

## Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2014

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles 1

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Correction S2I 1 (2014)

## I Modélisation du système de récupération d'énergie

### I.A – Modélisation structurelle de la liaison masselotte – boitier

Q1 : Degré d'hyperstatisme :

- 6 inconnues statiques de liaison
- 6 équations fournies par le PFS
- 1 mobilité

Donc  $h=1$ . Il faudra 1 condition dimensionnelle sur chaque pièce 2 et 3. (distance  $A_2D_2$ )

*RO :* On parle des « tiges » dans la Q1 et sur le dessin fig-3 les « tiges » sont repérées « lames flexibles ». Pourquoi ne pas avoir gardé la même dénomination ?

La prise en compte de la flexibilité des lames permet de lever la contrainte dimensionnelle et donc de supprimer l'hyperstatisme.

### I.B – Étude cinématique de l'encliquetage

Q2 : Cas 1 :  $\Omega_{32} > 0$

On a alors :  $\Omega_{42} < 0 \Rightarrow \Omega_{44'} = 0 \Rightarrow \Omega_{4'2} = \Omega_{42}$

Avec  $\frac{\Omega_{42}}{\Omega_{32}} = -k_1 = \frac{\Omega_{52}}{\Omega_{32}}$  et  $\frac{\Omega_{4'2}}{\Omega_{5'2}} = -1 \Rightarrow \Omega_{5'2} = -\Omega_{4'2} = k_1 \cdot \omega$

D'où  $\Omega_{5'5} = \Omega_{5'2} + \Omega_{25} = 2k_1 \cdot \omega$

Q3 : Cas 2 :  $\Omega_{32} < 0$

On a alors :  $\Omega_{52} > 0 \Rightarrow \Omega_{55'} = 0 \Rightarrow \Omega_{5'2} = \Omega_{52} = k_1 \cdot \omega$

D'où  $\Omega_{44'} = \Omega_{42} + \Omega_{24'} = 2k_1 \cdot \omega$

Dans les deux cas de rotation de la masselotte 3, la rotation de 5/2 est la même. L'encliquetage fonctionne bien.

### I.C – Étude de la quantité d'énergie générée

Q4 : Torseurs cinématiques

Mouvement de 2/1 :  $\{V_{2/1}\} = \{\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1; \vec{0}\}_O$

Mouvement de 3/2 :  $\{V_{3/2}\} = \{\dot{\theta}_{32} \cdot \vec{z}_1; \vec{0}\}_A$

Par composition de mouvements, on peut écrire :  $\{V_{3/1}\} = \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\}$

En exprimant la vitesse du point A dans le mouvement de 2/1, on obtient :  $\vec{V}_{A \in 2/1} = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$

D'où l'expression du torseur cinématique de 3/1 :  $\{V_{3/1}\} = \{(\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{32}) \vec{z}_1; a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2\}_A$

En utilisant la distribution des vitesses dans le solide 3 en mouvement par rapport à 1, on obtient :

$$\vec{V}_{G \in 3/1} = \vec{V}_{A \in 3/1} + \vec{\Omega}_{3/1} \wedge \vec{AG} = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 + (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{32}) \vec{z}_1 \wedge r_3 \cdot \vec{x}_3$$

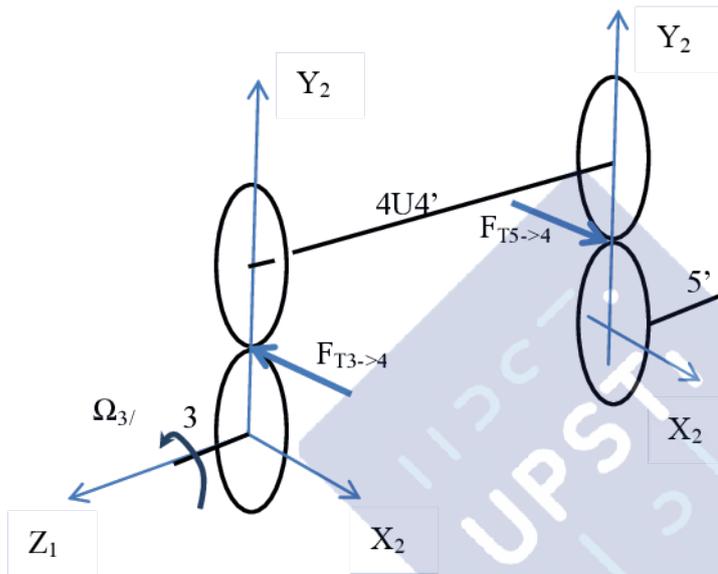
$$\vec{V}_{G \in 3/1} = a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 + r_3 \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{32}) \vec{y}_3$$

D'où l'expression dans la base  $B_2$  :

$$\vec{V}_{G \in 3/1} = -r_3 \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{32}) \sin \theta_{32} \cdot \vec{x}_2 + (a \cdot \dot{\alpha} + r_3 \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{32}) \cos \theta_{32}) \vec{y}_2$$

Q5 :

