

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2015

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

1. Etant donné l'hypothèse de roulement sans glissement :

$$\begin{aligned} V_{max} &= R \times \omega_{rmax} \\ &= R \times \frac{N_{max}}{N} \times \frac{2\pi}{60} \end{aligned}$$

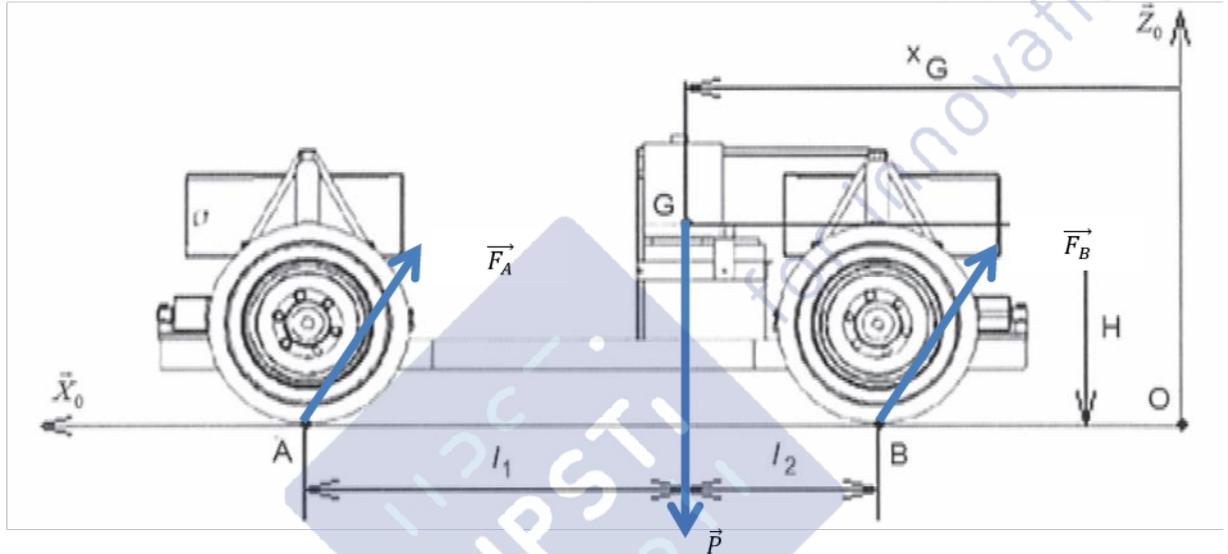
Application numérique :

$$V_{max} = 5,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

La vitesse à atteindre étant de $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, la performance attendue est bien vérifiée

2. La voiture est en phase de freinage, les composantes tangentielles des actions mécaniques du sol sur les roues s'opposent donc à la vitesse de glissement potentielle du véhicule par rapport au sol.

Outre les actions au niveau du contact des roues, le véhicule est soumis à son propre poids.



3. Le principe fondamental de la dynamique nous donne au niveau de la résultante :

$$M \cdot \overline{\Gamma(G/R)} = \overline{F_A} + \overline{F_B} + \overline{P}$$

En projection sur $\overline{x_0}$:

$$M\ddot{x}_G = T_A + T_B$$

4. En projection sur $\overline{z_0}$:

$$0 = N_A + N_B - Mg$$

5. Le mouvement étant une translation, le moment dynamique en G du véhicule par rapport au sol est nul.

$$\overline{\delta_G(S/R)} = \vec{0}$$

- 6.

$$\begin{aligned} \overline{\delta_A(S/R)} &= \overline{\delta_G(S/R)} + \overline{AG} \wedge M \cdot \overline{\Gamma(G/R)} \\ &= \vec{0} + (-l_1 \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0}) \wedge M\ddot{x}_G \cdot \overline{x_0} \\ &= HM\ddot{x}_G \cdot \overline{y_0} \end{aligned}$$

7. En appliquant le théorème du moment dynamique à la voiture en A, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\delta_A(S/R)} &= \overline{\mathcal{M}_A \overline{P}} + \overline{\mathcal{M}_A \overline{F_B}} + \overline{\mathcal{M}_A \overline{F_A}} \\ &= \overline{AG} \wedge \overline{P} + \overline{AB} \wedge \overline{F_B} + \vec{0} \\ &= (-l_1 \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0}) \wedge (-Mg \cdot \overline{z_0}) + (-l_1 + l_2) \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0} \\ &\quad \wedge (N_B \cdot \overline{z_0} + T_B \cdot \overline{x_0}) \end{aligned}$$

$$= (-l_1 Mg + (l_1 + l_2)N_B) \cdot \vec{y}_0$$

D'où :

$$HM\ddot{x}_G = -l_1 Mg + (l_1 + l_2)N_B$$

Et ainsi :

$$N_B = \frac{HM\ddot{x}_G + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

On en déduit :

$$N_A = Mg - N_B = \frac{l_2 Mg - HM\ddot{x}_G}{l_1 + l_2}$$

8.

