

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2016

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Suspension pneumatique de véhicule de transport routier

PARTIE 1 : GESTION DU NIVEAU

1. Étude de la phase de mise à niveau

Question 1. Fonction de transfert $H(p)$ modélisant le comportement de remplissage des coussins

On exprime la conservation du débit au travers des six coussins : $6S \frac{dy}{dt} = q$

Les fonctions étant supposées de conditions initiales nulles, on peut leur appliquer la Transformée de Laplace (TdL) :

$$H(p) = \frac{1}{6S \cdot p}$$

Question 2. Fonction de transfert $G(p)$ du potentiomètre

Le constructeur donne une loi linéaire entre un paramètre Q (proportionnel à la tension de sortie U) et l'angle mesuré φ (en degrés) : $Q = 0,5 \left(1 - \frac{\varphi}{80} \right)$. Pour $\varphi = 0$, $U = 2,5 \text{ V}$; alors, $U = 2,5 \left(1 - \frac{\varphi}{80} \right)$.

Soit la fonction $U^*(t) = U(t) - 2,5$, de conditions initiales nulles ; alors, on définit la TdL des fonctions du temps :

$$U(p) = L[U^*(t)] ; \varphi(p) = L[\varphi(t)] . \text{ La fonction de transfert demandée est alors : } G(p) = -\frac{1}{32}$$

Question 3. Géométrie du système d'embellage

Fermeture géométrique de l'embellage : $AN + NM + MA = \vec{0}$, soit encore $l_1 \vec{x}_3 + l_2 \vec{x}_4 = b\vec{x}_0 + (\lambda - a)\vec{y}_0$. En définissant l'angle $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$, on projette cette équation dans la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;

$$\begin{cases} l_1 \cos\beta + l_2 \cos\varphi = b \\ l_1 \sin\beta + l_2 \sin\varphi = \lambda - a \end{cases}$$

On en déduit $\cos\beta = \frac{b - l_2 \cos\varphi}{l_1}$, soit encore $\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{b - l_2 \cos\varphi}{l_1} \right)^2$. En supposant raisonnablement

$$\text{que } b - l_2 \cos\varphi < l_1, \text{ on obtient : } \sqrt{l_1^2 - (b - l_2 \cos\varphi)^2} + l_2 \sin\varphi = \lambda - a$$

Cette relation est non linéaire et de conditions initiales non nulles ; on ne pourra écrire une fonction de transfert qu'en linéarisant la relation autour d'un point de fonctionnement de l'embellage.

Question 4. Fonction de transfert $M(p)$ de l'embellage

En suite de la question 3, on établit la fonction de transfert autour de la position $\varphi = 0$. La fonction

$(\lambda - a)$ en $\varphi = 0$ peut se linéariser à l'ordre 1 selon : $(\lambda - a) \approx \frac{0,1}{20} \varphi + 0,4$. On en déduit :

$$M(p) = 200 \text{ } ^\circ/\text{m}$$

Question 5. Positionnement optimal du capteur

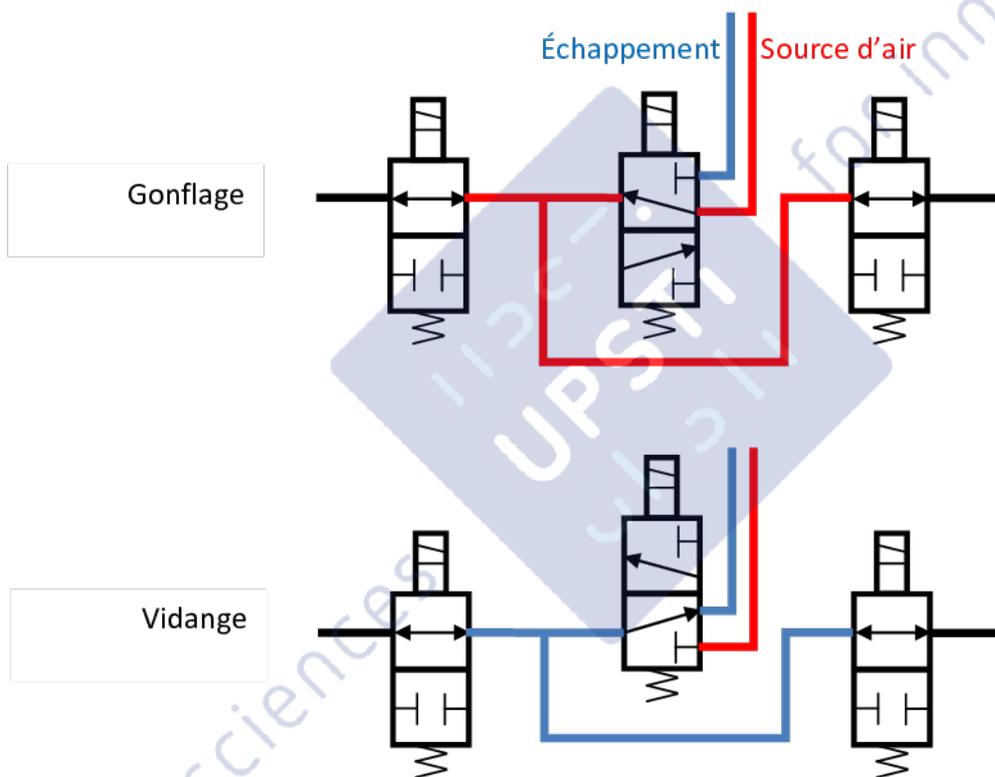
La relation linéaire proposée à la question précédente est valable pour l'intervalle $\varphi \in [-80^\circ; +40^\circ]$. La plage de fonctionnement du capteur étant de $\pm 60^\circ$, il paraît judicieux de l'installer tel que $\varphi = -20^\circ$ lorsque le véhicule est en position route.

Question 6. Fonction de transfert $N(p)$ du convertisseur analogique numérique (CAN)

Remarque : Erreur sans gravité de l'énoncé : il ne s'agit pas d'un CNA.

Le convertisseur reçoit une tension maximale de 5V (avec une tension minimale nulle) et délivre un mot binaire de 10 bits ; alors, $N(p) = \frac{1023}{5} \approx 205 \text{ inc/V}$

Question 7. Position des distributeurs en gonflage et en vidange.



Question 8. Réponse à un échelon (rapidité et allure de la réponse)

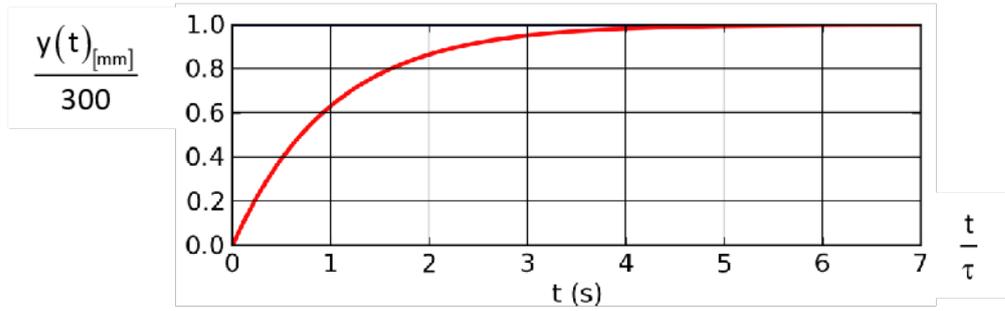
L'adaptateur étant configuré de manière à « compenser » la chaîne de rétroaction, on détermine la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y_c(p)}{Y(p)} = \frac{K_v CA K_{pot} K_{cin}}{p + K_v CA K_{pot} K_{cin}}$$

Cette fonction du premier ordre et de gain unitaire amène un temps de réponse à 5% égal à trois fois sa

constante de temps : $t_{5\%} = \frac{3}{K_v CA K_{pot} K_{cin}}$

L'allure de la réponse à un échelon est celle tracée ci-dessous.



