

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2015

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

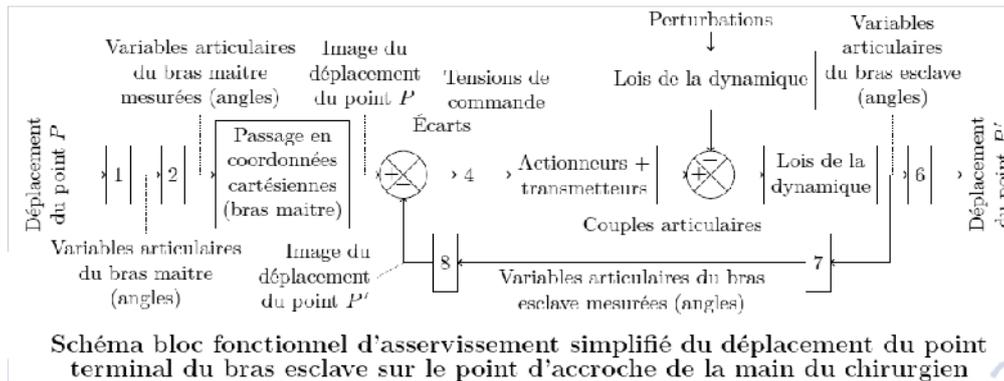
En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Q1 :



Entité	Numéro correspondant
Passage en coordonnées cartésiennes (pour le bras esclave)	8
Correcteurs	4
Modèle géométrique du bras maître	1
Capteurs de position du bras esclave	7
Capteurs de position du bras maître	2

NB : 6 : Modèle géométrique du bras esclave

Q2 :

On isole l'ensemble $S = \{2, 3, 4, 5\}$.

On effectue un bilan d'actions mécaniques extérieures :

- Actions de liaison :

$$T_{1 \rightarrow 3} = \begin{Bmatrix} X_{13} & L_{13} \\ Y_{13} & M_{13} \\ Z_{13} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \quad \text{et} \quad T_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0}$$

- Actions de la pesanteur :

$$\begin{aligned} \vec{P}_2 \text{ en } G_2; \quad \overline{AG_2} &= -\frac{l_2}{2} \vec{x}_2; \quad m_2 \\ \vec{P}_{c2} \text{ en } A_2; \quad \overline{AA_2} &= e\vec{x}_2; \quad M_2 \\ \vec{P}_3 \text{ en } G_3; \quad \overline{AG_3} &= -\frac{l_3}{2} \vec{x}_3; \quad m_3 \\ \vec{P}_{c3} \text{ en } A_3; \quad \overline{AA_3} &= e\vec{x}_3; \quad M_3 \\ \vec{P}_4 \text{ en } G_4; \quad \overline{AG_4} &= -l_3 \vec{x}_3 - \frac{l_2}{2} \vec{x}_2; \quad m_4 \\ \vec{P}_5 \text{ en } G_5; \quad \overline{AG_5} &= -l_2 \vec{x}_2 - \frac{3l_3}{2} \vec{x}_3; \quad m_5 \end{aligned}$$

On applique le théorème du moment statique en A, suivant la direction \vec{z}_0 :

$$\begin{aligned} & [\overline{AG_2} \wedge \vec{P}_2 + \overline{AA_2} \wedge \vec{P}_{c2} + \overline{AG_3} \wedge \vec{P}_3 + \overline{AA_3} \wedge \vec{P}_{c3} + \overline{AG_4} \wedge \vec{P}_4 + \overline{AG_5} \wedge \vec{P}_5] \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ & [\left(-\frac{l_2}{2} \vec{x}_2 \right) \wedge (-m_2 g \vec{y}_0) + (e\vec{x}_2) \wedge (-M_2 g \vec{y}_0) + \left(-\frac{l_3}{2} \vec{x}_3 \right) \wedge (-m_3 g \vec{y}_0) + (e\vec{x}_3) \wedge (-M_3 g \vec{y}_0) \\ & + \left(-l_3 \vec{x}_3 - \frac{l_2}{2} \vec{x}_2 \right) \wedge (-m_4 g \vec{y}_0) + \left(-l_2 \vec{x}_2 - \frac{3l_3}{2} \vec{x}_3 \right) \wedge (-m_5 g \vec{y}_0)] \cdot \vec{z}_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{l_2}{2} m_2 g \cos \beta - e M_2 g \cos \beta + \frac{l_3}{2} m_3 g \cos \alpha - e M_3 g \cos \alpha + l_3 m_4 g \cos \alpha + \frac{l_2}{2} m_4 g \cos \beta + l_2 m_5 g \cos \beta + \frac{3l_3}{2} m_5 g \cos \alpha = 0$$