A la limite du glissement :

$$|T_A| = f|N_A| \text{ et } |T_B| = f|N_B|$$

$\ddot{x}_G < 0$ étant donné qu'on est sur une phase de freinage et donc $T_A < 0$ et $T_B < 0$.

D'après les expressions trouvées à la question 7, $N_A > 0$. Afin de garder le contact au niveau de la roue B, N_B doit être positif aussi, ce qui nous donnerait une condition sur \ddot{x}_G :

$$\ddot{x}_G > -\frac{l_1 g}{H}$$

En considérant $N_B > 0$:

$$T_B = -f \cdot \frac{HM\ddot{x}_G + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$T_A = -f \cdot \frac{l_2 Mg - HM\ddot{x}_G}{l_1 + l_2}$$

9.

Le résultat de la question 3 nous impose :

$$M\ddot{x}_G = T_A + T_B$$

Donc :

$$Mx_{Gmax} = -f \cdot \frac{l_2 Mg - HMx_{Gmax}}{l_1 + l_2} - f \cdot \frac{HMx_{Gmax} + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$Mx_{Gmax} = -\frac{fl_2 Mg}{l_1 + l_2} - \frac{fl_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$x_{Gmax} = -fg$$

Cette valeur maximale est à comprendre comme étant la plus grande valeur d'accélération en valeur absolue.

Application numérique :

$$|x_{Gmax}| = fg = 1 \times 9,81 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

D'après le cahier des charges, le véhicule doit pouvoir subir une décélération sans glissement de $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui est vérifiée par la modélisation précédente.

10.

- a. y_2 correspond à la variable associée à la vitesse horizontale et y_1 à la position du véhicule. Il s'agit donc de déterminer l'évolution de ces 2 variables jusqu'à l'arrêt du véhicule.

while $y_2 > 0$:

- b. La résolution consiste à intégrer l'équation différentielle suivante à l'aide de la méthode d'Euler explicite.

$$\ddot{x}_G = -\left(0,8 + 0,2 \cdot e^{-\frac{v}{V_{REF}}}\right) \cdot g$$

On formule sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{V} = -\left(a + b \cdot e^{-\frac{V}{VREF}}\right) \cdot g \\ \dot{X} = V \end{cases}$$

L'écriture de la résolution par la méthode d'EULER nous donne :

$$\begin{cases} V_{k+1} = V_k + h * F_1(V_k, t_k) \\ X_{k+1} = X_k + h * F_2(X_k, t_k) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} F_1(V_k, t_k) = -\left(a + b \cdot e^{-\frac{V_k}{VREF}}\right) \\ F_2(X_k, t_k) = V_k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y1_{n+1} &= y1_n + h * y2_n \\ y2_{n+1} &= y2_n + h * (-a - b * \exp(y2_n / Vref)) \end{aligned}$$

- c. DA=y1
Vf=y2
tf=t

11.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} &= \overrightarrow{V(C \in S/0)} + \overrightarrow{O_1 C} \wedge \overrightarrow{\Omega S/0} \\ &= \vec{0} + \left(-a \cdot \vec{x} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \vec{y}\right) \wedge \dot{\psi} \cdot \vec{z}_0 \\ &= a\dot{\psi} \cdot \vec{y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S/0)} = a\dot{\psi} \cdot \vec{y} + \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \cdot \vec{x}$$

12.

$$\overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} = \overrightarrow{V(J_1 \in Roue_1/0)} + \overrightarrow{O_1 J_1} \wedge \overrightarrow{\Omega Roue_1/0}$$

$$\overrightarrow{\Omega Roue_1/0} = \overrightarrow{\Omega Roue_1/axe\ roue\ 1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \vec{0} + (-R \cdot \vec{z}_0 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1) \\ &= R\dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in Roue_2/0)} = R\dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_1$$

13.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/S)} + \overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} \\ R\dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 &= \vec{0} + a\dot{\psi} \cdot \vec{y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