Question 9. Saturation de l'électrovanne

On peut prendre en compte la limitation du débit de l'électrovanne par un bloc « saturation » (cf. symbole ci-contre) placé en aval du bloc représentant l'électrovanne.



Dans ces conditions, le déplacement du coussin se décompose en deux phases :

- Fonctionnement en boucle ouverte (BO) : $y(t) = Cq_{max} t$. A.N. : $y(t) = 0,04 t$ en m
- Dès que l'écart $\varepsilon(t)$ est inférieur à $\varepsilon_1 = \frac{q_{max}}{K_v} = 20 \text{ bit}$, le fonctionnement s'établit en boucle fermée. La position atteinte à cet instant t_1 est $y_1 = y_c \frac{\varepsilon_1}{AK_{pot} K_{cin}}$. A.N. : $y_1 = \frac{43}{150} \approx 0,287 \text{ m}$.
- On remarque que $y_1 \approx 0,95 \cdot y_c$, soit 0,285 m. Le temps t_1 , défini par : $t_1 = \frac{y_1}{Cq_{max}}$, correspond au temps de réponse à 5% pour cette consigne $y_c = 0,3 \text{ m}$. A.N. : $t_1 = t_{5\%} = \frac{43}{6} \text{ s} \approx 7 \text{ s}$

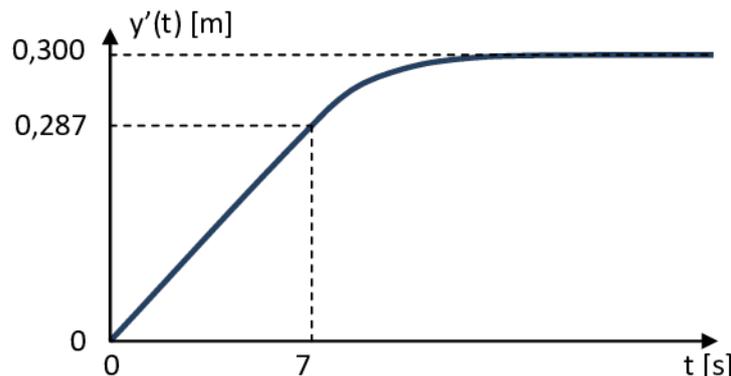
En posant $t' = t - t_1$ et $y'(t') = y(t) - y_1$, on voit que la suite du mouvement correspond à la réponse de la fonction de transfert en boucle fermée (premier ordre) à un échelon d'amplitude $(y_c - y_1)$:

$$y'(t') = (y_c - y_1) \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} \right) u(t') \quad \text{A.N. : } y'(t') = \frac{2}{150} \left(1 - e^{-3t'} \right) u(t')$$

On vérifie que la vitesse à l'instant initial t' ne présente pas de discontinuité :

$$\frac{dy'(0)}{dt'} = \frac{y_c - y_1}{\tau} \quad \text{A.N. : } \frac{dy'(0)}{dt'} = v_1 = 0,04 \text{ m/s}$$

- D'où l'évolution globale du déplacement représenté sur le graphique ci-après.



Remarque : On peut s'interroger sur la pertinence de chercher le temps de réponse à 5% pour un fonctionnement en régime saturé, sans justification par une exigence du cahier des charges.

Question 10. Justification de la fonction de transfert mécanique

Cette fonction est obtenue à partir de la projection sur la direction verticale du théorème de la résultante dynamique appliqué au véhicule dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Question 11. Théorème de superposition

On pose : $Y(p) = H_1(p)Y_c(p) + H_2(p)F_{ext}(p)$.

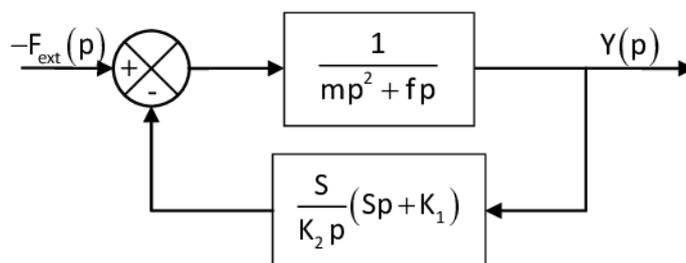
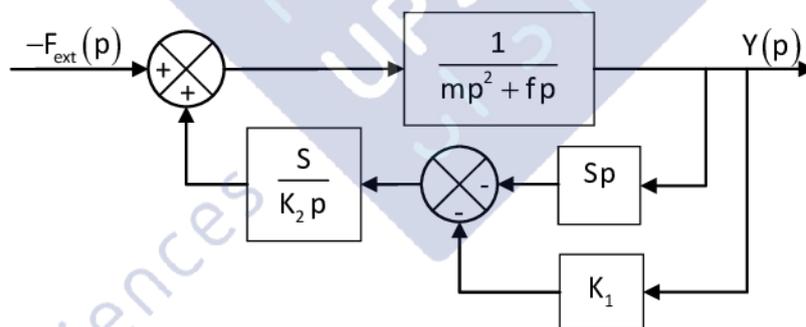
- En poursuite ($F_{ext}(p) = 0$) :

On résout la boucle interne : $\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{\frac{S}{K_2 p (mp^2 + fp)}}{1 + \frac{S^2 p}{K_2 p (mp^2 + fp)}}$ ou encore $\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{S}{K_2 p (mp^2 + fp) + S^2 p}$

On en déduit $H_1(p) = \frac{K_1 S}{K_1 S + S^2 p + K_2 fp^2 + K_2 mp^3}$

- En régulation ($Y_c(p) = 0$)

On arrange le schéma bloc, comme illustré ci-dessous.



On en déduit $H_2(p) = \frac{-K_2 p}{K_1 S + S^2 p + K_2 fp^2 + K_2 mp^3}$

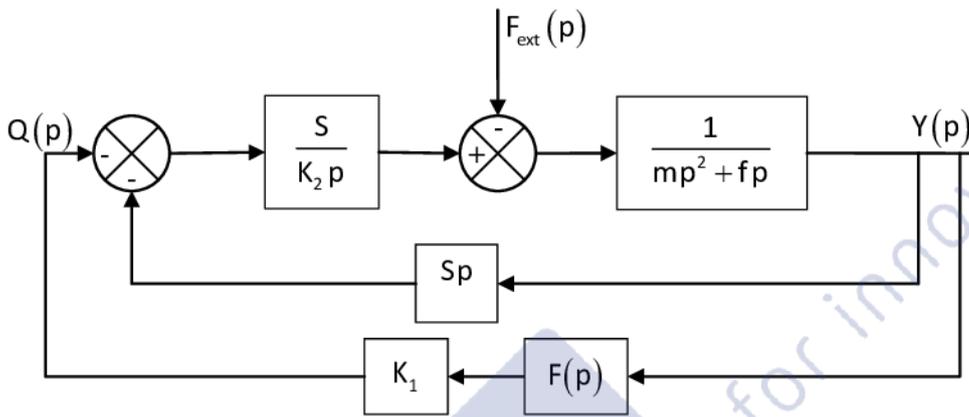
Question 12. Erreurs en position

- En l'absence de perturbations, H_1 est de gain unitaire ; l'erreur statique est nulle.
- Dans le cas d'une surcharge, la présence d'un intégrateur en amont de la perturbation va permettre de rejeter cette perturbation ; l'erreur statique est nulle.

