre le ponteur et le sol.

Chaque stabilisateur arrière réalise une liaison ponctuelle isostatique entre le ponteur et le sol.

Les 3 liaisons ponctuelles sont équivalentes à un appui plan isostatique et les 2 linéaires rectilignes à un appui plan de degré d'hyperstatisme égal à 2. Ensuite, les deux appuis plans sont équivalents à un appui plan de degré d'hyperstatisme égale à 3.

Au final, le ponteur est en liaison appui plan avec le sol de degré d'hyperstatisme égal à 5 (2+3).

Nota : on peut aussi rajouter les hyperstatismes calculés dans la question précédente. On obtiendrait alors un hyperstatisme de 11 (5+2+2+2).

Conclusion : Le degré d'hyperstatisme trouvé valide la grande stabilité du dispositif lors de la dépose de travures.

Q3.3 : Expliquer l'intérêt de calculer les couples de rappel et de renversement par rapport à l'axe de rotation $(T, \vec{y})$ de la semelle du stabilisateur avant (voir Figures 13 et 14).

Le calcul de ces couples permet de savoir si le SPRAT risque de basculer vers l'avant lorsque les travures avancent vers l'avant et sont en porte à faux.

Q3.4 : A partir des données du document DT1, donner la valeur de la position longitudinale $X_{masse/stabAV} = \overrightarrow{TG_{masse}} \cdot \vec{x}$ du centre de gravité de chacune des cinq masses précédemment décrites par rapport au stabilisateur avant. On donne $\overrightarrow{OT} \cdot \vec{x} = -1977 \text{ mm}$.

Recherche du centre de gravité global :

$$M_{totale} \overrightarrow{TG_{masse}} \cdot \vec{x} = (M_c \overrightarrow{TG_c} + M_p \overrightarrow{TG_p} + M_b \overrightarrow{TG_b} + M_t \overrightarrow{TG_t} + M_{carb} \overrightarrow{TG_{carb}}) \cdot \vec{x}$$

$$X_{masse/stabAV} = \frac{M_c (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_c}) + M_p (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_p}) + M_b (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_b}) + M_t (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_t}) + M_{carb} (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_{carb}})}{M_c + M_p + M_b + M_t + M_{carb}} \cdot \vec{x}$$

AN :

$$X_{masse/stabAV} = \frac{7500 * (1,977 + 3,6) + 4500 * (1,977 - 5,08) + 30700 * (1,977 + 5,83) + 14300 * (1,977 - 15,40) + 1000 * (1,977 + 10)}{58000}$$

$$X_{masse/stabAV} = +1,51 \text{ m}$$

Le ponteur est bien stable en statique.

Q3.5 : Classer, en justifiant le raisonnement, les cinq masses en deux catégories selon qu'elles créent un couple de rappel ou de renversement.

Le châssis basculeur, la base roulante et le carburant créent un couple de rappel car ils appliquent un couple positif sur le ponteur autour de l'axe $(T, \vec{y})$.

La poutre de lancement et les travures créent un couple de renversement car elles appliquent un couple négatif sur le ponteur autour de l'axe $(T, \vec{y})$.

Q3.6 : Calculer les couples de renversement et de rappel, puis le coefficient K_s . Conclure sur la stabilité longitudinale du ponteur vis-à-vis du critère défini dans le cahier des charges.

Calcul du couple de rappel :

$$C_{rappel} = (M_c (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_c}) + M_b (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_b}) + M_{carb} (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_{carb}})) \cdot g \cdot \vec{x}$$

$$C_{rappel} = (7500 * (1,977 + 3,6) + 30700 * (1,977 + 5,83) + 1000 * (1,977 + 10)) * 9,81 = 2,88.10^6 \text{ N.m}$$

Calcul du couple de renversement :

$$C_{renversement} = (M_p (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_p}) + M_t (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OG_t})) \cdot g \cdot \vec{x}$$

$$C_{renversement} = (4500 * (1,977 - 5,08) + 14300 * (1,977 - 15,40)) * 9,81 = -2,02.10^6 \text{ N.m}$$

Le coefficient de stabilité vaut donc :

$$K_s = \frac{C_{rappel}}{|C_{renversement}| * K_{dyn}} = \frac{2,88.10^6}{2,02.10^6 * 1,05} = 1,36$$

Le coefficient de stabilité est bien supérieur à 1,2. Le critère du cahier des charges est respecté.

Q3.7 : *Décrire trois situations qui pourraient remettre en cause les hypothèses du modèle et dégrader les propriétés de stabilité longitudinale du ponteur (diminution de la valeur de K_s).*

Le coefficient K_s baissera si :

- $C_{\text{rappe}}/C_{\text{renversement}}$ diminue : en descente par exemple
- K_{dyn} augmente : freinage brutal des travures lors de leur déplacement
- Les travures sont plus lourdes (dépôt de boue par exemple)
- Des actions extérieures non modélisées agissent sur le ponteur (vent, pluie, ...)



Partie 4 : Dimensionnement de la motorisation du verrouillage des travures

Q4.1 : Donner deux avantages d'avoir un pont modulable.

Un pont modulable permet de combler soit deux petites brèches soit une grande brèche. Le dispositif peut donc s'adapter à la situation et éviter de retourner chercher un jeu de travure si il n'a que deux petites brèches à combler.

Q4.2 : Expliquer l'intérêt de placer les becs mobiles de façon dissymétrique sur les deux jeux de travures, comme illustré sur la Figure 15.