En projetant suivant \vec{x} et \vec{y} :

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}_1 \cos \delta_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \\ R\dot{\theta}_1 \sin \delta_1 &= a\dot{\psi} \end{aligned}$$

14. De même qu'à la question 13 :

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}_2 \cos \delta_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \\ R\dot{\theta}_2 \sin \delta_2 &= a\dot{\psi} \end{aligned}$$

15. On en déduit :

$$\tan \delta_1 = \frac{a}{\rho - \frac{d}{2}}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{a}{\rho + \frac{d}{2}}$$

Application numérique :

$$\tan \delta_1 = 0,148 \Rightarrow \delta_1 = 8,4^\circ$$

$$\tan \delta_2 = 0,116 \Rightarrow \delta_2 = 6,6^\circ$$

16.

$$\dot{\theta}_2 = \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\dot{\psi}}{R}$$

$$\dot{\theta}_1 = \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\dot{\psi}}{R}$$

17.

$$A = \dot{\psi}_c = \frac{V}{\rho}$$

$$B = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1)$$

$$C = \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_0 \cdot (t - t_2)$$

On obtient D en intégrant C :

$$D = \dot{\psi}_c \cdot t - \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t - t_2)^2}{2} + Cte$$

Il faut calculer la constante :

$$D(t = t_2) = \dot{\psi}_c \cdot t_2 + Cte = B(t = t_2) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1)$$

D'où :

$$Cte = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \dot{\psi}_c \cdot t_1$$

$$D = \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1) + \ddot{\psi}_0 \cdot \left(\frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \frac{(t - t_2)^2}{2}\right)$$

18.

$$\psi_{TOT} = D(t = t_3) = \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_1)$$

$$= \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2 + t_2 - t_1)$$

$$= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2)$$

$$= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\dot{\psi}_c^2}{\ddot{\psi}_0}$$

19.

$$t_2 - t_1 = \psi_{TOT} - \frac{V^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\ddot{\psi}_0}$$

Application numérique :

$$t_2 - t_1 = 1,38 \text{ s}$$

20.

$$t_3 - t_0 = 2 \times (t_1 - t_0) + t_2 - t_1$$

$$= 2 \times \frac{V}{\rho} + t_2 - t_1$$

Application numérique :

$$t_3 - t_0 = 2,25 \text{ s}$$

21.

$$t_1 = \frac{V}{\rho} \cdot \frac{1}{\ddot{\psi}_0}$$

Application numérique :

$$t_1 = 0,43 \text{ s}$$

$$t_2 = t_2 - t_1 + t_1$$

Application numérique :

$$t_2 = 1,82 \text{ s}$$

D'après la question 20 :

$$t_3 = 2,25 \text{ s}$$

$$\psi(t_1) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}$$

Application numérique :

$$\psi(t_1) = 0,094 \text{ rd} = 5,4^\circ$$

$$\begin{aligned} \psi(t_2) &= \psi(t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) \\ &= \psi(t_1) + \frac{V}{\rho} \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\psi(t_2) = 0,69 \text{ rd} = 39,7^\circ$$

$t_3 < 3\text{s}$, le cahier des charges est bien validé.

22. L'énergie cinétique de l'arbre moteur +réducteur vaut :

$$T(\text{mot}/R) = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2$$

Puissance des efforts extérieurs :

- Puissance due au couple moteur : $C_m \dot{\theta}_m$
- Puissance due au couple de l'axe de la roue sur la sortie du réducteur : $-C_{re} \dot{\theta}_r$
- Puissance due au frottement visqueux du palier sur l'arbre moteur : $-f_m \dot{\theta}_m^2$

Aucune puissance due aux frottements secs.

Ainsi :

$$\begin{aligned} J_m \dot{\theta}_m \ddot{\theta}_m &= C_m \dot{\theta}_m - C_{re} \dot{\theta}_r - f_m \dot{\theta}_m^2 \\ J_m \dot{\theta}_m \ddot{\theta}_m &= C_m \dot{\theta}_m - C_{re} \cdot \frac{\dot{\theta}_m}{N} - f_m \dot{\theta}_m^2 \\ J_m \ddot{\theta}_m &= C_m - \frac{C_{re}}{N} - f_m \dot{\theta}_m \end{aligned}$$

23. L'énergie cinétique de la roue et son arbre vaut :

$$T(\text{roue}/R) = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2$$

Puissance des efforts extérieurs :

- Puissance due à la chaussée : $-C_p \dot{\theta}_r$
- Puissance due au couple de l'axe sortie du réducteur sur la roue : $C_{re} \dot{\theta}_r$
- Puissance due au frottement visqueux du palier sur la roue : $-f_r \dot{\theta}_r^2$

Aucune puissance due aux frottements secs.