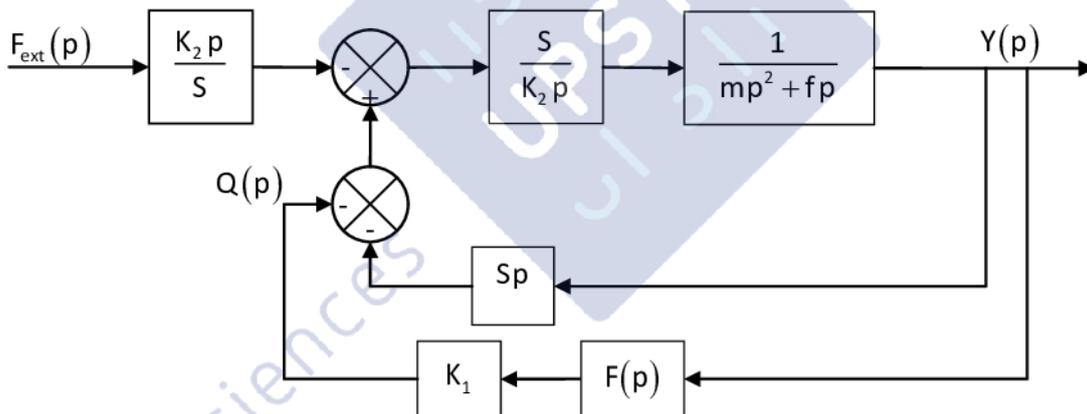
2. Étude de la phase de régulation de niveau de roulage

Question 13. Modification du schéma bloc selon une forme imposée

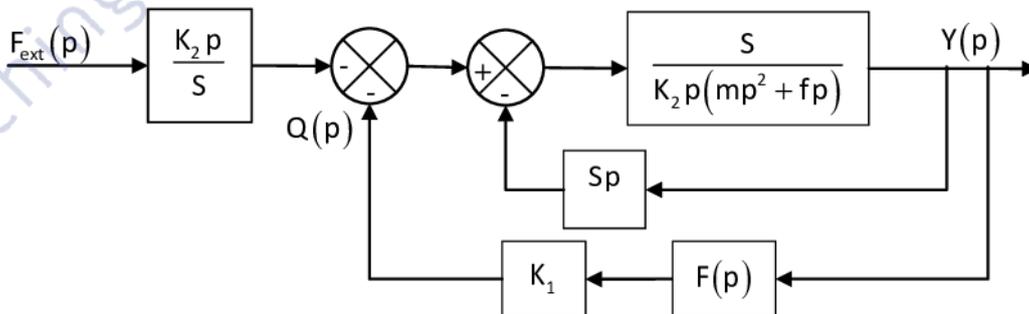
Une première étape pour faire apparaître la fonction filtre sur la rétroaction et prendre en compte le fonctionnement en régulation ($Y_c(p) = 0$).



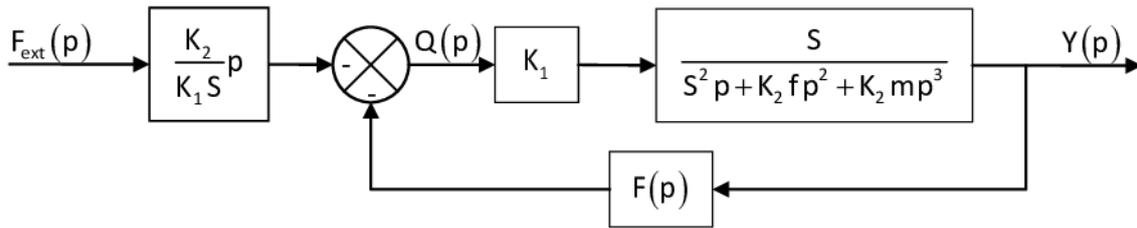
On déplace le bloc intégrateur $\frac{s}{K_2 p}$:



Réarrangement des sommateurs :



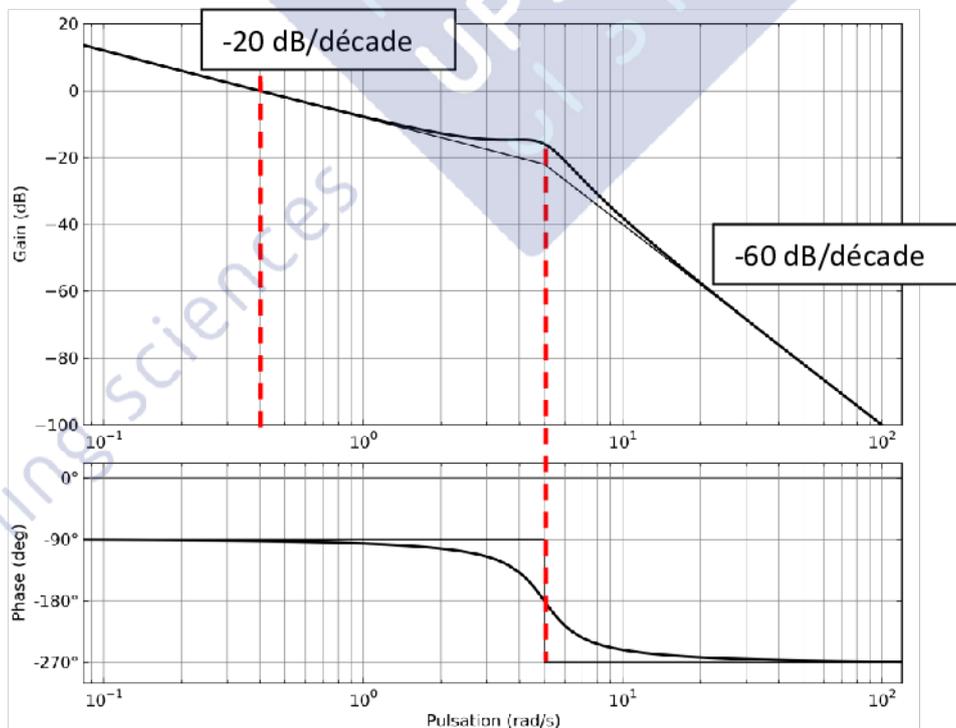
Réduction de la boucle interne et déplacement du bloc K_1 :



Question 14. Diagramme de Bode (asymptotes et allure du diagramme réel) pour étude de stabilité sans le filtre

L'étude de la stabilité en boucle fermée s'étudie au travers de la règle du revers lorsque cela est possible.

- La fonction de transfert en boucle ouverte est $H_{bo}(p) = \frac{0,4}{p(1+0,1p+0,04p^2)}$; cette fonction du troisième ordre de classe 1 ne présente pas de pôle à partie réelle strictement positive et ne possède qu'un intégrateur : l'application de la règle du revers est possible.
- La pulsation propre du second ordre est $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$; le taux d'amortissement est $z = 0,25$, indicateur de la présence d'une fréquence de résonance.
- Le gain en dB de la fonction $\frac{0,4}{j\omega}$ s'annule pour $\omega = 0,4 \text{ rad/s}$.