Placer les becs mobiles de façon dissymétrique permet de ne pas avoir à réfléchir au sens de pose des travures sur le ponteur. De plus, le pont assemblé sera a priori plus rigide en torsion.

Q4.3 : Déterminer l'amplitude de l'effort $\vec{F}_i = F_i \hat{i}$ que doit exercer chacun des deux crochets lors de la mise en position de la travure 2.

La somme des deux efforts des crochets doit être au moins égal en intensité à $f.F_n$ pour pouvoir faire glisser les travures l'une sur l'autre.

$$\text{Donc : } F_i = \frac{f.F_n}{2}$$

Q4.4 : Vérifier que la vitesse de rotation du moteur hydraulique permet de valider le temps de verrouillage imposé par le cahier des charges.

Rapport de réduction :

$$\frac{\omega_{\text{crochets}}}{\omega_{\text{moteur}}} = \frac{\omega_{\text{levier}}}{V_{\text{vis}}} * \frac{V_{\text{vis}}}{\omega_{\text{écrou}}} * \frac{\omega_{\text{écrou}}}{\omega_{\text{arbre_de_transmission}}} * \frac{\omega_{\text{arbre_de_transmission}}}{\omega_{\text{moteur}}}$$

Attention, $\frac{\omega_{\text{levier}}}{V_{\text{vis}}}$ n'est pas constant, mais le jury ne semble pas attendre un calcul précis à ce point pour cette question.

$$\frac{\omega_{\text{crochets}}}{\omega_{\text{moteur}}} = \frac{1}{l_{\text{levier}}} * \frac{p_{\text{vis}}}{2\pi} * r * \frac{\omega_{\text{arbre_de_transmission}}}{\omega_{\text{moteur}}}$$

Le sujet ne donne pas le dernier rapport de réduction de cette équation ! Un renvoi d'angle n'a pas forcément un rapport de réduction de 1. Mais sans indication supplémentaire, nous supposons ici

que ce rapport vaut 1 ($\frac{\omega_{\text{arbre_de_transmission}}}{\omega_{\text{moteur}}} = 1$)

$$\frac{\omega_{\text{crochets}}}{\omega_{\text{moteur}}} = \frac{p_{\text{vis}} * r}{2\pi * l_{\text{levier}}} = \frac{\theta_{\text{crochets}}}{\theta_{\text{moteur}}}$$

Le moteur devra donc tourner de :

$$\theta_{\text{moteur}} = \frac{0,1944 * 2\pi * 0,3}{0,004 * 0,3} = 305 \text{tr}$$

A une vitesse de rotation de 1000tr/min, le moteur mettra $\frac{305}{1000} * 60 = 18,3s < 20s$ pour verrouiller les travures. Le cahier des charges est bien vérifié.

Q4.5 : Compléter le document DR2 (cases grisées) et en déduire la valeur du couple nécessaire à la sortie du moteur hydraulique.

	$C_{\text{axe_crochets}} = 5000 \text{ N.m}$ $N_{\text{axe_crochets}} = 0,64 \text{ tr/min}$
LEVIER	rendement $\eta_{\text{levier}} = 0,8$ longueur = 300 mm
	$F_{\text{vis}} = 20833 \text{ N}$ $V_{\text{vis}} = 20 \text{ mm/s}$
SYSTEME VIS/ECROU	rendement $\eta_{\text{vis/ecrou}} = 0,3$ pas $p_{\text{vis}} = 4 \text{ mm/tr}$
	$C_{\text{écrou}} = 44,2 \text{ N.m}$ $N_{\text{écrou}} = 300,3 \text{ tr/min}$
REDUCTEUR	rendement $\eta_{\text{red}} = 0,9$ rapport $r = 3/10$
	$C_{\text{arbre}} = 14,7 \text{ N.m}$ $N_{\text{arbre}} = 1000 \text{ tr/min}$
LIGNE DE TRANSMISSION	rendement $\eta_{\text{ligne}} = 0,4$
	$C_{\text{moteur}} = 36,9 \text{ N.m}$ $N_{\text{moteur}} = 1000 \text{ tr/min}$

Le moteur hydraulique doit fournir un couple de 36,9Nm.

Q4.6 : Choisir, dans le catalogue du document technique DT4, un modèle de moteur hydraulique vérifiant le cahier des charges et minimisant l'encombrement (volume).

Les volumes des moteurs ne sont pas donnés... Doit-on utiliser la cylindrée ou le poids ?

En prenant comme critère la cylindrée minimale, on trouve le moteur **M5B 012**.

En prenant comme critère le poids minimal, on trouve le moteur **M4C 024**.



Partie 5 : Justification de la loi de basculement du châssis basculeur

Q5.1 : Démontrer que la matrice d'inertie de chacune des trois poutres, dans son repère $(G_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ associé, s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & C_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{bmatrix}_{(G_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)} \quad \text{où } A_i \text{ et } C_i \text{ sont à déterminer en fonction des caractéristiques } m_i, L_i \text{ et } a_i.$$

Chacune des 3 poutres possède 2 plans de symétries : $(G_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i)$ et $(G_i, \vec{X}_i, \vec{Z}_i)$. La matrice d'inertie est donc diagonale.

De plus, leurs sections étant carrées, on a : $\int_{S_i} y^2 dm = \int_{S_i} z^2 dm$ donc $B_i = C_i$.

