

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2017

Filière : PT

Épreuve : Informatique et Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Epreuve d'Informatique et Modélisation de Systèmes Physiques

Corrigé UPSTI

Partie 1 – Modélisation Moteurs à allumage commandé

A. Moteurs thermiques

Question 1. Contact avec les sources

Phase de contact avec la source chaude : CD

Phase de contact avec la source froide : EB

Dans cette modélisation, ces phases correspondent au contact du système avec des sources de températures différentes, d'où l'irréversibilité.

Question 2. Transfert thermique Q_c

On applique le 1^{er} principe de la thermodynamique en système fermé au système (n moles) entre C et D.

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + W_{CD} \stackrel{\text{isochore}}{=} Q_{CD} \stackrel{\text{Gaz Parfait}}{=} n \cdot C_{V,m} \cdot (T_D - T_C)$$

En notant $C_{V,m}$ la capacité calorifique molaire à volume constant, non précisé dans l'énoncé.

$$\Rightarrow Q_c = n \cdot C_{V,m} \cdot (T_D - T_C)$$

Question 3. Transfert thermique Q_f

De même entre E et B.

$$\Delta U_{EB} = Q_{EB} + W_{EB} \stackrel{\text{isochore}}{=} Q_{EB} \stackrel{\text{Gaz Parfait}}{=} n \cdot C_{V,m} \cdot (T_B - T_E)$$

$$\Rightarrow Q_f = n \cdot C_{V,m} \cdot (T_B - T_E)$$

Question 4. Rendement

$$\eta = \frac{\text{"ce que l'on veut"}}{\text{"ce que l'on paie"}} = \frac{|W|}{Q_c}$$

1^{er} principe appliqué au cycle entier : $\Delta U = W + Q_c + Q_f$

$$\Rightarrow \eta = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C}$$

Question 5. Rendement en fonction du rapport volumétrique α

Loi de Laplace : $PV^\gamma = C^{ste}$ pour un gaz parfait en évolution adiabatique et réversible de rapport γ constant.

$$\begin{cases} PV^\gamma = C^{ste} \\ PV = nRT \end{cases} \Rightarrow \frac{T}{V} \cdot V^\gamma = C^{ste}, \text{ soit } TV^{\gamma-1} = C^{ste}$$

Ici :

- BC adiabatique réversible $\rightarrow T_B V_{max}^{\gamma-1} = T_C V_{min}^{\gamma-1}$
- DE adiabatique réversible $\rightarrow T_D V_{min}^{\gamma-1} = T_E V_{max}^{\gamma-1}$

D'où :

$$\frac{T_D}{T_E} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{V_{max}^{\gamma-1}}{V_{min}^{\gamma-1}} = \alpha^{\gamma-1} \text{ et } \frac{T_B}{T_E} = \frac{T_C}{T_D}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_E}{T_D} \cdot \frac{1 - T_B/T_E}{1 - T_C/T_D} = 1 - \frac{T_E}{T_D}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$$

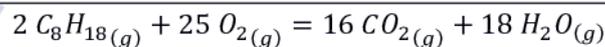
Question 6. Influence de α

$\alpha > 1$ et $1 - \gamma < 0$ donc $\alpha^{1-\gamma} \searrow$ quand $\alpha \nearrow$ et $\eta \nearrow$ quand $\alpha \nearrow$.

Pour augmenter α , il faut augmenter V_{max} et/ou diminuer V_{min} . Le premier pose un problème d'encombrement et le second est limité par l'existence d'un volume mort et par l'auto-inflammation du mélange sous trop haute pression.

B. Combustion dans le cylindre**Question 7. Equation de combustion**

En supposant une combustion complète, il ne se forme que de l'eau H_2O et du CO_2 . Ceci était rappelé dans le paragraphe C.1 de la partie informatique.

**Question 8. Invariance de n**

Dans l'air, on a environ 4 moles de N_2 pour 1 mole de O_2 .

$$\text{Etat initial : } \underbrace{2}_{C_8H_{18}} + \underbrace{25}_{O_2} + \underbrace{4 \cdot 25}_{N_2 \text{ de l'air}} = 127 \text{ mol}$$

$$\text{Etat final : } \underbrace{16}_{CO_2} + \underbrace{18}_{H_2O} + \underbrace{4 \cdot 25}_{N_2 \text{ non brûlé}} = 134 \text{ mol}$$

La différence de quantité de matière est de l'ordre de 5-6%, on peut donc considérer qu'elle ne varie pas.