- Bilan des actions mécaniques sur le solide 4U4' :
  - Action de denture de 3→4 modélisable par un glisseur en J :  $\vec{J}_{3 \rightarrow 4}$
  - Action de denture de 5'→4' modélisable par un glisseur en K :  $\vec{K}_{5' \rightarrow 4'}$
  - Action de la liaison pivot d'axe  $(A_4, \vec{z}_1)$  de 2→4
- Bilan des actions mécaniques sur le solide 5' :
  - Action de denture de 4'→5' modélisable par un glisseur en K :  $\vec{K}_{4' \rightarrow 5'}$
  - Action de la liaison pivot d'axe  $(A_5, \vec{z}_1)$  de 5→5'
  - Action du ressort spiral caractérisée par le torseur  $\{\text{ressort} \rightarrow 5'\}$



1- On isole 5' + équation des moments en projection sur l'axe  $(A_5, \vec{z}_1)$

$$C_{\text{ressort}} + (R_{5'} \cdot \vec{y}_2 \wedge \vec{K}_{4' \rightarrow 5'}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Soit en appelant  $F_{T4' \rightarrow 5'}$  l'action tangentielle, on obtient :  $F_{T4' \rightarrow 5'} = C_{\text{ressort}} \cdot \frac{1}{R_{5'}}$

2- On isole 4U4' + équation des moments en projection sur l'axe  $(A_4, \vec{z}_1)$

$$F_{T5' \rightarrow 4'} \cdot R_{4'} = F_{T3 \rightarrow 4'} \cdot R_4 \Rightarrow F_{T3 \rightarrow 4'} = -\frac{R_{4'}}{R_5'} C_{\text{ressort}} \cdot \frac{1}{R_4} = -C_{\text{ressort}} \cdot \frac{1}{R_4}$$

3- On isole 3 + équation des moments en projection sur l'axe  $(A, \vec{z}_1)$

$$\vec{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = F_{T4 \rightarrow 3} \cdot R_3 = C_{\text{ressort}} \cdot \frac{R_3}{R_4} = k_1 \cdot C_{\text{ressort}}$$

4- En posant  $C_{\text{ressort}} = -k_R \cdot \theta_{5'2}$  et  $\dot{\theta}_{5'2} = k_1 \cdot \omega = k_1 \cdot \dot{\theta}_{32}$

$$\text{On obtient : } \underline{\vec{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = -k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{32}}$$

Autre solution avec le théorème de l'énergie :

- Système isolé :  $\Sigma = (5', 4, 3)$
- Puissance développée par le ressort :  $P_{\text{ressort}} = C_{\text{ressort}} \cdot \dot{\theta}_{5'2}$
- Puissance réceptrice sur 3 :  $P_{\text{sortie}} = (\vec{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1) \cdot \dot{\theta}_{32}$

- On néglige les inerties :  $E_{c(\Sigma/1)} = 0$
- On néglige les pertes

On obtient donc :  $C_{ressort} \cdot \dot{\theta}_{5/2} = (\overline{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1) \dot{\theta}_{3/2}$

D'où :  $\overline{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = C_{ressort} \cdot \frac{\dot{\theta}_{5/2}}{\dot{\theta}_{3/2}} = k_1 \cdot C_{ressort}$

Avec  $C_{ressort} = -k_R \cdot \theta_{5/2}$  on retrouve  $\overline{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = -k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{3/2}$

*Rq : Il y a une erreur dans l'expression à trouver fournie dans le sujet*

Q6 : Bilan des actions mécaniques appliquées à 3 :

- Action de la liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  de  $2 \rightarrow 3$
- Action de denture de  $4 \rightarrow 3$  dont le moment en projection sur  $\vec{z}_1$  vaut  $\overline{M}_{A,4 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = -k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{3/2}$
- Action de la pesanteur modélisable par un glisseur en G : **Erreur ! Signet non défini.**  
 $\vec{P} = m_3 \cdot \vec{g}$

Application du théorème du moment dynamique en A en projection sur  $\vec{z}_1$  :

$$\overline{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{z}_1 = \Sigma \overline{M}_{A,ext \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1$$

- Calcul du moment dynamique :

$$\overline{\delta}_{A,3/1} = \frac{d}{dt} \overline{\sigma}_{A,3/1} \Big|_1 + m_3 \cdot (\vec{V}_{A/1} \wedge \vec{V}_{G \in 3/1})$$

$$\text{Et } \overline{\sigma}_{A,3/1} = I_{(A,3)} \cdot \overline{\Omega}_{3/1} + m_3 \cdot (\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A \in 3/1}) = \begin{vmatrix} - & -E & 0 \\ - & -D & 0 \\ - & C_3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\theta}_{3/2} \end{vmatrix} + m_3 \cdot r_3 \cdot \vec{x}_3 \wedge a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overline{\sigma}_{A,3/1} = (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{3/2}) \begin{vmatrix} -E \\ -D \\ C_3 \end{vmatrix} + m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \theta_{3/2} \cdot \vec{z}_1$$

$$\overline{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{z}_1 = \frac{d}{dt} (\overline{\sigma}_{A,3/1} \cdot \vec{z}_1) - \overline{\sigma}_{A,3/1} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{z}_1) \Big|_1 + m_3 \cdot (\vec{V}_{A/1} \wedge \vec{V}_{G \in 3/1}) \cdot \vec{z}_1$$

$$= C_3 \cdot (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}_{3/2}) + m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \cos \theta_{3/2} - \dot{\alpha} \cdot \dot{\theta}_{3/2} \cdot \sin \theta_{3/2}) + m_3 \cdot (a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 \wedge (a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 + r \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_{3/2}) \cdot \vec{y}_3)) \cdot \vec{z}_1$$

$$\text{D'où : } \overline{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{z}_1 = C_3 \cdot (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}_{3/2}) + m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \cos \theta_{3/2} + \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \theta_{3/2})$$