Calcul des termes de la matrice :

$$A_i = \int_{S_i} (y^2 + z^2) dm = 2 \int_{S_i} y^2 dm = 2 \rho L_i a_i \int_{-a_i/2}^{a_i/2} y^2 dy = 2 \rho L_i a_i \frac{a_i^3}{3 \cdot 4} = \frac{m_i a_i^2}{6}$$

$$C_i = \int_{S_i} (x^2 + y^2) dm = \int_{S_i} x^2 dm + \frac{m_i a_i^2}{12} = \frac{m_i}{12} (L_i^2 + a_i^2)$$

Q5.2 : En considérant que les angles θ_2 et θ_3 restent petits, exprimer la raideur en torsion k_1 (resp. k_2) du ressort placé en G_1 (resp. en B_2) en fonction de Δ_2^0 , Δ_3^0 et des données.

On isole la poutre de lancement 2 et le pont 3. Leurs poids créent un couple en G_1 égal à :

$$C_{G_1} = m_2 g \cdot G_1 G_2 \cdot \cos \theta_2 + m_3 g \cdot (B_2 G_1 \cdot \cos \theta_2 + D_3 B_2 \cos(\theta_3 + \theta_2)) \approx m_2 g \cdot G_1 G_2 + m_3 g \cdot (B_2 G_1 + D_3 B_2)$$

$$C_{G_1} \approx m_2 g \cdot l_{12} + m_3 g \cdot (b_{12} + b_{23} + h_3)$$

Par conséquent la raideur en torsion du ressort placé en G_1 vaut :

$$k_1 = \frac{C_{G_1}}{\Delta \theta} = \frac{m_2 g \cdot l_{12} + m_3 g (b_{12} + b_{23} + h_3)}{\theta_2^0} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta_2^0}{b_{12}} = \sin \theta_2^0 \approx \theta_2^0$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{(m_2 g l_{12} + m_3 g (b_{12} + b_{23} + h_3)) b_{12}}{\Delta_2^0}$$

On isole le pont 3. Son poids crée un couple en B_2 égal à :

$$C_{B_2} = m_3 g \cdot (D_3 B_2 \cos(\theta_3 + \theta_2)) \approx m_3 g \cdot (D_3 B_2)$$

$$C_{B_2} \approx m_3 g \cdot (b_{23} + h_3)$$

Par conséquent la raideur en torsion du ressort placé en G_1 vaut :

$$k_2 = \frac{C_{B_2}}{\Delta \theta} = \frac{m_3 g (b_{23} + h_3)}{\theta_3^0} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta_3^0 - \Delta_2^0}{b_{23} + h_3} = \sin(\theta_3^0 + \theta_2^0) \approx \theta_3^0 + \theta_2^0$$

$$\theta_3^0 = \frac{\Delta_3^0 - \Delta_2^0}{b_{23} + h_3} - \frac{\Delta_2^0}{b_{12}}$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{m_3 g (b_{23} + h_3)}{\frac{\Delta_3^0 - \Delta_2^0}{b_{23} + h_3} - \frac{\Delta_2^0}{b_{12}}}$$

Q5.3 : Exprimer les torseurs dynamiques de la poutre de lancement (élément 2) et du pont (élément 3) en leur centre de gravité respectif, en fonction des données.

La poutre de lancement 2 est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, donc :

$$\{D_{poutre\,2/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/R_0}} \\ \delta_{G_2,2/R_0} \end{array} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 l_{12} (\dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{X_2} + \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{Z_2}) \\ C_2 \ddot{\theta}_2 \overrightarrow{Y_2} \end{array} \right\}_{G_2}$$

Le pont 3 est en mouvement complexe (rotation + translation).

$$\{D_{pont\,3/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3 \overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/R_0}} \\ \delta_{G_3,3/R_0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\overrightarrow{V_{G_3,3/R_0}} = \overrightarrow{V_{B_2,3/R_0}} + \overrightarrow{G_3 B_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/R_0}} = -b_{12} \dot{\theta}_2 \overrightarrow{Z_2} - b_{23} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \overrightarrow{Z_3}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G_3,3/R_0}} = \left(\frac{\overrightarrow{V_{G_3,3/R_0}}}{dt} \right)_{R_0} = -b_{12} (\ddot{\theta}_2 \overrightarrow{Z_2} + \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{X_2}) - b_{23} ((\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \overrightarrow{Z_3} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \overrightarrow{X_3})$$

$$\delta_{G_3,3/R_0} = C_3 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \overrightarrow{Y_3}$$

$$\{D_{pont\,3/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3 (-b_{12} (\ddot{\theta}_2 \overrightarrow{Z_2} + \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{X_2}) - b_{23} ((\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \overrightarrow{Z_3} + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \overrightarrow{X_3})) \\ C_3 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \overrightarrow{Y_3} \end{array} \right\}_{G_3}$$

Q5.4 : En déduire les deux équations de la dynamique permettant d'obtenir l'évolution des angles de rotation θ_2 et θ_3 en fonction de celle de l'angle de rotation θ_1 du châssis basculeur.

Pour trouver l'évolution de l'angle θ_2 , il faut isoler (2+3) et écrire l'équation du moment dynamique autour de l'axe $(G_1, \overrightarrow{Y_2})$.

Pour trouver ensuite l'évolution de l'angle θ_3 , il faut isoler (3) et écrire l'équation du moment dynamique autour de l'axe $(B_2, \overrightarrow{Y_2})$.

Q5.5 : Critiquer le modèle utilisé en donnant une modélisation physique plus réaliste de la dynamique du basculement du pont.