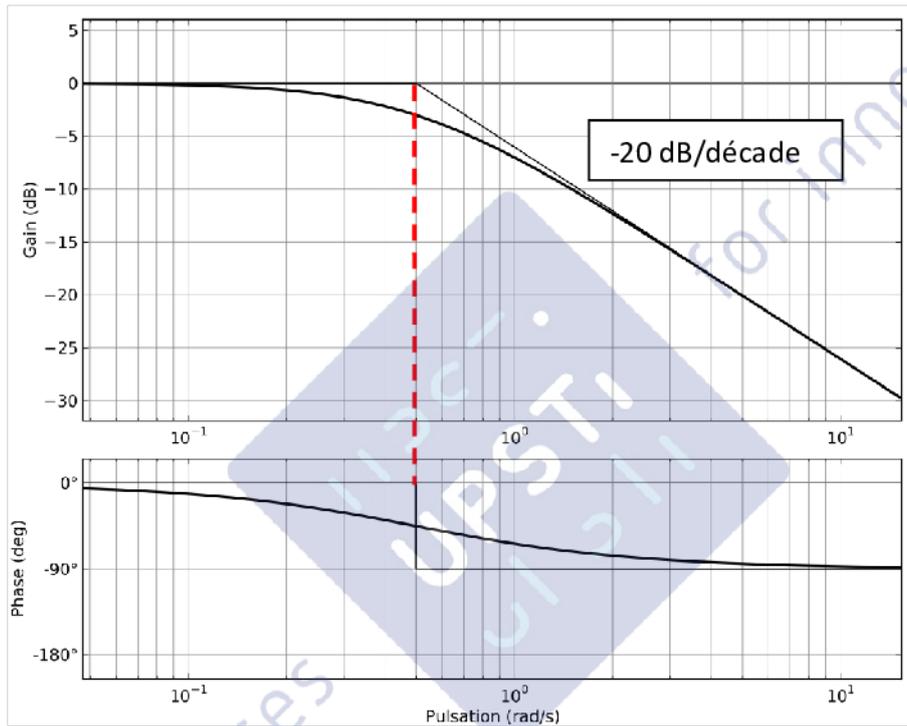
Question 15. Marge de phase (sans le filtre)

Le diagramme asymptotique de gain étant assimilé au diagramme réel, on en déduit que la pulsation de coupure à 0 dB est : $\omega_{c0dB} = 0,4 \text{ rad/s}$. La marge de phase se calcule alors par :

$$M_\varphi = 180 + \left[-90 - \frac{180}{\pi} \arctan \left(\frac{0,1 \omega_{c0dB}}{1 - 0,04 \omega_{c0dB}^2} \right) \right], \text{ soit } M_\varphi \approx 87,5^\circ$$

Question 16. Diagramme de Bode du filtre. Qualité du filtrage

Le filtre proposé est une fonction de transfert du premier ordre, de gain unitaire et de pulsation de cassure $\frac{1}{T} = 0,5 \text{ rad/s}$.



- A la pulsation de cassure du diagramme asymptotique (ici 0,5 rad/s), la courbe de gain est 3 dB sous les asymptotes. L'atténuation est donc bien inférieure à 3 dB pour les pulsations inférieures à 0,5 rad/s.
- En $\omega = 10 \text{ rad/s}$, la courbe de gain est assimilée à son asymptote. On lit sur le diagramme que l'atténuation est de l'ordre de 27 dB, soit supérieure aux 20 dB demandés dans le cahier des charges.

Le filtre respecte les qualités de filtrage demandées.

Question 17. Marge de phase avec filtre

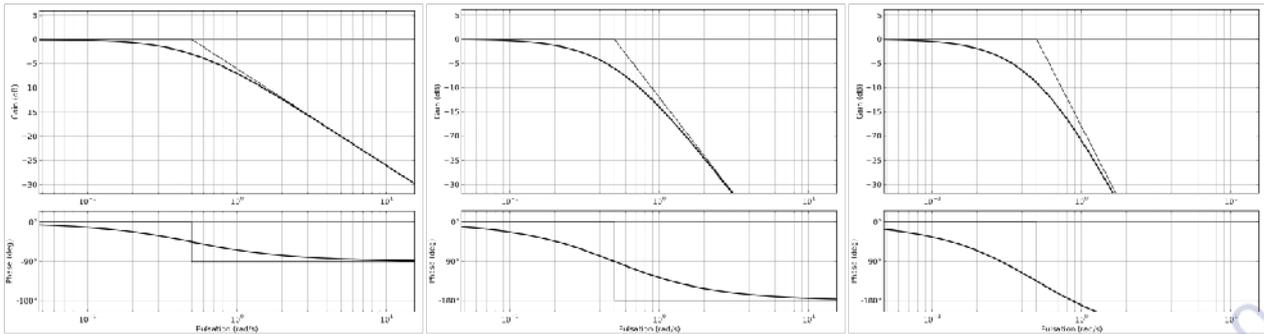
En continuant d'assimiler la courbe de gain à son asymptote, la pulsation de coupure demeure $\omega_{c0dB} = 0,4 \text{ rad/s}$. La marge de phase devient alors :

$$M_\varphi = 90 - \frac{180}{\pi} \arctan \left(\frac{0,1 \omega_{c0dB}}{1 - 0,04 \omega_{c0dB}^2} \right) - \frac{180}{\pi} \arctan(2 \omega_{c0dB}), \text{ soit } M_\varphi \approx 48,5^\circ$$

Cette valeur est inférieure aux 70° exigés par le cahier des charges ; ce filtre ne convient pas.

Question 18. Analyse de l'influence des paramètres du filtre

Le tracé du diagramme de Bode des filtres caractérisés par une constante de temps $T = 2 \text{ s}$ et d'ordre 1, 2 et 3 (de la gauche vers la droite) est reporté ci-dessous.



Plus l'atténuation est forte, plus on peut augmenter la pulsation de cassure $\frac{1}{T}$ tout en respectant les clauses d'atténuation du cahier des charges. Ceci va permettre de limiter l'impact du déphasage apporté par le filtre sur la marge de phase.

Le gain en dB du filtre d'ordre n s'exprime de la manière suivante : $G_{dB}(\omega) = -20n \cdot \log \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$. Pour $\omega = 10$ rad/s, l'atténuation doit être de 20 dB ; on en déduit la constante de temps T en fonction de l'ordre du filtre :

$$-10n \cdot \log(1 + 100T^2) \leq -20, \text{ soit encore } T^2 \leq 0,01 \left(10^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$$

Question 19. Réglage des paramètres du filtre

Le tableau ci-dessous résume la relation entre T et n obtenue à la question précédente :

n	1	2	3
T_{max} en s	1	0,3	0,036
M_ϕ en °	65	83,5	

La marge de phase est obtenue selon la méthode explicitée à la question 17. Le filtre d'ordre le plus faible (respect des contraintes de coût) et assurant la clause de stabilité du cahier des charges ($M_\phi > 70^\circ$) est celui d'ordre 2.

PARTIE 2 : GESTION DE LA REPARTITION DE CHARGE

1. Étude de la capacité de pilotage des charges des essieux

Question 20. Capacité de compensation d'un coussin seul

On isole $\Sigma = \{2; roue; coussin\}$. On lui applique le théorème du moment statique (TMS) en O dans le référentiel châssis 1 supposé galiléen, en projection sur la direction \vec{z} :

$$\underbrace{\vec{M}(O, g \rightarrow roue) \cdot \vec{z}}_{\text{négligeable}} + \underbrace{\vec{M}(O, 0 \rightarrow roue) \cdot \vec{z}}_{-eY_{A'}} + \underbrace{\vec{M}(O, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}}_{\text{liaison parfaite}} + \underbrace{\vec{M}(O, 1 \rightarrow coussin) \cdot \vec{z}}_{fF_p} = 0$$

Dans la mesure où l'on s'intéresse à la charge supportée, les forces tangentielles ente les roues et le sol n'ont pas été prises en compte. On en déduit que : $Y_{A'} = \frac{f}{e} F_p$. A.N. : $0 \leq Y_{A'} \leq 96000$ N

Remarques : L'énoncé suggère d'isoler la roue et le coussin ; il est préférable d'ajouter le bras 2.