$$\frac{l_2}{2} m_2 g \cos \beta \left[l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right) - e M_3 \right] \cos \alpha + \left[l_2 \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + m_5 \right) - e M_2 \right] \cos \beta = 0$$

$$K_{M_3} \cos \alpha + K_{M_2} \cos \beta = 0 \text{ avec } \begin{cases} K_{M_3} = l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right) - e M_3 \\ K_{M_2} = l_2 \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + m_5 \right) - e M_2 \end{cases}$$

N.B. : On peut aussi positionner le barycentre G de l'ensemble $S = \{2, 3, 4, 5\}$ de telle manière que $\overline{AG} \cdot \vec{x}_0 = 0$.

$$\left[m_2 \overline{AG}_2 + M_2 \overline{AA}_2 + m_3 \overline{AG}_3 + M_3 \overline{AA}_3 + m_4 \overline{AG}_4 + m_5 \overline{AG}_5 \right] \cdot \vec{x}_0 = 0$$

On obtient alors le même résultat.

Q3 :

$$\begin{cases} K_{M_3} = 0 \\ K_{M_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right) - e M_3 = 0 \\ l_2 \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + m_5 \right) - e M_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_3 = \frac{l_3}{e} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + \frac{3}{2} m_5 \right) \\ M_2 = \frac{l_2}{e} \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + m_5 \right) \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \begin{cases} M_3 = 6,75 \text{ kg} \\ M_2 = 7,5 \text{ kg} \end{cases}$$

Q4 :

$$\begin{cases} x(t) = -l_2 \cos(\beta(t)) - 2l_3 \cos(\alpha(t)) - h \sin(\alpha(t)) \\ y(t) = -l_2 \sin(\beta(t)) - 2l_3 \sin(\alpha(t)) + h \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} x_0 + \Delta x(t) = -l_2 \cos(\beta_0 + \Delta\beta(t)) - 2l_3 \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) - h \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) \\ y_0 + \Delta y(t) = -l_2 \sin(\beta_0 + \Delta\beta(t)) - 2l_3 \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) + h \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\text{En particulier } \begin{cases} x_0 = -l_2 \cos(\beta_0) - 2l_3 \cos(\alpha_0) - h \sin(\alpha_0) \\ y_0 = -l_2 \sin(\beta_0) - 2l_3 \sin(\alpha_0) + h \cos(\alpha_0) \end{cases}$$

On utilise les approximations suivantes à l'ordre 1 :

$$\cos(\beta_0 + \Delta\beta(t)) \approx \cos(\beta_0) - \sin(\beta_0) \Delta\beta(t) \text{ et } \sin(\beta_0 + \Delta\beta(t)) \approx \sin(\beta_0) + \cos(\beta_0) \Delta\beta(t)$$

$$\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) \approx \cos(\alpha_0) - \sin(\alpha_0) \Delta\alpha(t) \text{ et } \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) \approx \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0) \Delta\alpha(t)$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} \Delta x(t) = l_2 \sin(\beta_0) \Delta\beta(t) + (2l_3 \sin(\alpha_0) - h \cos(\alpha_0)) \Delta\alpha(t) \\ \Delta y(t) = -l_2 \cos(\beta_0) \Delta\beta(t) - (2l_3 \cos(\alpha_0) + h \sin(\alpha_0)) \Delta\alpha(t) \end{cases}$$