C. Equation de la chaleur

Question 9. Situation unidimensionnelle

$$\operatorname{div} \vec{j}_{th} = \frac{\partial j_{thx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{thy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{thz}}{\partial z}$$

Donc en 1D, l'équation devient :

$$\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + \mu_{c_p} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0$$

Question 10. Puissances volumiques

j_{th} est en $W \cdot m^{-2} \Rightarrow \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$ est en $W \cdot m^{-3}$

$\mu_{c_p} \frac{\partial T}{\partial t}$ est en $kg \cdot m^{-3} \cdot J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} \cdot K \cdot s^{-1}$, soit $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-3}$ ou $W \cdot m^{-3}$

Il s'agit bien de puissances volumiques.

Question 11. Puissance volumique dégagée par la combustion

Pendant la durée dt , $|dn_c|$ est consommé. La réaction dégage $-dn_c \cdot Q$ (en J), ($dn_c < 0$).

La puissance correspondante est donc $P = Q \cdot \frac{-dn_c}{dt}$ (en W) et la puissance volumique s'écrit alors :

$$P_c = \frac{-1}{V} Q \frac{dn_c}{dt} = Q v_r$$

Question 12. Loi de Fourier et \vec{j}_{th}^d

$$j_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \stackrel{1D}{\Leftrightarrow} \vec{j}_{th}^d = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \quad (1)$$

Le signe « moins » signifie que la chaleur se déplace des régions chaudes vers les régions froides.

Question 13. \vec{j}_{th}^c

\vec{j}_{th}^c est en $W \cdot m^{-2}$ et est proportionnel à \vec{v} (« par analogie »)

$$\left. \begin{array}{l} \mu \text{ en } kg \cdot m^{-3} \\ c_p \text{ en } J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} \\ T \text{ en } K \end{array} \right\} \mu_{c_p} T \text{ en } J \cdot m^{-3} \text{ et } \mu_{c_p} T v \text{ en } J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}, \text{ soit en } W \cdot m^{-2}$$

On en déduit qu'a priori :

$$\vec{j}_{th}^c = \mu_{c_p} T \vec{v} \quad (2)$$

Question 14. Equation différentielle vérifiée par T

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \mu_{cP} \frac{\partial T}{\partial t} = Qv_r, \text{ avec } \vec{j}_{th} = \vec{j}_{th}^d + \vec{j}_{th}^c$$

(1) et (2) en projection sur x donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \mu_{cP} T v \right) + \mu_{cP} \frac{\partial T}{\partial t} &= Qv_r \\ \Leftrightarrow -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu_{cP} \frac{\partial T}{\partial x} + \mu_{cP} \frac{\partial T}{\partial t} &= Qv_r \end{aligned}$$

En régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et d'autre part, $\mu v = \mu_f U$, d'où :

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu_f U \mu_{cP} \frac{\partial T}{\partial x} = Qv_r$$

D. Bilan massique

Question 15. Dimension de D

$$[U] = LT^{-1}, [w_c] = 1 \text{ et } \left[\frac{dw_c}{dx} \right] = L^{-1} \Rightarrow \left[U \frac{dw_c}{dx} \right] = T^{-1}$$

$$\left[\frac{\mu D}{\mu_f} \cdot \frac{d^2 w_c}{dx^2} \right] = [D] \cdot \frac{[w_c]}{L^2} = \frac{[D]}{L^2}$$

$$\frac{[D]}{L^2} = T^{-1}$$

$$\Rightarrow [D] = L^2 T^{-1}$$

Question 16. Valeurs possibles de θ

$$w_c = \frac{\mu_c}{\mu}$$

Masse volumique du combustible

Masse volumique totale

A priori, puisque ω_{c_f} n'est pas défini dans le sujet, on utilise la même équation :

$$w_{c_f} = \frac{\mu_{c_f}}{\mu}$$

Masse volumique du combustible frais

Masse volumique totale

$$\chi = \frac{\omega_c}{\omega_{c_f}} = \frac{\mu_c}{\mu_{c_f}} \Leftrightarrow 0 \leq \chi \leq 1$$

$$\theta = 1 - \chi$$

$$\Leftrightarrow \theta \in [0, 1]$$

Ce qui est cohérent avec une appellation de température réduite.