- Calcul du moment en A :

$$\Sigma \overline{M}_{A,ext \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 = -k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{3/2} + (\overrightarrow{AG} \wedge m_3 \cdot \vec{g}) \cdot \vec{z}_1$$

$$= -k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{3/2} - m_3 \cdot g \cdot r_3 \cdot \sin(\alpha + \theta_{3/2})$$

- Equation du mouvement :

$$\text{On pose } \alpha(t) = \omega_1 \cdot t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\alpha} = 0$$

L'équation du mouvement s'exprime donc :

$$C_3 \cdot \ddot{\theta}_{32} + m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \theta_{32} + k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{32} + m_3 \cdot g \cdot r_3 \cdot \sin(\alpha + \theta_{32}) = 0$$

$$C_3 \cdot \ddot{\theta}_{32} + m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \theta_{32} + k_1^2 \cdot K_R \cdot \theta_{32} + m_3 \cdot g \cdot r_3 \cdot \sin\left(\omega_1 t + \theta_{32} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\underbrace{C_3}_{A_1} \cdot \ddot{\theta}_{32} + \underbrace{m_3 \cdot r_3 \cdot a \cdot \dot{\alpha}^2}_{B_1} \cdot \sin \theta_{32} + \underbrace{k_1^2 \cdot K_R}_{C_1} \cdot \theta_{32} - \underbrace{m_3 \cdot g \cdot r_3}_{D_1} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta_{32}) = 0$$

**Rq :** Encore un problème avec le résultat donné dans le sujet : sin ou cos ?

Q7 : Calcul de la puissance dissipée dans le cliquet

Le couple de frottement visqueux dans un ensemble d'encliquetage est donné par :

- $C_{Vc} = f_{vc} \cdot \Omega_{44'}$  pour le cliquet 44'

- $C_{Vc} = f_{vc} \cdot \Omega_{55'}$  pour le cliquet 55'

On en déduit donc que  $C_{Vc} = f_{vc} \cdot 2 \cdot k_1 \cdot \omega$  pour un ensemble d'encliquetage.

- Puissance dissipée :

$$P_c = -C_{Vc} \cdot \Omega_{44'} = -C_{Vc} \cdot \Omega_{55'} = -f_{vc} \cdot 2 \cdot k_1 \cdot \omega \cdot 2 \cdot k_1 \cdot \omega$$

$$P_c = -f_{vc} \cdot 4 \cdot k_1^2 \cdot \omega^2$$

- En prenant une valeur moyenne de  $\omega^2 = \dot{\theta}_{32}^2$  et en assimilant l'évolution de  $\dot{\theta}_{32}(t)$  à

un sinus tel que :  $\dot{\theta}_{32}(t) = 120 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$  avec  $T=100\text{ms}$ , on obtient :

$$\langle \dot{\theta}_{32}^2 \rangle = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} \left(120 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right)\right)^2 \cdot dt = 7200 \text{ rad/s}$$

On peut alors estimer la puissance dissipée sur un cycle à :

$$P_c = -f_{vc} \cdot 4 \cdot k_1^2 \cdot \omega^2 = -8.8 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

**RQ :** Sur la représentation de  $\dot{\theta}_{32}$  l'axe des abscisses est gradué en s au lieu de ms.

### I.D – Étude de la conversion et du stockage de l'énergie

Q8 : Choisir un modèle du couple de détente :

$C_d(\theta_{72}) = 10 \cdot \sin(2 \cdot p \cdot \theta_{72})$  (On suppose que la représentation spectrale indique des valeurs max)

Q9 : Théorème du moment dynamique en C appliqué au solide 6 et projeté sur  $\vec{z}_1$  :

Bilan des actions mécaniques appliquées à 6 :

- Action de denture de 7→6 modélisée par un glisseur en I :  $-\vec{R}_{67}$

- Action du ressort→6 modélisée par un couple de moment :  $K_R \cdot (\theta_{52} - \theta_{62}) \cdot \vec{z}_1$

- Action de la liaison de 5/6

La masse de 6 étant négligée son moment dynamique sera nul.

On en déduit l'équation du moment dynamique en C appliqué au solide 6 et projeté sur  $\vec{z}_1$  :

$$\begin{aligned}
K_R \cdot (\theta_{5'2} - \theta_{62}) + (\vec{IC} \wedge -\vec{R}_{67})_{z_1} &= 0 \\
K_R \cdot (\theta_{5'2} - \theta_{62}) + (R_6 \cdot \vec{y}_2 \wedge -R_{67} \cdot (\cos \delta_0 \cdot \vec{x}_2 + \sin \delta_0 \cdot \vec{y}_2))_{z_1} &= 0 \\
K_R \cdot (\theta_{5'2} - \theta_{62}) + R_6 \cdot R_{67} \cdot \cos \delta_0 &= 0 \\
\text{D'où : } R_{67} &= \frac{-K_R \cdot (\theta_{5'2} - \theta_{62})}{R_6 \cdot \cos \delta_0} = \frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})}{R_6 \cdot \cos \delta_0} \quad (1)
\end{aligned}$$