Pour finir :

$$\overline{\Delta P_c}(t) = Q_m \overline{\Delta a_m}(t) \text{ avec } Q_m = \begin{pmatrix} 2l_3 \sin(\alpha_0) - h \cos(\alpha_0) & l_2 \sin(\beta_0) \\ -(2l_3 \cos(\alpha_0) + h \sin(\alpha_0)) & -l_2 \cos(\beta_0) \end{pmatrix}$$

Q5 :

La matrice Q_m doit être inversible afin de pouvoir établir le modèle géométrique inverse exprimant les variations des variables articulaires $\overline{\Delta a_m}(t)$ en fonction des variations des coordonnées opérationnelles $\overline{\Delta P_c}(t)$:

$$\overline{\Delta a_m}(t) = Q_m^{-1} \overline{\Delta P_c}(t).$$

Q6 :

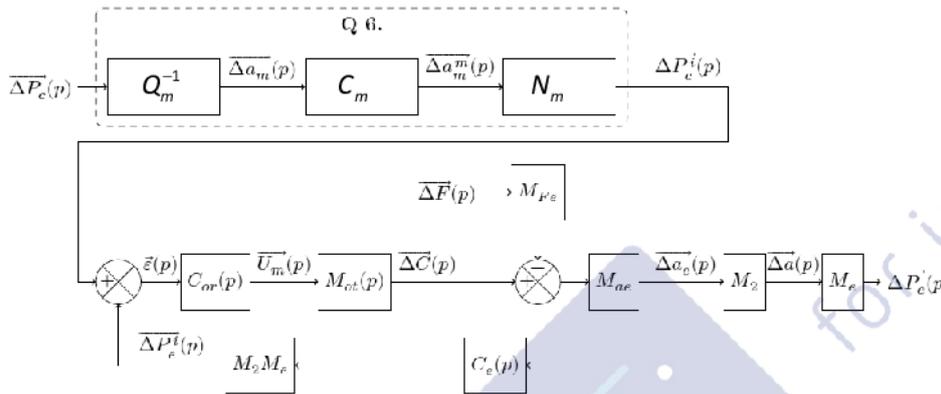
$$\overline{\Delta P_c}(t) = Q_m \overline{\Delta a_m}(t) \text{ et } \overline{\Delta P_c^i}(t) = N_m \overline{\Delta a_m^m}(t).$$

Avec la relation $\overline{\Delta P_c^i}(t) = \overline{\Delta P_c^i}(t)$, on en déduit : $Q_m \overline{\Delta a_m}(t) = N_m \overline{\Delta a_m^m}(t)$.

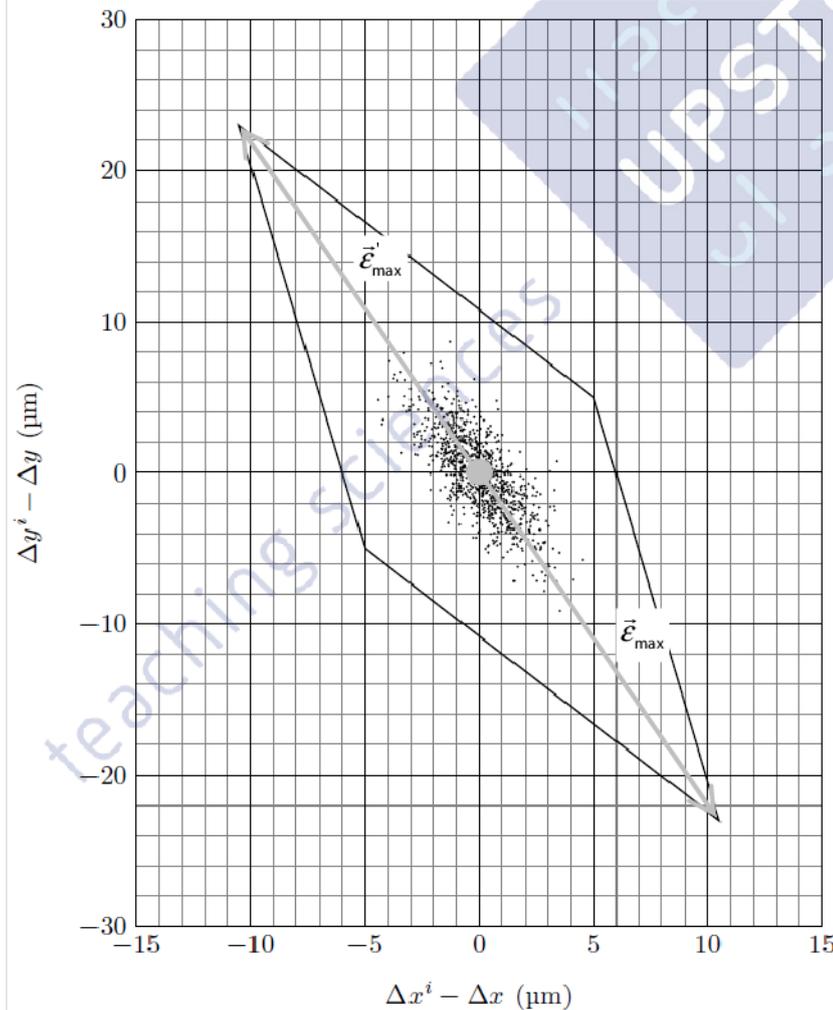
D'où $Q_m \overline{\Delta a_m}(t) = N_m C_m \overline{\Delta a_m}(t)$ et donc $N_m = Q_m C_m^{-1}$.