Question 17. Que représente χ ?

χ représente le proportion de gaz frais par rapport au combustible, ce qui traduit l'évolution de la propagation de la flamme. $\chi = 0$, la flamme combustion est terminée, $\chi = 1$, la combustion n'a pas commencé.

E. Vitesse de flamme

Question 18. Fonction $\theta(x)$

θ est défini sur l'intervalle $[0, 1]$, et x est défini sur l'intervalle $] -\infty, +\infty[$, ces intervalles étant découpés en 3 :

$$\begin{cases} \theta \in [0, 1 - \varepsilon[\Rightarrow x \in] -\infty, 0[\\ \theta \in [1 - \varepsilon, 1[\Rightarrow x \in]0, l[\\ \theta = 1 \Rightarrow x \in]l, +\infty[\end{cases}$$

On cherche à montrer que la fonction $\theta(x) = Ae^{\frac{x}{d}} + Bx + C$ convient avec des constantes différentes pour représenter $\theta(x)$ sur les 3 domaines. On appellera A_i (resp. B_i, C_i) la constante A (resp. B, C) sur le domaine i .

- Domaine 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) &= C_1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} B_1 x = 0 \\ \theta(0) &= A_1 + C_1 = 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

En prenant $B_1 = 0$, $C_1 = 0$ et $A_1 = 1 - \varepsilon$ on obtient bien les intervalles de définition correspondant.

- Domaine 2 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) &= A_2 + C_2 = 1 - \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow l} \theta(x) &= A_2 e^{\frac{l}{d}} + B_2 l + C_2 = 1 \end{aligned}$$

Il est *a priori* possible de trouver un jeu de constantes tel que la solution existe.

- Domaine 3 :

$$\theta(x) = A_3 e^{\frac{x}{d}} + B_3 x + C_3 = 1$$

En prenant $A_3 = B_3 = 0$ et $C_3 = 1$ le résultat tombe instantanément.

Question 19. Continuité des fonctions θ et $\frac{d\theta}{dx}$

Il y a continuité de la température dans l'espace et continuité du flux thermique.

Question 20. Relation entre ε , f_0 , d et U

Continuité en $x = 0$:

$$\begin{cases} \theta(0^-) = \theta(0^+) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{d\theta(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d\theta(x)}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \varepsilon = 1 - \frac{f_0}{\varepsilon U} l + \frac{f_0 d}{\varepsilon U} (1 - e^{-\frac{l}{d}}) \\ \frac{1 - \varepsilon}{d} = \frac{f_0}{\varepsilon U} - \frac{f_0}{\varepsilon U} e^{-\frac{l}{d}} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{f_0}{\varepsilon U} (l - d + d e^{-\frac{l}{d}}) \\ \varepsilon = 1 - \frac{d f_0}{\varepsilon U} (1 - e^{-\frac{l}{d}}) \end{cases} \Rightarrow \frac{f_0}{\varepsilon U} (l - d + d e^{-\frac{l}{d}}) = 1 - \frac{d f_0}{\varepsilon U} (1 - e^{-\frac{l}{d}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_0 l}{\varepsilon U} = 1 \Leftrightarrow l = \frac{\varepsilon U}{f_0}$$

$$(1) \Rightarrow 1 - \varepsilon = 1 - 1 + \frac{f_0 d}{\varepsilon U} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon U}{d f_0}} \right) = \frac{f_0 d}{\varepsilon U} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon U}{d f_0}} \right)$$

$$1 - \varepsilon = \frac{f_0 d}{\varepsilon U} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon U}{d f_0}} \right)$$

Question 21. DL ordre 2

En considérant $\varepsilon \ll 1$, $\frac{\varepsilon U}{d f_0} \ll 1$ et l'équation précédente s'écrit :