Dans cette partie, le paramètre f n'est plus un coefficient de frottement mais une distance !

Question 21. Nombre de coussins pilotables

La liaison du véhicule au sol est un appui plan de normale \vec{y}_0 . En considérant chaque contact roue/sol comme une liaison sphère plan de normale \vec{y}_0 , trois roues suffisent pour assurer la cinématique. Toutefois, cette configuration génère une base de sustentation triangulaire, peu stable.

Il est préférable d'adopter une solution hyperstatique d'ordre 1, avec une base de sustentation rectangulaire.

Pour des raisons de manœuvrabilité, on adopte un empattement le plus court possible ; les essieux A et B sont donc utilisés en permanence.

Le constructeur peut choisir de piloter les coussins de l'essieu arrière C.

2. Minimisation de la consommation d'énergie

Question 22. Minimisation de la consommation de carburant

- Posons dans un premier temps les relations entre les efforts par essieux :

En supposant l'équilibre du véhicule dans le référentiel 0 galiléen, on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{TRS} / \vec{y}_0 : & Y_A + Y_B + Y_C - mg = 0 \\ \text{TMS en A} / \vec{z}_0 : & 0 - cY_B - (c+d)Y_C + l_G mg = 0 \end{cases}$$

- Respect de la réglementation :

Si l'essieu C est levé, $Y_C = 0$, $\frac{Y_B}{g} = \frac{l_G}{c} m$ et $\frac{Y_A}{g} = m \left(1 - \frac{l_G}{c} \right)$. A.N. : $\frac{Y_B}{g} = 10,8 T$.

Cette configuration dépasse les dix tonnes par essieu autorisés par la réglementation routière.

Donc, il faut imposer $\frac{Y_B}{g} \leq 10 T$

- La forme de la courbe $\frac{F_{rr}}{F_{rr_{ISO}}}$ fournie montre qu'un pneu peu chargé est proportionnellement plus pénalisant pour la résistance au roulement qu'un pneu lourdement chargé (20% de F_{rr} nominale pour 10% de charge nominale, **rapport 2**, contre 100% de F_{rr} nominale pour 100% de charge nominale, **rapport 1**).

De ce fait, on peut proposer de charger au maximum l'essieu B : $\frac{Y_B}{g} = 10 T$. On en déduit

$\frac{Y_A}{g} = 2 T$ et $\frac{Y_C}{g} = 1 T$.

Malheureusement, cette solution conduit à placer l'essieu C dans la plage la plus défavorable en terme de rapport de résistance au roulement par rapport à la charge.

La résistance totale au roulement est alors de 162% (32%, 100% et 20% respectivement pour les essieux A, B et C).

Remarque : Compte tenu de l'hyperstaticité de l'appui du camion au sol et que la résistance au roulement est évaluée au travers d'une lecture (approximative) sur une courbe, une véritable démarche de recherche de la configuration optimale (avec minimisation de la

fonction résistance au roulement) n'est pas possible. La solution proposée s'appuie sur la forme de la question suivante.

Ceci étant, il semble que l'influence de la stratégie de gestion des essieux ait peu d'influence sur la résistance au roulement (compte tenu de la précision de lecture sur la courbe fournie). Par exemple, avec une répartition uniforme de la charge sur les deux essieux arrière B et C, on obtient :

$$\frac{Y_A}{g} = 3,4 \text{ T} \text{ et } \frac{Y_B}{g} = \frac{Y_C}{g} = 4,8 \text{ T}$$

La résistance totale au roulement obtenue est alors de 165% (45%, 60% et 60% respectivement pour les essieux A, B et C).

Question 23. Charge minimale sur l'essieu C

Le constructeur impose $\frac{Y_C}{g} \geq 1,6 \text{ T}$. En reprenant les équations d'équilibre obtenues à la question précédente, on obtient : $\frac{Y_B}{g} \leq 8,8 \text{ T}$ et $\frac{Y_A}{g} \geq 2,6 \text{ T}$. On peut justifier ce choix par :

- Diminuer l'appui moyen sur l'essieu B permet d'accommoder les variations de charge durant le roulage sans dépassant la charge nominale des pneus ;
- Augmenter l'appui moyen sur l'essieu C permet d'éviter que cet appui s'annule en fonction des variations de charge durant le roulage ;
- Augmenter l'appui sur l'essieu avant entraîne une augmentation des efforts tangentiels d'adhérence sur cet essieu directeur et donc améliore la tenue de route.

Problématique du camion-citerne

Question 24. Justification de la répartition uniforme des charges

Le centre d'inertie de la charge liquide est en déplacement permanent durant le roulage. Il ne faut pas amplifier les mouvements de châssis qui en découlent pour ne pas mettre en danger la stabilité du véhicule ; la résistance au roulement et la consommation de carburant deviennent secondaires.

Question 25. Égalisation des actions entre les roues et entre les essieux

Relier les alimentations pneumatiques des coussins d'un même essieu égalise les efforts sur les roues de ce même essieu.

Par analogie, on égalise les efforts entre deux essieux en reliant l'alimentation des quatre coussins concernés.

3. Amélioration de la motricité en côte

Question 26. Actions normales au sol

En supposant l'équilibre du véhicule dans le référentiel 0 galiléen, on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{TRS} / \vec{y}_0 : & Y_A + Y_B + Y_C - mg \cos \gamma = 0 \\ \text{TMS en } A' / \vec{z}_0 : & 0 - c Y_B - (c+d) Y_C + mg(h \sin \gamma + l_G \cos \gamma) = 0 \end{cases}$$

- Cas 1 : Dans le cas où les roues sont posées au sol et $Y_B = Y_C$, on obtient :

$$\begin{cases} Y_{A1} = mg \frac{(2c - 2l_G + d)\cos\gamma - 2h\sin\gamma}{2c + d} \\ Y_{B1} = Y_{C1} = mg \frac{l_G \cos\gamma + h\sin\gamma}{2c + d} \end{cases}$$

- Cas 2 : Dans le cas où l'essieu arrière C' est levé, on obtient :

$$\begin{cases} Y_{A2} = mg \frac{(c - l_G)\cos\gamma - h\sin\gamma}{c} \\ Y_{B2} = mg \frac{l_G \cos\gamma + h\sin\gamma}{c} \end{cases}$$

Question 27. Motricité supplémentaire essieu arrière relevé

La motricité maximale est obtenue à la limite de l'adhérence sur les roues de l'essieu B' : $X_B = f_a Y_B$. Le gain de motricité se détermine par l'écart relatif entre les forces d'adhérence sur l'essieu B obtenues dans les cas 1 et 2 :

$$\Delta X_B = \frac{f_a (Y_{B2} - Y_{B1})}{f_a Y_{B1}}, \text{ soit encore } \Delta X_B = 1 - \frac{c}{2c + d}. \text{ A.N. : } \Delta X_B = 55 \%$$

Le modèle utilisé ne prend pas en compte les déformations du pneu sous les efforts qui peuvent perturber l'adhérence au sol. On peut aussi s'interroger sur la résistance de la liaison entre le pneu et la jante.