Ainsi :

$$J_r \dot{\theta}_r \ddot{\theta}_r = -C_p \dot{\theta}_r + C_{re} \dot{\theta}_r - f_r \dot{\theta}_r^2$$

24.

$$J_r \ddot{\theta}_r = -C_p + C_{re} - f_r \dot{\theta}_r$$

$$C_{re} = K(\theta_{re} - \theta_r)$$

25.

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - \frac{C_{re}}{N} - f_m \dot{\theta}_m$$

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - \frac{K(\theta_{re} - \theta_r)}{N} - f_m \dot{\theta}_m$$

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - f_m \dot{\theta}_m - \frac{K}{N} (\frac{\theta_m}{N} - \theta_r)$$

D'où :

$$\alpha = f_m \text{ et } \beta = K$$

Et donc :

$$J_r \ddot{\theta}_r = -C_p + C_{re} - f_r \dot{\theta}_r$$

$$J_r \ddot{\theta}_r = -C_p - f_r \dot{\theta}_r + K \left(\frac{\theta_m}{N} - \theta_r \right)$$

26.

$$H_1(p) = \frac{I_m(p)}{E_m(p)} = \frac{1}{R_e + Lp}$$

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_{re}(p)} = \frac{1}{\alpha + J_m p}$$

$$C_{re}(p) = K(\theta_{re}(p) - \theta_r(p)) \Leftrightarrow C_{re}(p) = \frac{K}{p} \cdot (\Omega_{re}(p) - \Omega_r(p))$$

D'où :

$$H_3(p) = \frac{C_{re}(p)}{K(\Omega_{re}(p) - \Omega_r(p))} = \frac{1}{p}$$

$$H_4(p) = \frac{\Omega_r(p)}{C_{re}(p) + C_p(p)} = \frac{1}{\gamma + J_r p}$$

27. 1

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

La valeur finale vaut :

$$\Delta \dot{\theta}(\infty) = K \cdot C_m$$

D'où :

$$K = \frac{\Delta \dot{\theta}(\infty)}{C_m}$$

Application numérique :

$$K = 0,73 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1} / \text{Nm}$$

Pour $t = 3\tau$, la vitesse atteint 95% de sa valeur finale.

$$3\tau = t_{ra} = 1,85 \text{ s}$$

Application numérique :

$$\tau = 0,62 \text{ s}$$

27. 2

Dans Python :

```
def ecart_maxi(t, y, K, T):
    max = 0
    for i in range(len(t)):
        yt = K*4*(1 - exp(t[i]/T))
        if abs(yt - y[i]) > max :
            max = abs(yt - y[i])
    return max
```

Dans Scilab :

```
function [max] = ecart_maxi(t, y, K, T)
    max = 0
    for i = 0 : size(t)
        yt = K*4*(1 - exp( t(i) / T))
        if abs(yt - y(i)) > max
            max = abs (yt - y(i))
        end
    end
endfunction
```

28. 1

D'où :

$$\frac{K_e}{1 + T_e p} = \frac{1}{R_e + Lp}$$

$$K_e = \frac{1}{R_e} \text{ et } T_e = \frac{L}{R_e}$$

28. 2

$$W_{ua}(p) = \frac{\left(\frac{K_e}{1 + T_e p} \times K_{em} \times \frac{K_m}{1 + T_m p} \right)}{1 + \frac{K_e}{1 + T_e p} \times K_{em} \times \frac{K_m}{1 + T_m p} \times K_{em}}$$

$$= \frac{K_e K_{em} K_m}{(1 + T_e p) \times (1 + T_m p) + K_e K_m K_{em}^2}$$

$$= \frac{\frac{K_e K_{em} K_m}{1 + K_s}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_s} \times p + \frac{T_e T_m}{1 + K_s} \times p^2}$$

$$W_{cp}(p) = \frac{-\frac{K_m}{1 + T_m p}}{1 + \frac{K_e}{1 + T_e p} \times K_{em} \times \frac{K_m}{1 + T_m p} \times K_{em} - K_m \times (1 + T_e p)}$$

$$= \frac{-\frac{K_m}{1 + K_s} \times (1 + T_e p)}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_s} \times p + \frac{T_e T_m}{1 + K_s} \times p^2}$$

29.