- Vu la longueur des travures, l'hypothèse de solide indéformable semble discutable.
- La modélisation de la géométrie des pièces est aussi à remettre en cause. Les travures ne sont pas à section carrée par exemple.
- Les liaisons ne sont pas parfaites. Il y a du frottement.

Q5.6 : Exprimer la relation qui lie la durée d'accélération Δt_{acc} et celle de plateau Δt_{pla} , puis celle liant Δt_{acc} et la durée totale de basculement ΔT .

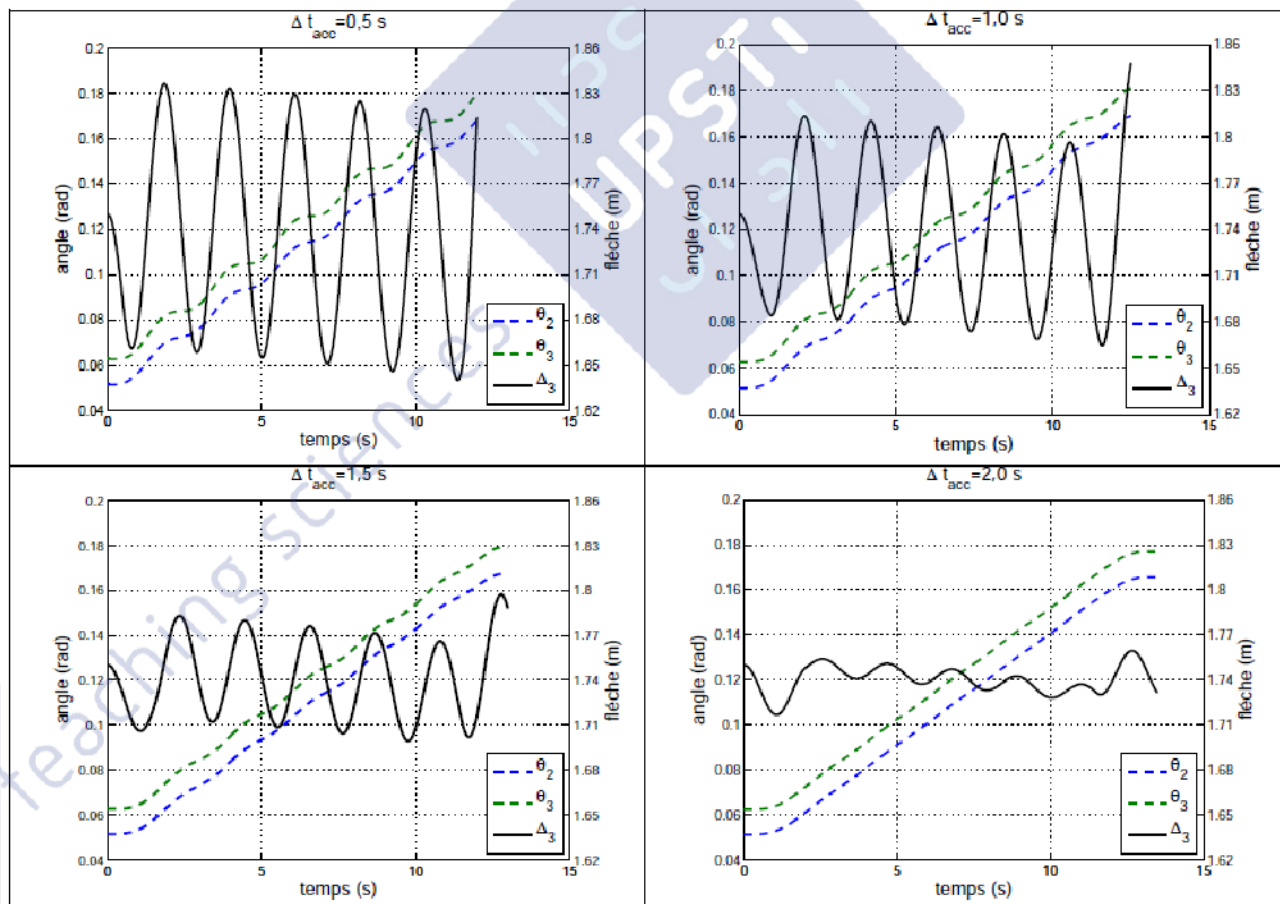
L'aire sous la courbe doit correspondre à une rotation de $\theta_{1max} = 0,115rad = 6,59^\circ$.

$$(\Delta t_{acc} + \Delta t_{pla}) * \dot{\theta}_{1max} = \theta_{1max} \text{ donc } \Delta t_{acc} + \Delta t_{pla} = \frac{\theta_{1max}}{\dot{\theta}_{1max}}$$

D'autre part, le temps total vaut :

$$\Delta T = 2\Delta t_{acc} + \Delta t_{pla}$$

Q5.7 : Analyser ces réponses dynamiques, en commentant l'ordonnée à l'origine et en caractérisant les oscillations.



- Plus le temps d'accélération est court, plus les effets dynamiques (oscillations) sont grands.

- Les angles θ_2 et θ_3 ne sont pas nuls à $t=0$ car ils correspondent aux rotations θ_2^0 et θ_3^0 vues dans la question Q5.2 dues à l'action de la pesanteur en statique.
- On voit aussi que la variation des angles θ_2 et θ_3 au cours du mouvement est bien d'environ 0,115rad.
- Pour $\Delta t_{acc} \leq 1,5s$, les oscillations sont assez importantes (cf courbes de Δ_3). Ces oscillations ont pour risque de faire taper les travures sur le sol. Il faut donc éviter cela.
- La fréquence des oscillations est fonction de la raideur des ressorts de torsion et des inerties mises en jeu : $f_{osc} = \sqrt{\frac{k}{I}}$ avec k la raideur en torsion du ressort et I l'inertie des pièces. On pourrait donc retrouver quel(s) ressort(s) est(sont) sollicités lors du mouvement avec des valeurs numériques pour k et I .