Le travail des suspensions sur le profil irrégulier de la chaussée provoque des variations des forces d'appui des roues sur le sol, donc des efforts tangentiels et de la motricité.

Question 28. Relevage de l'essieu arrière sur un camion 6x4

On reprend l'analyse de la question précédente, mais en ajoutant le fait que l'essieu arrière est lui aussi moteur : $X_B = f_a Y_B$ et $X_C = f_a Y_C$. Alors, le gain de motricité se détermine par :

$$\Delta X_B = \frac{f_a (Y_{B2} + Y_{C2} - Y_{B1})}{f_a Y_{B1}}, \text{ soit encore } \Delta X_B = \frac{d}{2c + d}. \text{ A.N. : } \Delta X_B = 11 \%$$

Cette solution amène un accroissement de motricité.

Question 29. Intérêts du relevage de l'essieu arrière sur un camion 6x4

L'apport de motricité apporté par la possibilité de relever l'essieu arrière sur un camion 6x4 est faible. De plus, le surcoût de fabrication et d'entretien d'une telle solution risque fort de ne pas être rentabilisé par l'économie faite sur les pneumatiques.

4. Étude de la suspension au freinage

Question 30. Raideur de la suspension avant

On applique le TMS à l'ensemble $\Sigma_A = \{\text{roues}_A; \text{bras}_A\}$ supposé en équilibre dans le référentiel 0 galiléen, au point O, en projection sur \vec{z}_0 :

$$\underbrace{\cancel{M(O, g \rightarrow \text{roue})} \cdot \vec{z} + M(O, g \rightarrow 2) \cdot \vec{z}}_{\text{masses négligeables}} + \underbrace{M(O, 0 \rightarrow \text{roue}) \cdot \vec{z}}_{(\vec{OA}' \wedge Y_A \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0} + \underbrace{M(O, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}}_{\text{liaison parfaite}} + \underbrace{M(O, \text{cousin} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}}_{(\vec{OE} \wedge F_R \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0} = 0$$

$$\left[(\overline{OA} \cdot \vec{x}_2) \vec{x}_2 + (\overline{OA} \cdot \vec{y}_2) \vec{y}_2 - R \vec{y}_0 \right] \cdot Y_A \vec{x}_0 + \left[(\overline{OE} \cdot \vec{x}_2) \vec{x}_2 + (\overline{OE} \cdot \vec{y}_2) \vec{y}_2 \right] \cdot F_R \vec{x}_0 = 0$$

$$\left[e \cos(\theta + \alpha) + (\overline{OA} \cdot \dot{y}_2) \sin(\theta + \alpha) \right] Y_A + \left[f \cos(\theta + \alpha) + (\overline{OE} \cdot \dot{y}_2) \sin(\theta + \alpha) \right] F_R = 0$$

Remarque : Il semble plus judicieux de considérer $(\overline{OA} \cdot \dot{y}_2) \sin(\theta + \alpha)$ et $(\overline{OE} \cdot \dot{y}_2) \sin(\theta + \alpha)$ négligeables plutôt que $(\overline{OA} \cdot \vec{y}_2)$

On en déduit : $e Y_A + f F_R = 0$. En prenant en compte les variations autour de la position d'équilibre statique, il vient : $e [Y_A^0 + \Delta Y_A] + f [F_R^0 + K_R (L - L_0)] = 0$. A l'équilibre, $e Y_A^0 + f F_R^0 = 0$; il subsiste :

$$e \Delta Y_A + f K_R (L - L_0) = 0$$

Par une analyse de la géométrie de la suspension, on observe que : $\tan \alpha = \frac{L - L_0}{f} = \frac{\Delta \lambda_A}{e}$. Alors :

$$\Delta Y_A = - \left(\frac{f}{e} \right)^2 K_R \Delta \lambda_A$$

Question 31. Vitesses de plongée des suspensions

$$\vec{V}(A'', 1/0) \cdot \vec{y}_0 = \vec{V}(B'', 1/0) \cdot \vec{y}_0 + \overline{A''B''} \wedge \overline{\Omega}(1/0) \cdot \vec{y}_0$$

Soit encore

$$\dot{\lambda}_A = \dot{\lambda}_B + (c \vec{x}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0) \cdot \vec{y}_0 \text{ et } \dot{\lambda}_A = \dot{\lambda}_B - c \dot{\theta} \cos \theta$$

De même,

$$\dot{\lambda}_C = \dot{\lambda}_B + (-d \vec{x}_1 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0) \cdot \vec{y}_0 \text{ et } \dot{\lambda}_C = \dot{\lambda}_B + d \dot{\theta} \cos \theta$$

En intégrant ces deux équations, il vient :

$$\begin{cases} \lambda_A - \lambda_B + \cancel{\lambda_A^0} - \cancel{\lambda_B^0} = -c \sin \theta \\ \lambda_C - \lambda_B + \cancel{\lambda_C^0} - \cancel{\lambda_B^0} = +d \sin \theta \end{cases}$$

Question 32. Equations de dynamique du véhicule

On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au véhicule en mouvement dans le référentiel 0 supposé galiléen :

$$\begin{cases} m \vec{\Gamma}(G, 1/0) = \vec{R}(0 \rightarrow 1) + \vec{R}(g \rightarrow 1) \\ \dot{\delta}(G, 1/0) = \dot{M}(G, 0 \rightarrow 1) + \cancel{\dot{M}(G, g \rightarrow 1)} \end{cases}$$

Avec,

- $\vec{M}(G, 0 \rightarrow 1) = \vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_A) + \vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_B) + \vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_C)$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_A) = \vec{F}_A \wedge \vec{A'G} = [X_A (h \cos \theta - l_G \sin \theta) + Y_A (h \sin \theta + l_G \cos \theta)] \vec{z}_0 - Z_A (h \vec{x}_1 + l_G \vec{y}_1)$$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_B) = \vec{F}_B \wedge \vec{B'G} = [X_B (h \cos \theta - l_G \sin \theta) + Y_B (h \sin \theta + l_G \cos \theta - c)] \vec{z}_0 - Z_B (h \vec{x}_1 + l_G \vec{y}_1 - c \vec{y}_0)$$

$$\vec{M}(G, 0 \rightarrow \text{roue}_C) = \vec{F}_C \wedge \vec{C'G} = [X_C (h \cos \theta - l_G \sin \theta) + Y_C (h \sin \theta + l_G \cos \theta - c - d)] \vec{z}_0 - Z_C (h \vec{x}_1 + l_G \vec{y}_1 - (c + d) \vec{y}_0)$$

- $$\ddot{\delta}(G,1/0) = \left. \frac{d\dot{\sigma}(G,1/0)}{dt} \right|_0 ; \dot{\sigma}(G,1/0) = \bar{l}(G,1)\bar{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}(-E\bar{x}_1 - D\bar{y}_1 + C\bar{z}_0) ;$$

$$\ddot{\delta}(G,1/0) = \ddot{\theta}(-E\bar{x}_1 - D\bar{y}_1 + C\bar{z}_0) + \dot{\theta}^2(-E\bar{y}_1 + D\bar{x}_1)$$

D'où les équations issues du PFD :

$$\begin{aligned}
 ma_x \bar{x}_0 &= \bar{F}_A + \bar{F}_B + \bar{F}_C - mg \bar{y}_0 \\
 \ddot{\theta}(-E\bar{x}_1 - D\bar{y}_1 + C\bar{z}_0) + \dot{\theta}^2(-E\bar{y}_1 + D\bar{x}_1) &= \\
 & \left[(X_A + X_B + X_C)(h\cos\theta - l_G \sin\theta) + (Y_A + Y_B + Y_C)(h\sin\theta + l_G \cos\theta) - cY_B - Y_C(c+d) \right] \dot{z}_0 \\
 & - (Z_A + Z_C + Z_C)(h\dot{x}_1 + l_G \dot{y}_1) + (cZ_B + (c+d)Z_C) \dot{y}_0
 \end{aligned}$$