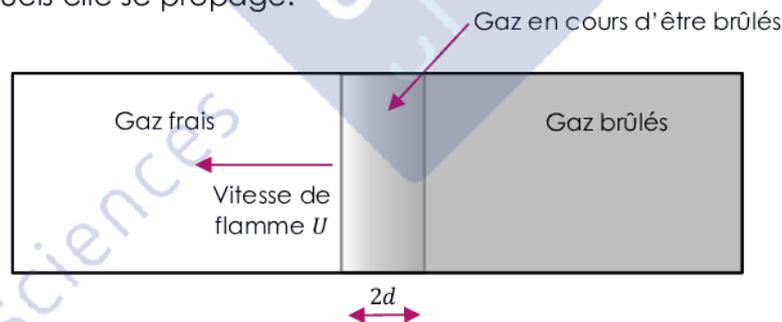
$$1 - \varepsilon = \frac{f_0 d}{\varepsilon U} \left(1 - 1 + \frac{\varepsilon U}{d f_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} \right)^2 - o \left(\left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} \right)^2 \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(1 - \varepsilon) = \frac{f_0 d}{U} \left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} \right)^2 - o \left(\left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} \right)^2 \right) \right) = \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon U}{2 d f_0} \right) - o \left(\left(\frac{\varepsilon U}{d f_0} \right)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U}{2 d f_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{U}{f_0} = 2 d$$

Question 22. Epaisseur de flamme

U , représente la vitesse de flamme en $m.s^{-1}$ et f_0 vitesse de réaction en s^{-1} . d est donc bien homogène à une longueur. $\frac{1}{f_0}$ représente le temps mis par la flamme pour brûler les gaz dans lesquels elle se propage.



On a donc une distance entre les gaz non brûlés et les derniers gaz brûlés de $2d$ et on appelle d « épaisseur de flamme ».

Question 23. Application numérique

$$f_0 = 10^4 \text{ Hz}, D_f = 10^{-5} \text{ m}^2.s^{-1}$$

On repart de l'équation différentielle :

$$U \frac{d\theta}{dx} - D_f \frac{d^2\theta}{dx^2} = f$$

Résolution de cette équation différentielle dans les différents domaines :

- Domaine 1 :

$$U \frac{1 - \varepsilon \frac{x}{d}}{d} e^{\frac{x}{d}} - D_f \frac{1 - \varepsilon \frac{x}{d}}{d^2} e^{\frac{x}{d}} = 0 \Leftrightarrow U - \frac{D_f}{d} = 0$$

- Domaine 2 :

$$U \frac{f_0}{\varepsilon U} \left(1 - e^{\frac{x-l}{d}}\right) + D_f \frac{f_0}{\varepsilon U d} e^{\frac{x-l}{d}} = \frac{f_0}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{D_f}{U d} = 1$$

- Domaine 3 :

$$0 = 0$$

On obtient donc l'équation :

$$\frac{D_f}{U d} = 1$$

On reprend également l'équation de la Question 21 :

$$\frac{U}{f_0} = 2d$$

Résolution :

$$\begin{cases} \frac{D_f}{U d} = 1 \\ \frac{U}{f_0} = 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D_f}{2f_0 d^2} = 1 \\ U = 2df_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{D_f}{2f_0} \\ U = 2df_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \sqrt{\frac{D_f}{2f_0}} \\ U = \sqrt{2D_f f_0} \end{cases}$$

Application numérique :

$$d = (0,5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-4})^{\frac{1}{2}} = 2,23 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 22,3 \mu\text{m}$$

$$U = (2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4)^{\frac{1}{2}} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Partie 2 – Informatique

Modélisation et simulation de la commande d'un moteur à allumage commandé

A. Présentation de la problématique

B. Repérage angulaire du moteur

Question 1. Temps de changement d'état de variable.

La durée minimale de changement d'état est calculée pour la vitesse de rotation maximale du moteur.

$$N_{max} = 7000 \text{ tr/min}$$

Il y a 60 dents sur la cible, soit 120 fois t_{dent} par tour d'arbre moteur. Ainsi

$$t_{dent} = \frac{60}{120 \cdot 7000} = \frac{1}{14000} \text{ s} \approx 7.10^{-5} \text{ s} < T_e = 2.10^{-3} \text{ s}$$

La période d'échantillonnage est donc beaucoup trop importante pour détecter le changement d'état.