$$NB : N_m = \begin{pmatrix} \frac{2l_3 \sin(\alpha_0) - h \cos(\alpha_0)}{C_\alpha} & \frac{l_2 \sin(\beta_0)}{C_\beta} \\ \frac{-(2l_3 \cos(\alpha_0) + h \sin(\alpha_0))}{C_\alpha} & \frac{-l_2 \cos(\beta_0)}{C_\beta} \end{pmatrix}$$

On complète le schéma bloc :



Q7 :



«requirement» Limiter les écarts dus à la mesure (bras maître) Id = "1.2.1" Text = ""	«refine»	«requirement» Erreur de mesure Id = "1.2.1.1" Text = "< 0,1 mm"
--	----------	--

$$\epsilon_{\max} = \sqrt{10,5^2 + 23^2} = 25,3 \mu\text{m}$$

Le cahier des charges impose une erreur inférieure à 0,1 mm.

Il est donc respecté.

Q8 :

$$\vec{V}_{(P',7/0)} = \left. \frac{d\vec{A}'P'}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(\vec{A}'B' + \vec{B}'D' + \vec{D}'G' + \vec{G}'P')}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(-h\vec{x}'_0 + h_2\vec{y}'_2 - h_4\vec{x}'_0 - \lambda\vec{y}'_2)}{dt} \right|_0$$

$$\vec{V}_{(P',7/0)} = (h_2 - \lambda)\vec{\Omega}_{(2/0)} \wedge \vec{y}'_2 - \dot{\lambda}\vec{y}'_2 = (h_2 - \lambda)(\dot{\delta}\vec{z}'_1 + \dot{\phi}\vec{x}'_1) \wedge \vec{y}'_2 - \dot{\lambda}\vec{y}'_2 = (\lambda - h_2)(\dot{\delta}\vec{x}'_2 - \dot{\phi}\cos(\delta)\vec{z}'_1) - \dot{\lambda}\vec{y}'_2$$

$$\vec{V}_{(T,7/0)} = \vec{V}_{(P',7/0)} + \vec{\Omega}_{(7/0)} \wedge \vec{P}'T = (\lambda - h_2)(\dot{\delta}\vec{x}'_2 - \dot{\phi}\cos(\delta)\vec{z}'_1) - \dot{\lambda}\vec{y}'_2 + (\dot{\delta}\vec{z}'_1 + \dot{\phi}\vec{x}'_1 + \dot{\gamma}\vec{y}'_2) \wedge (\lambda - h_2)\vec{y}'_2$$

On en déduit : $\vec{V}_{(T,7/0)} = -\dot{\lambda}\vec{y}'_2$.