Question 33. Variation de l'effort sur l'essieu B en fonction de l'angle de plongée

On projette le TRS sur la direction \dot{y}_0 : $0 = Y_A + Y_B + Y_C - mg$. En prenant en compte les variations autour de la position d'équilibre, il vient :

$$0 = \underbrace{Y_A^0 + Y_B^0 + Y_C^0 - mg}_{\text{Equilibre statique}} + \Delta Y_A + \Delta Y_B + \Delta Y_C$$

Or, $\Delta Y_A = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R \Delta\lambda_A$ (cf. question 30). En utilisant les résultats de la question 31, il vient :

$$\Delta Y_A = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\lambda_A - \lambda_A^0) = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\lambda_B - c\sin\theta - \lambda_A^0) \text{ et donc } \Delta Y_A = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\lambda_B^0 + \Delta\lambda_B - c\sin\theta - \lambda_A^0)$$

Par analogie,

$$\Delta Y_B = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\lambda_B - \lambda_B^0) \text{ et } \Delta Y_C = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\lambda_C - \lambda_C^0) = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\Delta\lambda_B + d\sin\theta)$$

L'équation d'équilibre devient alors :

$$0 = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (2\Delta\lambda_B - c\sin\theta + d\sin\theta) + \Delta Y_B \text{ et donc } \Delta Y_B = \frac{K_R}{3} \left(\frac{f}{e}\right)^2 (d-c)\sin\theta$$

Question 34. Variation de l'effort sur l'essieu B en fonction de la décélération du véhicule

On projette le TRD sur la direction \bar{x}_0 et le TMD sur \bar{z}_0 :

$$\begin{cases}
 ma_x = X_A + X_B + X_C \\
 C\ddot{\theta} = (X_A + X_B + X_C)(h\cos\theta - l_G \sin\theta) + (Y_A + Y_B + Y_C)(h\sin\theta + l_G \cos\theta) - cY_B - Y_C(c+d)
 \end{cases}$$

Soit encore,

$$C\ddot{\theta} - ma_x (h\cos\theta - l_G \sin\theta) = mg(h\sin\theta + l_G \cos\theta) - cY_B - Y_C(c+d)$$

A l'équilibre, cette équation devient : $0 = mgl_G - cY_B^0 - (c+d)Y_C^0$, soit $Y_C^0 = \frac{-mgl_G - cY_B^0}{c+d}$. On obtient alors :

$$C\ddot{\theta} - ma_x (h\cos\theta - l_G \sin\theta) = mg(h\sin\theta + l_G \cos\theta) - c(Y_B^0 + \Delta Y_B) - (c+d) \left(\frac{-mgl_G - cY_B^0}{c+d} + \Delta Y_C \right)$$

Après simplification,

$$C\ddot{\theta} - ma_x (h\cos\theta - l_G \sin\theta) = mg(h\sin\theta + l_G \cos\theta) - c\Delta Y_B + mgl_G - (c+d)\Delta Y_C$$

En prenant en compte que $\Delta Y_C = -\left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R (\Delta\lambda_B + d\sin\theta) = \Delta Y_B - \left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R d\sin\theta$, il vient :

$$\Delta Y_B = \frac{1}{2c+d} \left[-C\ddot{\theta} + ma_x (h\cos\theta - l_G \sin\theta) + mg(h\sin\theta + l_G [1 + \cos\theta]) + (c+d) \left(\frac{f}{e}\right)^2 K_R d\sin\theta \right]$$

Question 35. Tracé de la variation de l'effort sur l'essieu B

- Les deux équations obtenues (questions 33 et 34), par substitution de la variable ΔY_B , donnent une équation différentielle non linéaire de variable θ dépendant de la décélération a_x : on peut la résoudre (de manière approchée) numériquement à l'aide d'un algorithme explicite d'Euler par exemple.
- La première équation $\Delta Y_B = \frac{K_R}{3} \left(\frac{f}{e}\right)^2 (d-c)\sin\theta$ permet alors de tracer l'effort ΔY_B en fonction du temps.

Question 36. Raffinement du modèle

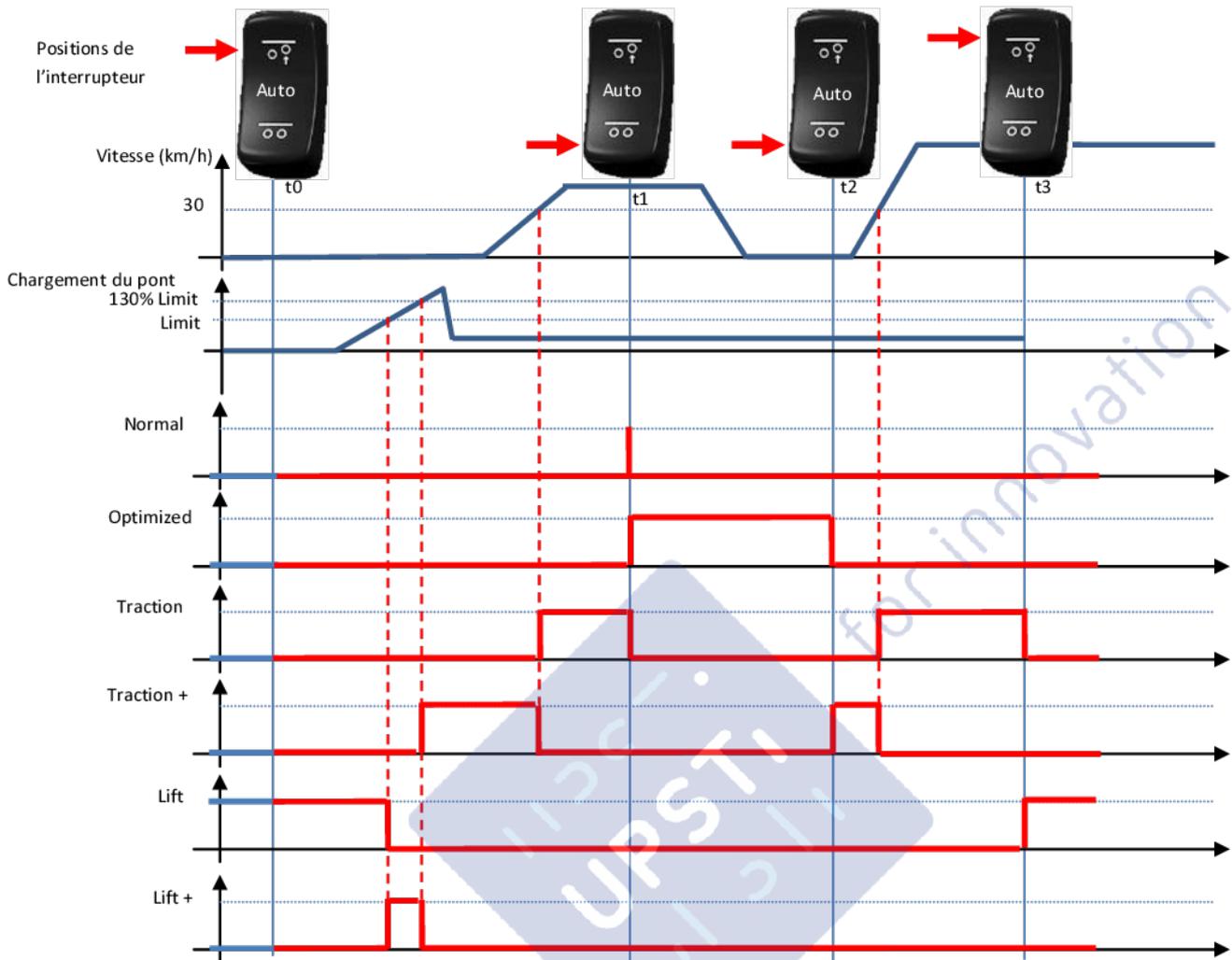
On remarque des oscillations des efforts au cours du temps autour de la valeur atteinte en régime établi ; cela signifie que des forces dissipatives ont été prises en compte dans le modèle, certainement les efforts dus aux amortisseurs.