Question 2. Fonction vitesse_moteur(t_{dent})

```
def vitesse_moteur( $t_{dent}$ ):
    return 60 / (120 *  $t_{dent}$ )
```

C. Contrôle du dosage air-essence

Question 3. Différence RAM / ROM

La mémoire ROM est une mémoire dite morte, elle n'est pas modifiable *a priori*, on n'y accède qu'en lecture. La mémoire RAM en revanche est volatile, on peut lire et écrire dans la RAM très facilement. A chaque extinction du système la mémoire RAM s'efface.

L'accès à la mémoire RAM est plus rapide que l'accès à la ROM, ce qui peut justifier ce choix.

Question 4. Espace mémoire

Les espaces mémoire sont donnés en ko (kilo-octet). Un octet représente 8 bits et un kilo octet représente 10^3 octets. Soit les résultats suivants :

- RAM : 3ko $\rightarrow (nbits)_{10} = 3 \cdot 8 \cdot 10^3$
- ROM : 32ko $\rightarrow (nbits)_{10} = 32 \cdot 8 \cdot 10^3$

Cette question est étrange. Peut-être a-t-on voulu parler de kibioctets, à ce moment-là il aurait fallu écrire en toute rigueur 3kio et 32kio et le résultat aurait été :

- RAM : 3kio $\rightarrow (nbits)_{10} = 3 \cdot 2^{10}$
- ROM : 32kio $\rightarrow (nbits)_{10} = 32 \cdot 2^{10}$

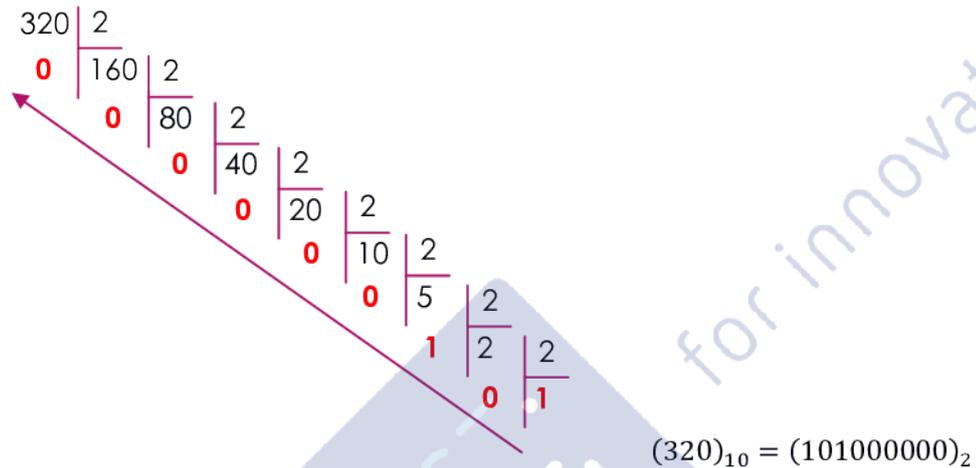
Question 5. Espace adressable

L'espace adressable est de 2^{24} adresses, soit 16 777 216 adresses.

L'adresse maximale en binaire est : $(1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111)_2$

Question 6. Conversion de bases

Conversion de la base 10 vers la base 2 :



Conversion de la 2 vers la base 16

$$\begin{array}{ccc} \underline{0001} & \underline{0100} & \underline{0000} \\ \quad 1 & \quad 4 & \quad 0 \end{array}$$

$$(101000000)_2 = (140)_{16}$$

Question 7. Choix de l'hexadécimal

Le code hexadécimal est plus lisible que le code binaire, son écriture est beaucoup moins lourde. De plus la conversion est instantanée puisqu'un chiffre en hexadécimal correspond à 4 bits en binaire. Les données étant organisées en octets (8 bits), chaque octet est représenté par 2 chiffres en hexadécimal.