Q10 : Théorème du moment dynamique en D appliqué au solide 7

Bilan des actions mécaniques appliquées à 7 :

- Action de denture de 6 → 7 modélisée par un glisseur en I :  $\vec{R}_{67}$
- Action de la génératrice modélisée par un couple de moment :  $-C_d(\theta_{72}) \cdot \vec{z}_1$
- Action de la liaison pivot entre 2 et 7 d'axe  $(D, \vec{z}_1)$

On écrit le théorème du moment dynamique en D appliqué au solide 7 en projection sur  $\vec{z}_1$  :

$$\delta_{D,7/1, \vec{z}_1} = \Sigma \vec{M}_{D, \text{ext} \rightarrow 7, \vec{z}_1}$$

En supposant  $\ddot{\alpha} = 0$

- Moment dynamique de 7 :

$$\delta_{D,7/1, \vec{z}_1} = C_7 \cdot \ddot{\theta}_{72}$$

- Calcul du moment en D :

$$\Sigma \vec{M}_{D, \text{ext} \rightarrow 7, \vec{z}_1} = -C_d(\theta_{72}) + (\vec{DI} \wedge \vec{R}_{67})_{z_1} = -C_d(\theta_{72}) - R_7 \cdot R_{67} \cdot \cos \delta_0$$

On en déduit :

$$C_7 \cdot \ddot{\theta}_{72} = -C_d(\theta_{72}) - R_7 \cdot R_{67} \cdot \cos \delta_0$$

$$R_{67} = -\frac{C_d(\theta_{72}) + C_7 \cdot \ddot{\theta}_{72}}{R_7 \cdot \cos \delta_0} \quad (2)$$

Q11 : Si on se place en quasi statique alors  $\ddot{\theta}_{72} \approx 0$

L'expression (2) devient alors  $R_{67} = -\frac{C_d(\theta_{72})}{R_7 \cdot \cos \delta_0}$

En utilisant l'expression (1) trouvée en Q9, on peut écrire :

$$-\frac{C_d(\theta_{72})}{R_7 \cdot \cos \delta_0} = \frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})}{R_6 \cdot \cos \delta_0} \text{ ce qui donne } C_{d0} = -\frac{R_7}{R_6} \cdot K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2}) = -\frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})}{k_2}$$

Rotation relative des extrémités du ressort :

$$\Delta \theta = C_d^{\max} \frac{k_2}{R_6} = 10 \cdot 10^{-6} \frac{5}{12,5 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ rd} = \underline{229^\circ}$$

Q12 : Puissance développée par le ressort

Le ressort exerce un couple  $K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})$ .

La puissance développée vaut :  $P_{\text{ressort}} = K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2}) \cdot (\Omega_{5'2} - \Omega_{62}) = K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2}) \cdot \Omega_{5'6}$

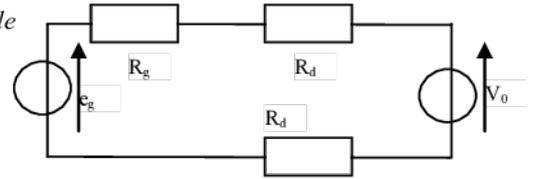
Comme  $(\Omega_{5'2} - \Omega_{62}) = -(\Omega_{62} - \Omega_{5'2})$ , on peut mettre la puissance sous la forme :

$$P_{\text{ressort}} = -K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2}) \frac{d}{dt} (\theta_{62} - \theta_{5'2}) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \cdot K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})^2 \right) \text{ d'où } Ed = \frac{1}{2} \cdot K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{5'2})^2$$

Application numérique :  $Ed = 4,3 \cdot 10^{-5} J$ . Il faudra prévoir un peu plus de 9300 cycles afin d'assurer une récupération journalière de 400 mJ



Q13 : Donner le modèle équivalent de l'ensemble génératrice+redresseur+stockage lorsque  $K_1$  et  $K_4$  sont passants. En déduire la valeur maximale du courant  $i_g$ , notée  $I_{gMAX}$ , en fonction de  $p$ ,  $\phi_{MAX}$ ,  $\dot{\theta}_{72}$ ,  $R_d$ ,  $R_g$  et  $V_0$ .



$$i_g = \frac{e_g(t) - V_0}{R_g + 2R_d} \text{ Or } e_g(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\phi_{MAX} \cdot \sin(p \cdot \theta_{72}))$$

D'où  $e_g(t) = \phi_{MAX} \cdot p \cdot \dot{\theta}_{72} \cdot \cos(p \cdot \theta_{72})$  donc  $i_g = \frac{\phi_{MAX} \cdot p \cdot \dot{\theta}_{72} \cdot \cos(p \cdot \theta_{72}) - V_0}{R_g + 2R_d}$  et ainsi

$$I_{gMAX} = \frac{\phi_{MAX} \cdot p \cdot \dot{\theta}_{72} - V_0}{R_g + 2R_d}$$

Q14 : Choisir le modèle du courant ( $\theta_{72}$ ), limité à un seul harmonique, à partir de ses représentations spectrales et temporelles.  $i_g(\theta_{72}) = 0,8 \cdot I_{gMAX} \cdot \cos(p \cdot \theta_{72})$