Q5.8 : Déterminer la valeur optimale de Δt_{acc} vis-à-vis du cahier des charges, et en déduire le temps de basculement du pont.

On veut limiter le rapport $\frac{\Delta_3^{\max} - \Delta_3^{\min}}{2\Delta_3^0}$ à 5%. On choisit de mesurer les variations d'oscillation sur une seule période car il y a une dérive de la flèche au cours du mouvement.

Δt_{acc}	0,5s	1s	1,5s	2s
$\Delta_3^{\max} - \Delta_3^{\min}$	0,18	0,13	0,07	0,03
Δ_3^0	1,75	1,75	1,75	1,75
effet dynamique	5,2%	3,7%	2%	0,9%

Le Δt_{acc} optimum vis-à-vis du cahier des charges est donc $\Delta t_{acc} = 1s$

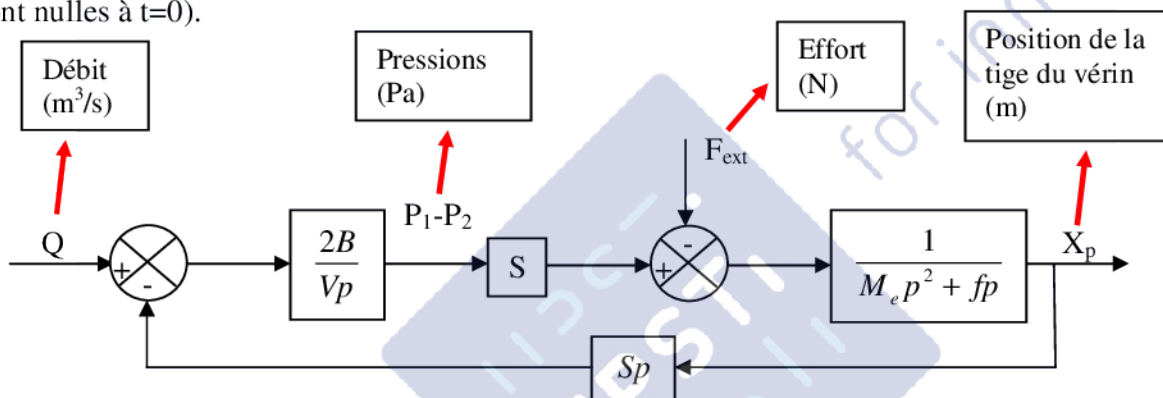
Partie 6 : Etude de la synchronisation des vérins du châssis basculeur

Q6.1 : Exprimer l'intérêt d'utiliser des vérins hydrauliques pour effectuer le basculement du châssis basculeur.

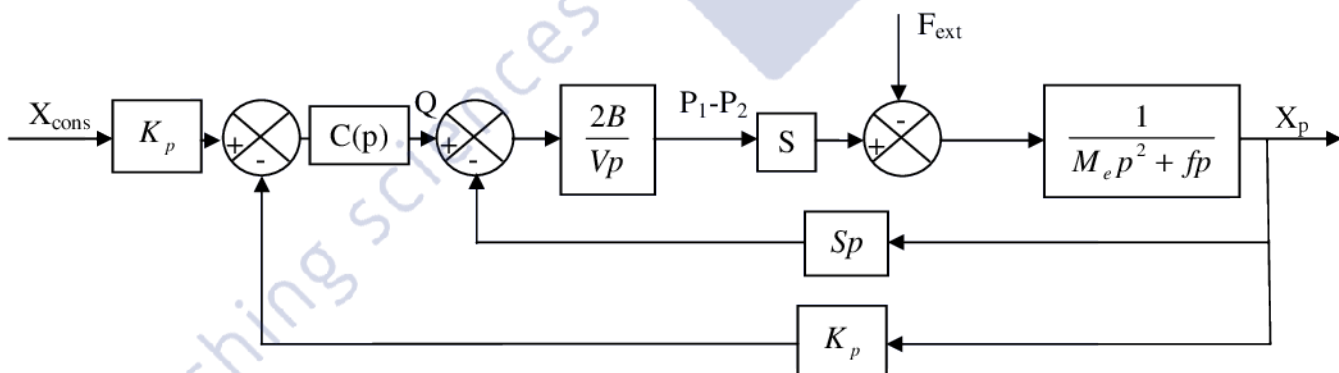
La faible compressibilité de l'huile permet de maîtriser le mouvement des travures.

Q6.2 : En utilisant la transformée de Laplace et en détaillant les hypothèses considérées, construire le schéma bloc de la servo-commande. Détailler les grandeurs et leurs unités.

On suppose que les conditions de Heaviside sont vérifiées (i.e. toutes les variables et leurs dérivées sont nulles à $t=0$).