Question 8. Fonction indice(A, val)

2 solutions

```
def indice(A, val):
    for i in range(1, len(A)):
        if A[i] > val: # On relève
            L'indice à partir duquel la valeur
            devient supérieure à val
            return i - 1
```

```
def indice(A, val):
    for i, v in enumerate(A):
        if v > val: # On relève
            L'indice à partir duquel la valeur
            devient supérieure à val
            return i-1
```

Question 9. Fonction extraire(T, P, Nm, I, j)

Solution listes

```
def extraire(T, P, Nm, i, j):
    return [[T[i][j], T[i][j + 1],
            P[j], Nm[i]], \ # Le \ permet d'aller à
            La ligne
            [T[i + 1][j], T[i + 1][j + 1],
            P[j + 1], Nm[i + 1]]]
```

Solution numpy

```
def extraire(T, P, Nm, i, j):
    ST = T[i:i+2, j:j+2]
    ST = np.hstack(ST, P[j:j+2])
    ST = np.hstack(ST, Nm[i:i+2])
    return ST
```

Question 10. Instructions pour obtenir ST

```
>>>idp = indice(P, Pcol)
>>>idNm = indice(Nm, Nmot)
>>>ST = extraire(T, P, Nm, idNm, idp)
```

Question 11. Pivot de Gauss

Algorithme en pseudo-code, résolution de $A \cdot b = c \Rightarrow b = A^{-1} \cdot c$

```
r = 0
Pour j de 0 à n - 1
    Rechercher Max(|A[i,j]|) pour i entre r + 1 et n - 1
    Noter k l'indice de la ligne de ce Max
    Si A[k,j] ≠ 0 alors (c'est le cas d'après les hypothèses)
        r ← r + 1
        Echanger les lignes k et r de A et c (échange)
        c[r] ← c[r] / A[r,j] (dilatation en premier sur c avant de modifier A[r,j])
        A[r,:] ← A[r,:] / A[r,j] (dilatation)
        Pour i de 0 à n - 1
            Si i ≠ r alors
                c[i] ← c[i] - c[r] * A[i,j] (transvection)
                A[i,:] ← A[i,:] - A[r,:] * A[i,j] (transvection)
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Si
Fin Pour
b ← c (le résultat est stocké dans c)
```

Question 12. Complexité

La boucle externe est répétée $\mathcal{O}(n)$ fois. À chaque étape j , la recherche de pivot coûte $\mathcal{O}(n)$ opérations, tout comme les échanges de lignes et les dilatations. Chaque transvection coûte $\mathcal{O}(n)$ opérations et est répétée $\mathcal{O}(n)$ fois. Les transvections sont donc en $\mathcal{O}(n^2)$ et même en $\theta(n^2)$.

La complexité totale de cet algorithme est donc en $\mathcal{O}(n^3)$.

Question 13. Complexité

En ne considérant que les 4 équations donnant les b_i , l'algorithme réalise 9 opérations élémentaires (soustractions). On ne parle pas ici de complexité en $\mathcal{O}(n)$, ce qui serait aberrant pour n petit (ici $n = 4$).

L'algorithme de Gauss, lui, fait intervenir une cinquantaine d'opérations (il faudrait les compter, encore une fois il n'est pas cohérent de parler de $\mathcal{O}(n)$ dans ce cas).

Cette résolution est donc beaucoup plus rapide que la résolution par la méthode du pivot de Gauss, ce qui est indispensable pour cette application « temps réel ».

Par ailleurs, ici on parle d'inversion d'une matrice triangulaire très simple, qui se fait très bien à la main, d'où l'inutilité du pivot de Gauss.

Question 14. Fonction `interpol(ST, Pcol, Nmot)`

Erreur dans l'énoncé sur le calcul de b_3 : $b_3 = ST[1,1] - ST[0,1] - ST[1,0] + ST[0,0]$

```
def interpol(ST, Pcol, Nmot):
    b0 = ST[0, 0]
    b1 = ST[0, 1] - ST[0, 0]
    b2 = ST[1, 0] - ST[0, 0]
    b3 = ST[1, 1] - ST[0, 1] - ST[1, 0] + ST[0, 0]
    x = (Pcol - ST[0, 2]) / (ST[1, 2] - ST[0, 2])
    y = (Nmot - ST[0, 3]) / (ST[1, 3] - ST[0, 3])
    return b0 + b1 * x + b2 * y + b3 * x * y
```

D. Amélioration des performances d'injection : Boucle fermée

Question 15. Fonction `sonde(r)`

```
def sonde(r):
    lamb = 1/r # attention lambda est un mot réservé du langage
    if lamb >= 1:
        return 0.1
    else:
        return 0.9
```