En déduire le modèle du couple électromagnétique, valable lors d'une décharge du ressort.

$$c_{em}(\theta_{72}) = i_g(\theta_{72}) \cdot \frac{d\phi(\theta_{72})}{d\theta_{72}} = 0,8 \cdot I_{gMAX} \cdot \cos(p \cdot \theta_{72}) \cdot \phi_{MAX} \cdot p \cdot \cos(p \cdot \theta_{72})$$

$$c_{em}(\theta_{72}) = 0,8 \cdot I_{gMAX} \cdot \phi_{MAX} \cdot p \cdot (\cos(p \cdot \theta_{72}))^2$$

Q15 : Déduire des résultats des questions 9, 10 et 14, l'équation de mouvement du rotor 7 de la génératrice.

$$R_{67} = \frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{52})}{R_6 \cdot \cos \delta_0} \quad (1)$$

$$R_{67} = -\frac{C_d(\theta_{72}) + C_7 \cdot \ddot{\theta}_{72}}{R_7 \cdot \cos \delta_0} \quad (2) \text{ or } \dot{\theta}_{72} \text{ est supposée constante donc } R_{67} = -\frac{C_d(\theta_{72})}{R_7 \cdot \cos \delta_0}$$

Ainsi  $C_d(\theta_{72}) = -\frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{52})}{k_2}$  et comme  $c_{em}(\theta_{72}) = I_{gMAX} \cdot \phi_{MAX} \cdot p \cdot (\cos(p \cdot \theta_{72}))^2$ , on

obtient :  $I_{gMAX} \cdot \phi_{MAX} \cdot p \cdot (\cos(p \cdot \theta_{72}))^2 - \frac{K_R \cdot (\theta_{62} - \theta_{52})}{k_2} = 0$

Q16 : Donner une expression littérale des puissances dissipées dans la génératrice.

Seule la résistance  $R_g$  consomme de la puissance dans la génératrice :

$$P_{générateur} = R_g \cdot I_g^2 \text{ Avec } I_g, \text{ la valeur efficace du courant.}$$

Calculer les valeurs numériques en prenant en compte les harmoniques de la figure 12.

A.N.  $I_{gMAX} = \frac{0,7 \cdot 10^{-3} \cdot 7.500 - 1,5}{320 + 2 \cdot 30} = 2,5 \text{ mA}$  à partir de la figure n°12, on a :

$$I_g = \frac{I_{gMAX}}{\sqrt{2}} \sqrt{(0,78)^2 + (0,15)^2 + (0,08)^2 + (0,04)^2} = 1,41 \text{ mA}$$

Donc  $P_{générateur} = R_g \cdot I_g^2 = 320 \cdot (1,41 \cdot 10^{-3})^2 = 0,64 \text{ mW}$

Déterminer les pertes en conduction pour l'interrupteur  $K_1$ .

$$P_K = \frac{1}{T} \int_0^T R_d \cdot i_g^2 \cdot dt = R_d \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_g^2 \cdot dt = R_d \cdot I_{g,eff}^2 \quad P_{K1} = R_d \cdot I_g^2 = 30 \cdot (0,88 \cdot 10^{-3})^2 = 0,023 \text{ mW}$$

En déduire les pertes totales pour le redresseur actif.

$$P_{totale} = P_{générateur} + P_{K1} + P_{K2} = 0,64 + 2 \cdot 0,023 = 0,686 \text{ mW}$$

Justifier ce choix technologique par rapport à un redresseur de type pont de diodes

$$P_K = \frac{1}{T} \int_0^T V_{d0} \cdot i_{K1} \cdot dt = V_{d0} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_{K1} \cdot dt = V_{d0} \cdot \langle I_{K1} \rangle \quad \text{donc } P_K = 0,2 \cdot 0,76 = 0,152 \text{ mW}$$

L'utilisation de diodes classiques entraîne des pertes supérieures (5 fois plus). Ceci explique le choix technologique.

Q17 : Conclure sur quel élément il faudrait agir en priorité pour améliorer le rendement de la chaîne d'énergie.

Les principales pertes sont liées à la génératrice. C'est donc sur cet élément qu'il faut agir en diminuant sa résistance interne.

Q18 : Déterminer l'énergie récupérée dans l'élément de stockage

Lors d'une décharge ( $\Delta t$ , durée 40ms), il faut connaître la variation de l'angle  $\theta_{72}$ . Or en régime permanent (figure 13),  $\dot{\theta}_{72} = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  donc  $\Delta \theta_{72} = 500 \cdot 0,04 = 20 \text{ rad}$

**RQ :** Sur la représentation de  $\dot{\theta}_{72}$ , l'axe des abscisses est gradué en s au lieu de ms.

$$E = \int_0^{\Delta \theta_{72}} V_0 \cdot i_{\text{batt}}(\theta_{72}) d\theta_{72} = V_0 \int_0^{\Delta \theta_{72}} i_g(\theta_{72}) \cdot 0,7 \cdot \cos(p \cdot \theta_{72}) d\theta_{72}$$