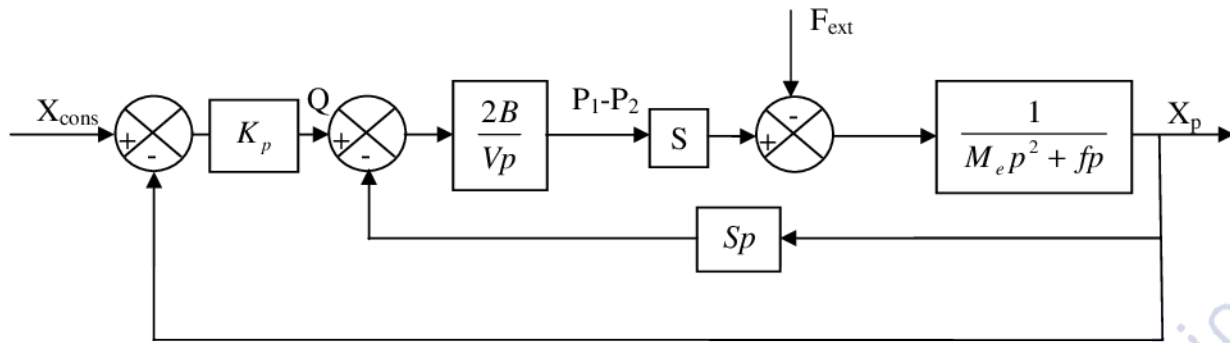


Q6.3 : Modifier le schéma bloc pour prendre en compte le capteur de position.



La consigne de débit sera élaborée à partir de l'écart entre la position voulue et la position mesurée. Mais rien n'oblige à les rendre égales. Le correcteur $C(p)$ n'étant pas paramétré dans ce sujet, nous supposons qu'il est égal à 1 (USI). L'unité de ce correcteur serait $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ si le capteur fournissait une tension électrique.

Q6.4 : Proposer une seconde modification du schéma bloc permettant d'obtenir un retour unitaire.



Q6.5 : En supposant $F_{ext} = 0$, exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte de la servo-commande.

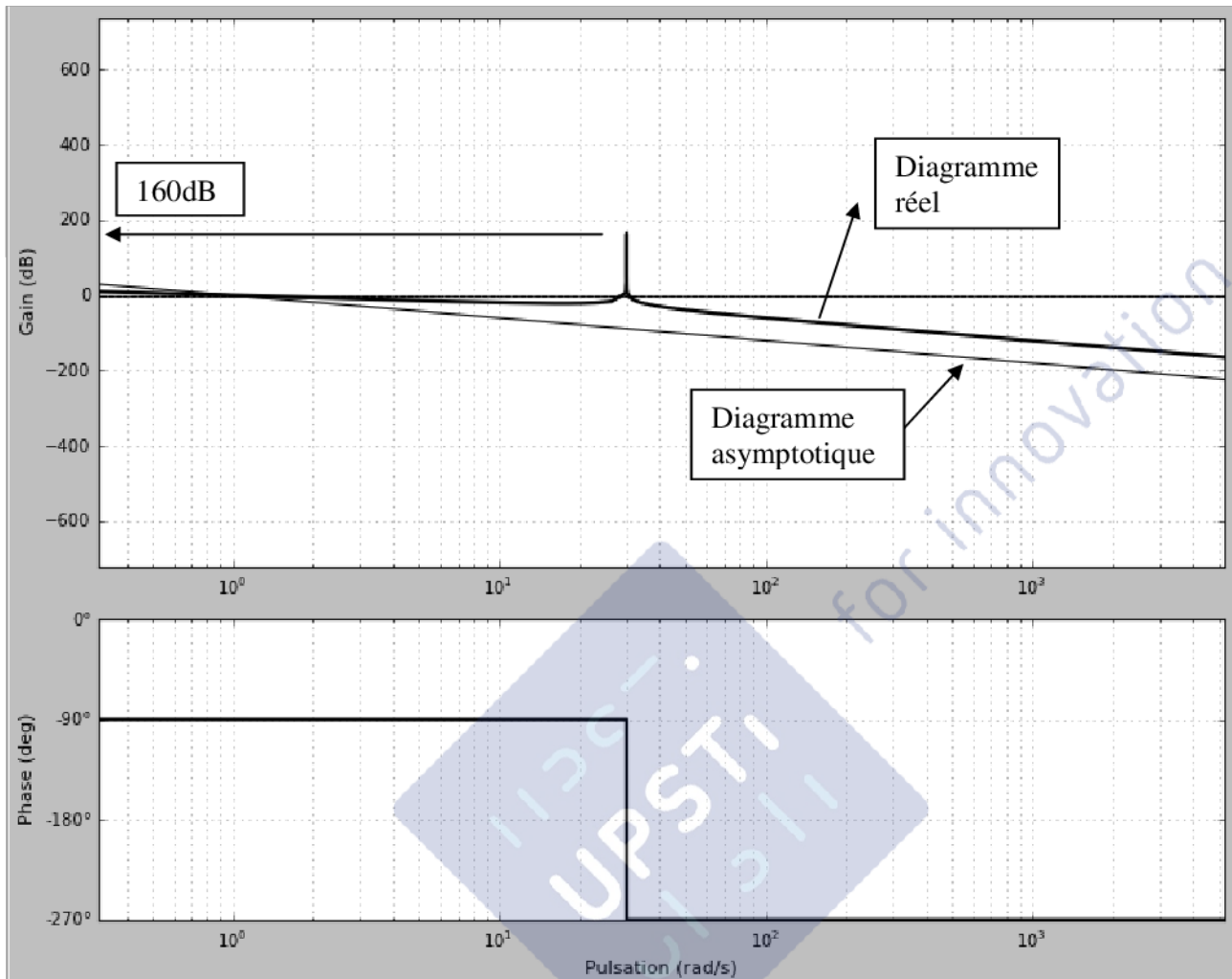
$$FTBO = \frac{K_p \frac{2B}{Vp} S \frac{1}{M_e p^2 + fp}}{1 + \frac{2B}{Vp} S \frac{1}{M_e p^2 + fp} Sp} = \frac{2BSK_p}{Vp \left(M_e p^2 + fp + \frac{2BS^2}{V} \right)}$$

Q6.6 : Déterminer l'écart en position et conclure sur le respect du cahier des charges.