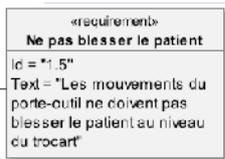
Q9 :

$$\vec{\Omega}_{(7/0)} = (\dot{\delta}\vec{z}'_1 + \dot{\phi}\vec{x}'_1 + \dot{\gamma}\vec{y}'_2) = (\dot{\delta}\vec{z}'_2 + \dot{\phi}(\cos(\delta)\vec{x}'_2 - \sin(\delta)\vec{y}'_2) + \dot{\gamma}\vec{y}'_2)$$

$$\{V_{7/0}\}_T = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\cos(\delta) & 0 \\ \dot{\gamma} - \dot{\phi}\sin(\delta) & -\dot{\lambda} \\ \dot{\delta} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2)}$$

La liaison équivalente 7'/0 est une liaison sphère / cylindre de centre T et de direction \vec{y}'_2 .

Q10 :



Q11 :

- On isole le corps de l'outil 7.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$T_{6' \rightarrow 7'} = \begin{pmatrix} X_{6'7'} & L_{6'7'} \\ 0 & 0 \\ Z_{6'7'} & N_{6'7'} \end{pmatrix}_{H', \vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2} ; \vec{F}_e = F_x\vec{x}'_2 + F_y\vec{y}'_2 \text{ appliquée en } P' ; -\vec{F} = -F\vec{y}'_2 \text{ appliquée en } Q'.$$

Théorème de la résultante dynamique suivant la direction \vec{y}'_2 : $F_y - F = \overline{D}_{7/0} \cdot \vec{y}'_2$.

- On isole l'ensemble {2, 8', câble l_0, l'_0 }.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$T_{2' \rightarrow 8'} = \begin{pmatrix} X_{2'8'} & 0 \\ Y_{2'8'} & M_{2'8'} \\ Z_{2'8'} & N_{2'7'8'} \end{pmatrix}_{L', \vec{x}'_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2} ; \vec{C}_{red} = C_{red}\vec{x}'_2 ; \vec{T}_0 \text{ en } l_0 \text{ et } \vec{T}'_0 \text{ en } l'_0.$$

Théorème du moment dynamique suivant la direction \vec{x}'_2 , en L' : $C_{red} + (T'_0 - T_0)r'_8 = \overline{\delta}_{L',7/0} \cdot \vec{x}'_2$.

Q12 :

$$\vec{V}_{(H',7/0)} = \vec{V}_{(T,7/0)} + \vec{\Omega}_{(7/0)} \wedge \vec{TH}' = -\dot{\lambda}\vec{y}'_2 + (\dot{\delta}\vec{z}'_1 + \dot{\gamma}\vec{y}'_2) \wedge (l_0 - \lambda + h_2)\vec{y}'_2$$

$$\vec{V}_{(H',7/0)} = -\dot{\lambda}\vec{y}'_2 - \dot{\delta}(l_0 - \lambda + h_2)\vec{x}'_2$$

$$\overline{D}_{7/0} \cdot \vec{y}'_2 = m_{7'} \vec{\Gamma}_{(H',7/0)} \cdot \vec{y}'_2 = -m_{7'} (\ddot{\lambda} + \dot{\delta}^2 (l_0 - \lambda + h_2))$$