On sait que  $i_g(\theta_{72}) = I_{g\text{MAX}} \cdot \cos(p \cdot \theta_{72})$  donc  $E = 0,7 \cdot I_{g\text{MAX}} \cdot V_0 \int_0^{\Delta \theta_{72}} (\cos(p \cdot \theta_{72}))^2 d\theta_{72}$

$$E = \frac{0,7 \cdot I_{g\text{MAX}} \cdot V_0}{2} \int_0^{\Delta \theta_{72}} (1 + \cos(2 \cdot p \cdot \theta_{72})) d\theta_{72} = 0,35 \cdot I_{g\text{MAX}} \cdot V_0 \left[ \theta_{72} + \frac{\sin(2 \cdot p \cdot \theta_{72})}{2 \cdot p} \right]_0^{\Delta \theta_{72}}$$

$$E = 0,35 \cdot I_{g\text{MAX}} \cdot V_0 \left[ \Delta \theta_{72} + \frac{\sin(2 \cdot p \cdot \Delta \theta_{72})}{2 \cdot p} \right] = 0,35 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot \left[ \Delta \theta_{72} + \frac{\sin(2 \cdot 7 \cdot \Delta \theta_{72})}{2 \cdot 7} \right] = 26 \text{ mJ}$$

Soit en une journée  $E_t = 10000 \cdot 26 \text{ mJ}$  (à rapprocher des 400 mJ nécessaires dans le cahier des charges !!!!!).

## II Évaluation de la capacité à mettre à l'heure automatiquement

### II.A – Modélisation de la récupération du signal de mise à l'heure

Q19 : Justifier le choix de l'utilisation d'une modulation d'amplitude pour transmettre les signaux DCF77 dans toute l'Europe.

Une basse fréquence (77,5 kHz) permet à partir d'une seule antenne d'être reçu très loin (en effet, à cette fréquence, il existe un phénomène de réflexion des ondes sur les couches basses de l'atmosphère).

Pour la modulation d'amplitude : Le codage choisi (le bit est codé par le temps de réduction de la porteuse) n'est pas perturbé par des variations d'amplitude (comme l'ajout de bruit lors de la transmission par exemple). En outre, la démodulation d'amplitude est plus simple.

Vérifier que les signaux sont détectables

$$P_r = P_e - 20 \cdot \log(d) - 20 \cdot \log(f_0) + 27,5 \quad \text{donc } d = 10^{\frac{P_e - P_r - 20 \cdot \log(f_0) + 27,5}{20}}$$

$$d = 10^{\frac{10 \cdot \log(30 \cdot 10^6) + 60 - 20 \cdot \log(77,5 \cdot 10^3) + 27,5}{20}} \quad \text{soit } d = 1676 \text{ km}$$

Les signaux sont bien détectables jusqu'à 1676 km.

Q20 : Déterminer l'expression de la tension en sortie du multiplieur  $v_m(t)$ .

$$v_e(t) = \hat{V}_e \cdot (1 + k \cdot m(t)) \cos(\omega_0 \cdot t) \text{ et } v_p(t) = \hat{V}_p \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_{eb})$$

En sortie du multiplieur :

$$v_m(t) = A \cdot v_e(t) \cdot v_p(t) = A \cdot \hat{V}_e \cdot (1 + k \cdot m(t)) \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \hat{V}_p \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_{eb})$$

$$v_m(t) = A \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_p \cdot (1 + k \cdot m(t)) \left[ \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_{eb}) \right]$$

$$v_m(t) = \frac{A \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_p \cdot (1 + k \cdot m(t))}{2} \left[ \cos(\varphi_{eb}) + \cos(2\omega_0 \cdot t + \varphi_{eb}) \right]$$

En déduire l'expression de  $v_{mc}(t)$  à partir du gabarit du filtre passe-bas

A l'aide du gabarit du filtre passe-bas, on observe que la composante à  $2 \cdot 77,5$  kHz, est supprimée (atténuation

de 80 dB). Donc il reste :  $v_{mc}(t) = \frac{A \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_p \cdot (1 + k \cdot m(t))}{2} \cos(\varphi_{eb})$

Déterminer la valeur de l'erreur de phase  $\varphi_{eb}$  pour laquelle la récupération du signal modulant n'est plus possible.

Le signal peut devenir nul si  $\cos(\varphi_{eb}) = 0$  soit  $\varphi_{eb} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ )

Q21 : Déterminer la différence de potentiel  $v_{mp}(t)$  à la sortie du multiplieur

$$v_{mp}(t) = K_d \cdot v_e(t) \cdot v_s(t) = K_d \cdot \hat{V}_e \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_e(t)) \cdot \hat{V}_s \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_s(t))$$

$$v_{mp}(t) = \frac{K_d \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_s}{2} \left[ \sin(\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) + \sin(2\omega_0 \cdot t + \varphi_e(t) + \varphi_s(t)) \right]$$

Simplifier l'expression obtenue en ne conservant que la composante basse fréquence non atténuée par le filtre de boucle.

$$v_{mp}(t) = \frac{K_d \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_s}{2} \left[ \sin(\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) \right]$$

En déduire l'expression du gain  $K_{m0}$ , en linéarisant l'expression précédente autour du point de repos.

$$\varphi_s(t) - \varphi_e(t) \approx 0 \text{ alors } \sin(\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) = \varphi_s(t) - \varphi_e(t)$$

$$v_{mp}(t) = \frac{K_d \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_s}{2} (\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) = K_{m0} \cdot (\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) \text{ donc } K_{m0} = \frac{K_d \cdot \hat{V}_e \cdot \hat{V}_s}{2}$$