Question 16. Fonction `duree_injection(Usonde, Kpp, Kpn, Ki, tinjc0, integri, dt)`

```
def duree_injection(Usonde, Kpp, Kpn, Ki, tinjc0, integri, dt):
    if Usonde <= 0.5: # phase croissante
        tprop = tinjc0 * Kpp
        if integri >= 0: # pas de changement de phase
            integri += Ki * tinjc0 * dt
        else: # passage de la phase décroissante à la phase croissante
            integri = 0
    else: # phase décroissante
        tprop = tinjc0 * Kpn
        if integri <= 0: # pas de changement de phase
            integri -= Ki * tinjc0 * dt
        else: # passage de la phase croissante à la phase décroissante
            integri = 0
    return (tprop + integri), integri
```

Question 17. Relation de récurrence

On approxime le terme $\frac{ds(t)}{dt}$ par $\frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{dt}$.

Donc on obtient la relation suivante :

$$\tau \cdot \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{dt} + s(t_i) = K \cdot e(t)$$

$$\Leftrightarrow s(t_{i+1}) = \frac{K \cdot dt}{\tau} \cdot e(t_i) + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \cdot s(t_i)$$

Question 18. Fonction Euler(tau,K,dt,si,ei)

```
def Euler(tau, K, dt, si, ei):
    return si + dt*(K*ei-si)/tau
```

Question 19. Fonction richesse(tau1,tau2,K,dt,ri,wi,tinji)

```
def richesse(tau1, tau2, K, dt, ri, wi, tinji):
    return Euler(tau2, 1, dt, ri, wi), Euler(tau1, K, dt, wi, tinji)
```

Question 20. Durée d'un cycle

Il y a 2 cycles par tour de moteur et le moteur tourne à 4000 tr/min.

$$T_{cycle} = \frac{60}{2 \cdot 4000} = 7,5 \cdot 10^{-3} s$$

Question 21. Instructions pour la liste des temps

```
temps = [t0 + k * dt for k in range(int(tn / dt) + 1)]
```

Question 22. Instructions pour l'évolution de la richesse

```
U = liste_U[0]
w = w0
t = 0
for k in range(100): # Boucle tous Les Tcycle
    for l in range(int(Tcycle / dt)): # Boucle tous Les dt
        t += 1
        r, w = richesse(tau1, tau2, K, dt, \ # Le \ permet d'aller à la ligne
            liste_richesse[t - 1], w, liste_tinj[t - 1])
        liste_richesse.append(r)
        liste_U.append(U)
        tinj, integ = duree_injection(U, Kpp, Kpn, Ki, tinjc0, integ, dt)
        liste_tinj.append(tinj)
    U = sonde(liste_richesse[t]) # U n'est mis à jour que tous Les Tcycle
```

Question 23. Tracé de figure

La documentation de matplotlib n'est pas fournie ce qui est regrettable compte tenu du programme (« Aucune connaissance des fonctions des bibliothèques n'est exigible des étudiants »).

```
plt.figure()
plt.plot(temps, liste_richesse, label='richesse')
plt.legend()
plt.xlabel('temps (s)')
plt.grid()
plt.show()
```

E. Amélioration des performances d'injection : Auto-apprentissage

Question 24. Requête SQL

Dans cette question la difficulté réside dans la création d'une nouvelle table à partir de la requête avec la fonction INTO, ce qui est **hors programme**.

```
SELECT *
INTO table_injection_95
FROM table_injection
WHERE Qualité > 95
;
```

Question 25. Requête SQL

Il existe plusieurs méthodes pour répondre à la question. On choisit ici d'utiliser une sous-requête pour ne garder que les lignes donnant la qualité maximum sans afficher la qualité. Ceci dit la question est un peu ambiguë et aurait pu être interprétée autrement.

```
SELECT Pression, Rotation, Durée_injection
FROM table_injection_95
WHERE (Pression BETWEEN 0.3 AND 0.4)
AND (Rotation BETWEEN 1300 AND 1700)
AND (Qualité =
(SELECT MAX(Qualité) FROM table_injection_95)
WHERE (Pression BETWEEN 0.3 AND 0.4)
AND (Rotation BETWEEN 1300 AND 1700)
)
;
```