La FTBO étant de classe 1, le système est précis vis-à-vis d'une entrée constante. Le cahier des charges est bien respecté.

Q6.7 : Tracer sur le document réponse DR3 l'allure du diagramme de Bode asymptotique de ce système. Représenter également l'allure de la fonction non asymptotique.

Avec la fonction de transfert donnée, la pulsation propre est : $\omega_0 = 30,1 \text{ rad/s}$ et l'amortissement est : $z = 1,02 \cdot 10^{-10}$ (donc très faible).



Q6.8 : Expliquer pourquoi le diagramme de Bode asymptotique ne permet pas de conclure sur la stabilité globale du système.

L'amortissement étant très faible, le diagramme réel est très loin du diagramme asymptotique autour de ω_0 . De plus à cette pulsation le déphasage est de -180° donc proche de l'instabilité.

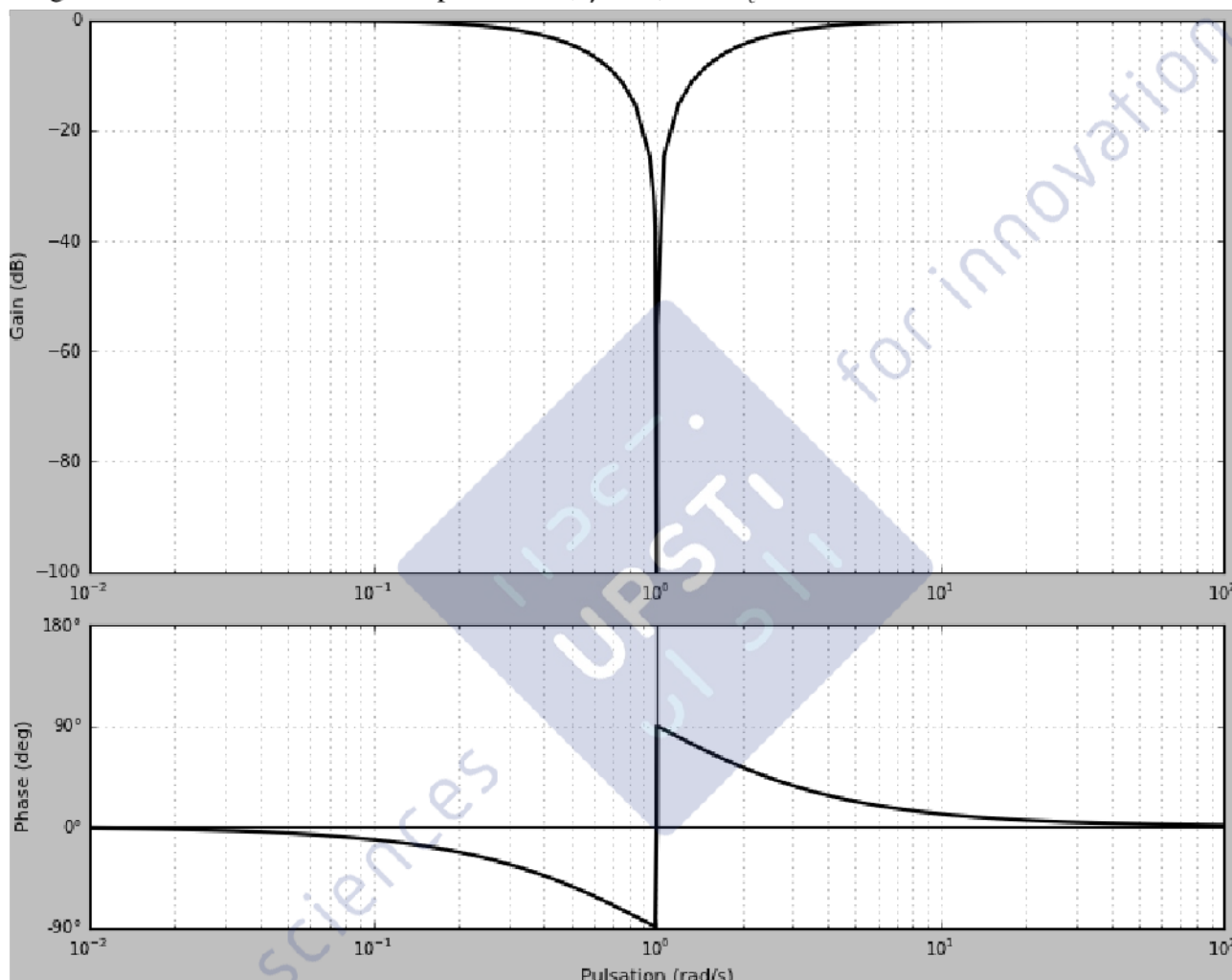
Q6.9 : Pour assurer la stabilité, la courbe de gain du diagramme de Bode doit être abaissée d'environ 160 dB. Détailler une solution technique simple permettant d'atteindre cet objectif, et expliciter l'effet néfaste apporté par cette solution sur le système.