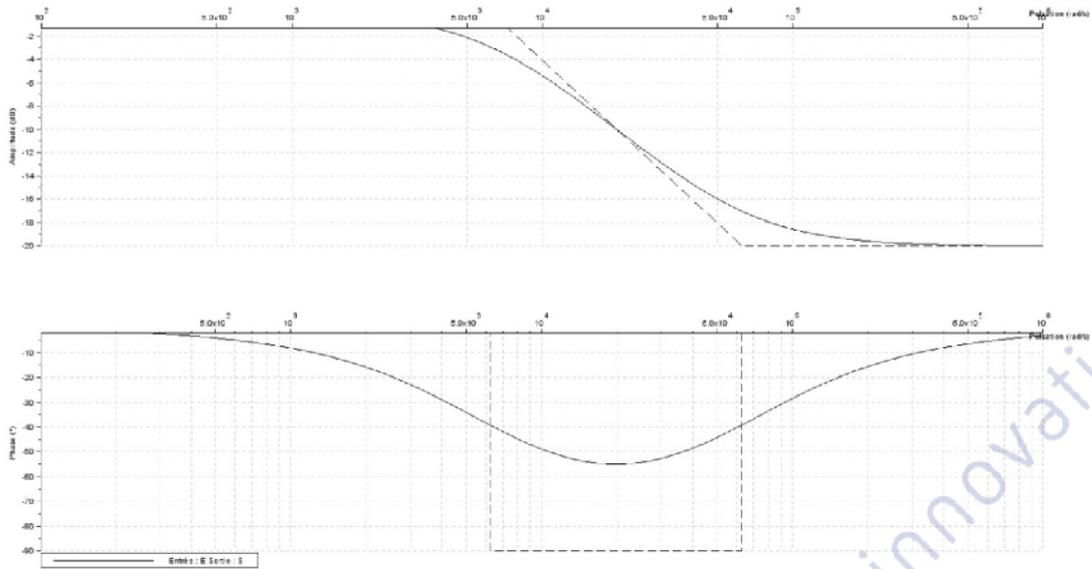
Q22 : Identifier les paramètres de la fonction de transfert du filtre de boucle

On observe la fonction de transfert d'un filtre passe bas :

- Le gain est nul dans la bande passante :  $K_c = 1$ ,
- On a une chute de -20 dB entre la bande passante et la bande arrêtée donc  $\tau_1 = \tau_2 / 10$ ,
- A -3 dB,  $\tau_2 = 1 / 6000$  donc  $\tau_2 = 0,16$  ms et ainsi  $\tau_1 = 0,016$  ms

$$\text{D'où } H_1(p) = \frac{1 + 1,6 \cdot 10^{-5} p}{1 + 1,6 \cdot 10^{-4} p}$$

Courbe obtenue avec les valeurs précédentes sous scilab :



Déterminer la fonction de transfert  $H_2(p)$  modélisant l'oscillateur contrôlé en tension

$$H_2(p) = \frac{\varphi_s(p)}{V_c(p)} \quad \text{Or} \quad \frac{d\varphi_s(t)}{dt} = K_0 \cdot v_c(t) \quad \text{donc en Laplace} \quad p \cdot \varphi_s(p) = K_0 \cdot V_c(p) \quad \text{ainsi par}$$

$$\text{identification} \quad H_2(p) = \frac{K_0}{p}$$

En déduire, à l'aide de la figure 18, la fonction de transfert en boucle ouverte notée ( $p$ )

$$H_{BO}(p) = \frac{K_d \cdot \widehat{V}_e \cdot \widehat{V}_s}{2} \cdot \frac{K_0}{p} \cdot \frac{1 + 1,6 \cdot 10^{-5} p}{1 + 1,6 \cdot 10^{-4} p}$$

Q23 : Étudier la stabilité de la boucle à verrouillage de phase

C'est un système du 2<sup>nd</sup> ordre donc toujours stable (on note que la phase n'est jamais égale à  $-180^\circ$ )

Déterminer l'écart statique en régime permanent et en réponse à un échelon unitaire de phase.

$$\varepsilon(p) = \varphi_e(p) - H_{BO}(p) \cdot \varepsilon(p) \quad \text{d'où} \quad \varepsilon(p) = \frac{\varphi_e(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

En réponse à un échelon unitaire de phase donc  $\varphi_e(p) = \frac{1}{p}$  et en appliquant le théorème de la

$$\text{valeur finale ; } \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p \cdot \left( 1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{1 + 1,6 \cdot 10^{-5} p}{1 + 1,6 \cdot 10^{-4} p} \right)} = 0$$

Ce résultat était attendu en raison de la présence d'un intégrateur dans la chaîne directe.

En conclusion la PLL permet d'obtenir un signal sans déphasage.

Q24 : Indiquer l'intérêt du contrôle de parité dans la transmission.  
Il permet de vérifier l'intégrité des données reçues.