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\dot{\psi}}{R} \\ \dot{\theta}_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\dot{\psi}}{R} \\ \dot{\theta}_2 &= 12 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1} \\ \dot{\theta}_1 &= 16 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

30. 1

Si $C_p(p) = 0$, le schéma-bloc se transforme en un système à retour unitaire ayant pour fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO(p) = K_p \times \frac{\frac{K_e K_{em} K_m}{1 + K_s}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_s} \times p + \frac{T_e T_m}{1 + K_s} \times p^2} \times \frac{1}{N}$$

L'écart statique est ici identique à l'erreur statique :

La classe de $FTBO$ étant 0 :

$$E_r(\infty) = \frac{\Omega_0}{1 + K_{FTBO}} \text{ avec } K_{FTBO} = \frac{K_p K_e K_{em} K_m}{N(1 + K_s)}$$

Donc :

$$E_r(\infty) = \frac{\Omega_0 N(1 + K_s)}{N(1 + K_s) + K_p K_e K_{em} K_m}$$

Soit :

$$K_p = \frac{\frac{\Omega_0 N(1 + K_s)}{E_r(\infty)} - N(1 + K_s)}{K_e K_{em} K_m} = \frac{\frac{N(1 + K_s)}{0,1} - N(1 + K_s)}{K_e K_{em} K_m}$$

Application numérique :

$$K_p = 172$$

La valeur de K_p doit donc être supérieur à 172 pour respecter un écart statique de moins de 10%.

30. 2

La boucle ouverte est une fonction du second degré, la fonction de transfert en boucle fermée sera également une fonction du second degré. Cette fonction est donc stable et la marge de gain est infinie.

31. 1

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 présentant un intégrateur. L'erreur statique sera donc annulée vis-à-vis d'une entrée échelon.

31. 2

$$W_{ua} = \frac{\frac{K_e K_{em} K_m}{1 + K_s}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_s} \times p + \frac{T_e T_m}{1 + K_s} \times p^2} = \frac{A}{1 + Bp + Cp^2}$$

$$\begin{aligned}FTBF(p) &= \frac{\frac{K_I + K_r p}{p} \times \frac{A}{1 + Bp + Cp^2} \times \frac{1}{N}}{1 + \frac{K_I + K_r p}{p} \times \frac{A}{1 + Bp + Cp^2} \times \frac{1}{N}} \\ &= \frac{(K_I + K_r p) \times A}{Np(1 + Bp + Cp^2) + (K_I + K_r p) \times A} \\ &= \frac{N(p)}{D(p)}\end{aligned}$$

$$D(p) = NCp^3 + NBp^2 + (N + AK_r)p + AK_I$$

Chaque coefficient de $D(p)$ doit être positif.

Pour assurer la stabilité :

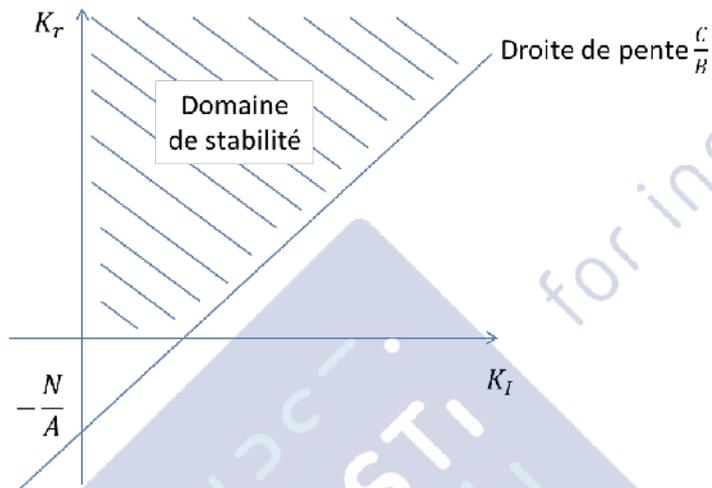
$$NB \times (N + AK_r) > NC \times AK_I$$

D'où :

$$K_r > \frac{NC \times AK_I}{NBA} - \frac{N}{A}$$

$$K_r > \frac{CK_I}{B} - \frac{N}{A}$$

On a ainsi le domaine de stabilité suivant :



32.

Type régulateur	P	PI
Précision	Bonne	Bonne
Stabilité	Mauvaise	Mauvaise
Rapidité	Mauvaise	Mauvaise
Filtrage des bruits	Mauvaise	Bonne