D'après la question Q6.5, le gain de la FTBO vaut : $\frac{K_p}{S}$. Il suffit donc d'augmenter la section S du vérin pour diminuer le gain. Le souci est qu'il faut multiplier la section du vérin par 10^8 ! Il va y avoir un problème d'encombrement.

Remarque : Abaisser le gain de 160dB permet d'avoir un système juste stable mais ne permet pas d'avoir 50dB de marge de gain.

Q6.10 : Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce correcteur, et détailler l'effet de chacun des paramètres K_c , α et β . Conclure sur l'effet global du correcteur sur le système.

Diagramme de Bode du correcteur pour $\alpha=1$, $\beta=0,5$ et $K_c=1$.



Ce correcteur est un filtre qui permet d'annuler l'effet d'une forte résonance.

Le paramètre K_c règle le gain statique.

Le paramètre α règle la pulsation de la résonance à modifier.

Le paramètre β règle l'amplitude voulue de la nouvelle résonance.

Q6.11 : Proposer, en la justifiant, une valeur pertinente pour le paramètre α .

La fonction de transfert du correcteur peut s'écrire :

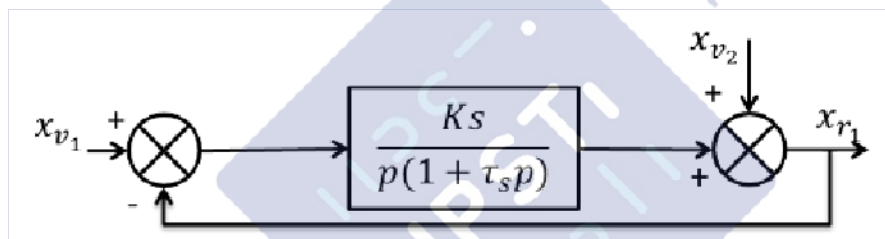
$$H_c(p) = K_c \frac{p^2 + \alpha}{p^2 + \beta p + \alpha} = K_c \frac{\frac{p^2}{\alpha} + 1}{\frac{p^2}{\alpha} + \frac{\beta p}{\alpha} + 1}$$

Afin de régler ce correcteur sur la pulsation résonnante, il faut avoir : $\alpha = \omega_0^2$

Q6.12 : En considérant la solution technique proposée précédemment (question 6.9), expliquer pourquoi ce correcteur permet de respecter efficacement les marges de stabilité.

Ce correcteur permet d'éviter d'augmenter la section du vérin tout en réglant la valeur de la résonance avec le paramètre β . On pourra donc régler les marges de gain et de phase demandées dans le cahier des charges.

Q6.13 : Exprimer la fonction de transfert liant la sortie x_{r1} aux entrées x_{v1} et x_{v2} .



Il vient facilement :

$$x_{r1} = \frac{\frac{K_s}{p(1 + \tau_s p)}}{1 + \frac{K_s}{p(1 + \tau_s p)}} x_{v1} + \frac{1}{1 + \frac{K_s}{p(1 + \tau_s p)}} x_{v2}$$

Donc :

$$x_{r1} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_s}(1 + \tau_s p)} x_{v1} + \frac{\frac{p}{K_s}(1 + \tau_s p)}{1 + \frac{p}{K_s}(1 + \tau_s p)} x_{v2}$$

Q6.14 : Exprimer la pulsation propre et le coefficient d'amortissement du système.

$$\text{Pulsation propre : } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_s}{\tau_s}}$$

$$\text{Coefficient d'amortissement : } z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_s}{\tau_s}} * \frac{1}{K_s} = \frac{1}{2\sqrt{K_s \tau_s}}$$

Q6.15 : Réécrire la fonction de transfert lorsque les deux vérins évoluent

exactement avec la même position ($x_{v1} = x_{v2}$). Détailler ce qui se passe physiquement dans ce cas.

Si $x_{v1} = x_{v2}$, on a :

$$x_{r1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} + \frac{\frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} \right) x_{v1} \Rightarrow \boxed{x_{r1} = x_{v1} = x_{v2}}$$

Du coup, si $x_{v1} = x_{v2}$ correspond à la longueur de consigne x_{cons} , le système n'évoluera plus (la sortie du comparateur sera nulle. Sinon, il restera un écart et le système tentera toujours de l'annuler.

Q6.16 : Conclure sur les performances du système (stabilité et écart en position) lorsque qu'il se produit un décalage de position $\Delta x = x_{v1} - x_{v2}$ durant l'asservissement.

Si $x_{v1} = x_{v2} + \Delta x$, on a :

$$x_{r1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} + \frac{\frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} \right) x_{v2} + \frac{1}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} \Delta x \Rightarrow \boxed{x_{r1} = x_{v2} + \frac{1}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)} \Delta x}$$

La fonction de transfert $\frac{1}{1 + \frac{P}{K_s}(1 + \tau_s p)}$ est un deuxième stable et précis (gain statique égal à 1).

Donc la sortie x_{r1} sera aussi stable.

Calcul de la valeur finale de x_{r1} si $x_{v1} = cte$, et $x_{v2} = cte$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{r1}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p x_{r1}(p) = x_{v2} + \Delta x = x_{v1}$$

Le système sera précis vis-à-vis de l'entrée x_{v1} mais pas vis-à-vis de l'entrée x_{v2} .

Q6.17 : Représenter le schéma d'asservissement global avec la consigne de position x en entrée et les positions x_{v1} et x_{v2} des vérins en sortie, faisant apparaître la synchronisation des vérins.

Pour le schéma bloc, on supposera qu'il n'y a pas d'effort extérieur perturbateur sur chaque vérin.