Proposer un algorithme

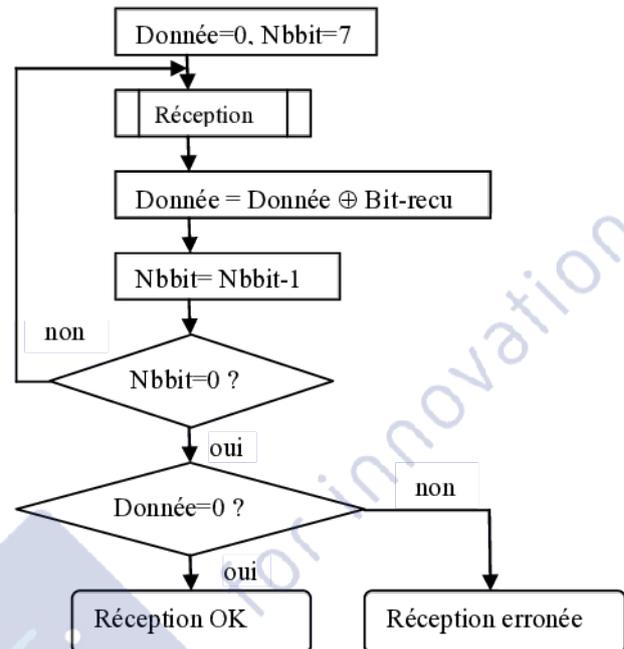
Deux variables 8 bits, Donnée, Nbbit

Sous programme Réception : fournit en sortie la variable d'un bit dans Bit-recu

$\oplus$  = Ou exclusif

On compte le nombre de bit reçu (6 bits pour les heures + bit de parité)

Donnée =  $B_{29} \oplus B_{30} \oplus B_{31} \oplus B_{32} \oplus B_{33} \oplus B_{34} \oplus B_{35}$



Pour contrôler l'intégrité de la trame complète, il suffit de faire ce traitement pour les trois bits de parité (bit 28, 35 et 58). Un OU logique entre les trois résultats (Donnée = 0 si OK) permet de contrôler la réception de la trame entière.

Q25 : Décoder les informations contenues dans la trame.

1 Bit de start  
10000001 Minute = 1 (Attention LSB en Premier)  
11000000 Heure = 3  
000011 Date = 30  
111 Jour = Dimanche  
11000 Mois = 3, mars  
00101000 Année = 2014

Nous sommes donc le dimanche 30 mars 2014, à 3h01.

La montre doit passer à l'heure d'été. Elle va donc avancer d'une heure : à 2h01 il sera 3h01.

## II.B - Modélisation du moteur de commande des aiguilles et évaluation de la consommation

Q26 : Dans le cas de l'essai à rotor bloqué, simplifier les équations du modèle de connaissance.

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{di_m(t)}{dt} \quad \text{A rotor bloqué, } e(t)=0.$$

En déduire, à partir des résultats de la figure 22, le modèle équivalent du stator

$$\text{En régime établi, } u_m(t = \infty) = R_m \cdot i_m(t = \infty) \text{ donc } R_m = \frac{1}{0,78} \cdot 10^3 = 1282 \Omega$$

A  $t = \tau$ ,  $i(t) = 0,63 \cdot VF$  (VF : valeur finale soit 0,78 mA)

On obtient ainsi  $\tau = 1 \text{ ms}$  or  $\tau = L_m / R_m$  donc  $L_m = 1,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1280 = 1,28 \text{ H}$

Q27 : Indiquer si la règle d'association des sources est respectée

Oui, on associe bien une source de tension avec une charge en courant (inductance en série avec une source de tension).

Justifier le choix technologique pour les interrupteurs de puissance ainsi que la structure utilisée pour commander le moteur Lavet.

Ce sont des transistors MOS. Ils sont adaptés en petite puissance (rapide).

La structure employée est un pont en H permettant de commander le moteur dans les deux sens.

Déterminer la loi de commande à paramétrer dans la simulation pour obtenir la tension représentée figure 23.

- $T_1$  et  $T_4$  passants (les autres bloqués) lorsque  $u_m = V_0$
- $T_2$  et  $T_3$  passants (les autres bloqués) lorsque  $u_m = -V_0$

Q28 : À partir des relevés précédents, évaluer numériquement l'énergie nécessaire pour effectuer la mise à l'heure.

L'énergie nécessaire pour effectuer la mise à l'heure à l'aide du moteur est celle fournie par la source (en négligeant les pertes dans le pont en H). Donc

$$p(t) = V_0 \cdot i_{batt}(t) \text{ donc sur une période (4 ms)} P = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cdot i_{batt}(t) \cdot dt$$

En linéarisant le courant sur une période et par un calcul d'aire :

$$P = \frac{1,5}{0,004} \left[ \frac{0,72 \cdot 1,2}{2} + 0,72 \cdot 2,3 + \frac{0,72 \cdot 0,5}{2} \right] 10^{-6} = 0,375 \cdot 10^{-3} \cdot [0,432 + 1,656 + 0,18] = 0,83 \text{ mW}$$

$$\text{Ainsi } E = P \cdot \Delta t \text{ donc } E = 0,83 \cdot 10^{-3} \cdot 15,5 = 12,8 \text{ mJ}$$

Conclure par rapport aux spécifications du cahier des charges données au début du sujet.

L'énergie nécessaire pour cette mise à l'heure est possible avec celle récupérée pendant une journée (400mJ). La mise à l'heure quotidienne est donc réalisable. On respecte le cahier des charges.

### III Conclusion sur l'étude

Q29 :