Question 37. Non compensation de la modification de charge durant le freinage

- La surcharge du train avant est inévitable de par les forces d'inertie de décélération (pseudo-transfert de masse) ;
- Tant que la décélération ne provoque pas le décollement des roues de l'essieu C, celles-ci participent au freinage, ce qui est l'essentiel.

PARTIE 3 : ANALYSE DE LA GESTION DES DIFFERENTS MODES

Question 38. Chronogrammes d'utilisation des modes de fonctionnement



PARTIE 4 : EVALUATION DES PERFORMANCES EN ROULIS DU SYSTEME

1. Etude d'une charge décentrée

Question 39. Déport maximal de la charge

Le problème est plan de normale \vec{x}_1 .

- On projette sur \vec{y}_1 le TRS appliqué à 1 supposé en équilibre dans 0 galiléen : $-mg + F_2 + F_1 = 0$
- On projette sur \vec{x}_0 le TMS au point O appliqué à 1 supposé en équilibre dans 0 galiléen, en projection sur \vec{x}_0 : $e_G mg + l(F_2 - F_1) = 0$

On choisit (sans restreindre la généralité) de surcharger le côté droit du véhicule. Les équations deviennent alors :

$$\begin{cases} -mg + F_2 + F_{1max} = 0 \\ e_G mg + l(F_2 - F_{1max}) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que : $e_G mg + l(mg - F_{1max} - F_{1max}) = 0$, soit encore $e_G = l \left(\frac{2Sp_{max} - 1}{mg} \right)$

Question 40. Limites de validité du calcul du déport maximal

La courbe fournie est valable tant que le déport reste positif, donc pour des charges inférieures à 35 T.

Pour des charges supérieures à 35 T, la pression dans les coussins ne pouvant dépasser 8 bars (limiteur de pression sur le circuit pneumatique), les suspensions s'affaissent et viennent en butée contre le châssis.

A sa charge maximale de 26 T, le camion peut encaisser un déport maximal de 13 cm.

2. Etude de la suspension en virage

Remarque : Dans cette partie, on suppose (bien que ce ne soit pas précisé dans l'énoncé) que le chargement centré dans le camion : $e_g = 0$

Question 41. Forme de la matrice d'inertie du camion

$$\bar{I}(G,1) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

Question 42. Equation de roulis

On projette sur la direction \bar{x}_1 le TMD au point O_c appliqué à 1 en mouvement dans 0 galiléen :

$$\bar{\delta}(O_c, 1/0) \cdot \bar{x}_1 = \bar{M}(O_c, 0 \rightarrow 1) \cdot \bar{x}_1 + \bar{M}(O_c, g \rightarrow 1) \cdot \bar{x}_1$$

- $\bar{\delta}(O_c, 1/0) \cdot \bar{x}_1 = \bar{\delta}(G, 1/0) \cdot \bar{x}_1 + [O_c \dot{G} \wedge m \dot{a}(G, 1/0)] \cdot \bar{x}_1$

- $\bar{\delta}(G, 1/0) \cdot \bar{x}_1 = \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}(G, 1/0) \cdot \bar{x}_1] - \bar{\sigma}(G, 1/0) \cdot \left. \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right|_0$

$\dot{\sigma}(G, 1/0) = \bar{I}(G, 1) \bar{\Omega}(1/0)$, avec $\bar{\Omega}(1/0) = \dot{\Psi} \bar{y}_0$ ($\dot{\Psi} = \frac{V_0}{R_v}$ et β sont des constantes)

$$\bar{\sigma}(G, 1/0) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Psi} \cos \beta \\ -\dot{\Psi} \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \dot{\Psi} \cos \beta \\ B \dot{\Psi} \cos \beta \\ -C \dot{\Psi} \sin \beta \end{bmatrix}_{(O, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

$$\left. \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right|_0 = -\dot{\Psi} \bar{z}_0$$

$$\bar{\delta}(G, 1/0) \cdot \bar{x}_1 = (C - B) \dot{\Psi}^2 \cos \beta \sin \beta$$

- $[O_c \dot{G} \wedge m \dot{a}(G, 1/0)] \cdot \bar{x}_1 = (h' \bar{y}_1, -m R_v \dot{\Psi}^2 \bar{z}_0, \bar{x}_1) = -m R_v \dot{\Psi}^2 h' \cos \beta$

- $\bar{M}(O_c, 0 \rightarrow 1) \cdot \bar{x}_1 = -k_{roll} \beta$

- $\bar{M}(O_c, g \rightarrow 1) \cdot \bar{x}_1 = [O_c \dot{G} \wedge -m g \bar{y}_0] \cdot \bar{x}_1 = (h' \bar{y}_1, -m g \bar{y}_0, \bar{x}_1)$

$$\bar{M}(O_c, g \rightarrow 1) \cdot \bar{x}_1 = m g h' \sin \beta$$

On obtient :

$$\boxed{[(C - B) \cos \beta \sin \beta - m R_v h' \cos \beta] \dot{\Psi}^2 = -k_{roll} \beta + m g h' \sin \beta}$$

Question 43. Décentrage équivalent en virage

Le décentrage équivalent en virage se détermine par :

$$e_{\text{éq}} = \overline{O_c G} \cdot \vec{z}_0 = h' \sin \beta$$

En supposant $B=C$ et l'angle β petit (*plutôt que « négligeable »*), on peut linéariser et simplifier l'équation différentielle obtenue à la question précédente :

$$-mR_V h' \dot{\Psi}^2 = (-k_{\text{roll}} + mgh')\beta$$

On obtient :

$$e_{\text{éq}} = \frac{mR_V h'^2 \dot{\Psi}^2}{k_{\text{roll}} - mgh'} \quad \text{A.N. : } e_{\text{éq}} = 22 \text{ cm}$$

On remarque sur la courbe $e_{\text{max}} = f(\text{charge})$ qu'un décentrage de 22 cm n'est compensable par la suspension pneumatique que pour une charge centrée inférieure à 22 tonnes. Pour des charges supérieures ou si la charge n'est pas centrée, le camion va prendre un angle de roulis non nul.

Question 44. Correction dynamique du roulis.

La capacité de correction du roulis du système pneumatique proposé est limitée par la pression maximale dans les coussins (8 bars).

On peut solutionner le problème en ajoutant un asservissement de position angulaire en roulis à actionneurs hydrauliques (suspension hydraulique active). Il en résulterait évidemment des surcoûts d'installation et de maintenance. Ce type de suspension pose aussi le problème de la perception par le conducteur du danger de la vitesse excessive en courbe, le camion étant maintenu « à plat » dans les virages.