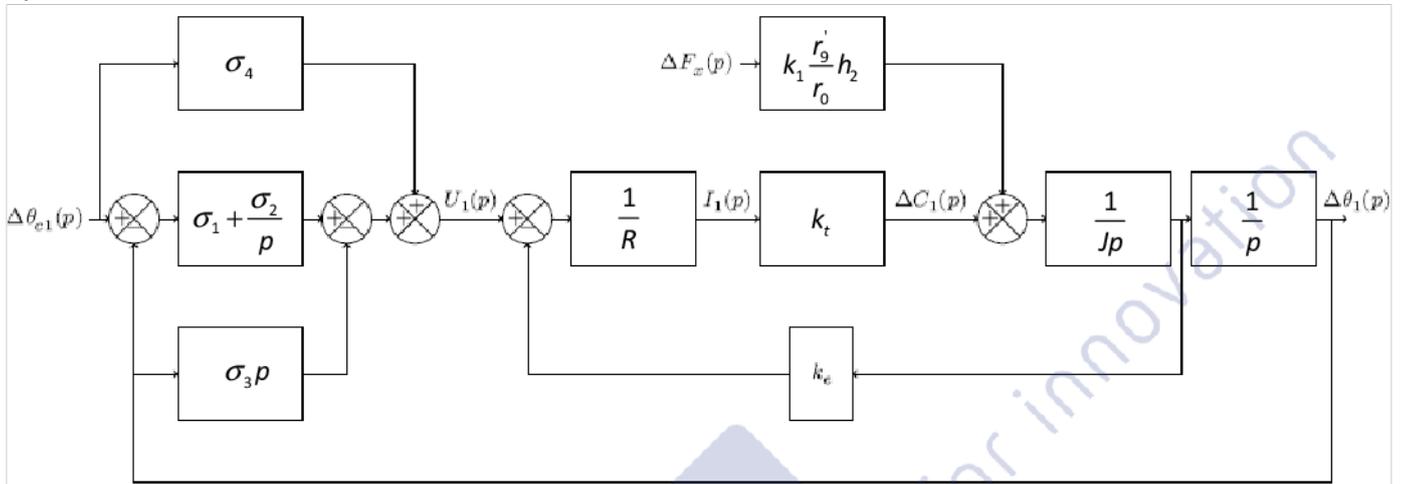
On en déduit : $F_y - F = -m_{7'} (\ddot{\lambda} + \dot{\delta}^2 (l_0 - \lambda + h_2))$.

On néglige le moment dynamique $\overline{\delta}_{L',7/0} = \vec{0}$ et donc $C_{red} + (T'_0 - T_0)r'_8 = 0$.

$$C_{m_2} = k_2 r_8' (T_0' - T_0) = k_2 r_8' F = k_2 r_8' \left[F_y + m_7 (\ddot{\lambda} + \delta^2 (l_0 - \lambda + h_2)) \right]$$

On donne alors $C_{m_2} = v_1 [F_y + m_7 (\ddot{\lambda} + v_2 \delta^2)]$ avec $v_1 = k_2 r_8'$ et $v_2 = l_0 - \lambda + h_2$.

Q13 :



Q14 :

$$H_{processus}(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{k_t / RJp}{1 + k_t k_e / RJp} = \frac{1}{p} \times \frac{1/k_e}{1 + \frac{RJ}{k_t k_e} p} = \frac{K}{(1 + \tau p)p}$$

$$K = 1/k_e \text{ et } \tau = \frac{RJ}{k_t k_e}$$

A.N. : $K = 19 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et $\tau = 14,9 \text{ ms}$

Q15 :

$$\Delta\theta_1(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)p} U_1(p)$$

$$U_1(p) = \frac{(1 + \tau p)p}{K} \Delta\theta_1(p) = [\Delta\theta_{c1}(p) - \Delta\theta_1(p)] \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} \right) - \Delta\theta_1(p) \sigma_3 p + \sigma_4 \Delta\theta_{c1}(p)$$

$$\left[\frac{(1 + \tau p)p}{K} + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p \right] \Delta\theta_1(p) = \left[\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} + \sigma_4 \right] \Delta\theta_{c1}(p)$$

$$B_f(p) = \frac{\Delta\theta_1(p)}{\Delta\theta_{c1}(p)} = \frac{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} + \sigma_4}{\frac{(1 + \tau p)p}{K} + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{p} + \sigma_3 p} = \frac{K [\sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_4)p]}{K\sigma_2 + K\sigma_1 p + (1 + K\sigma_3)p^2 + \tau p^3}$$

Sous forme canonique : $B_f(p) = \frac{1 + \frac{(\sigma_1 + \sigma_4)}{\sigma_2} p}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} p + \frac{(1 + K\sigma_3)}{K\sigma_2} p^2 + \frac{\tau}{K\sigma_2} p^3}$

Q16 :

$$B_f(p) = K' B'_f(p) = K' \frac{p - z_0}{(p - p_2)(p - p_1)^2}$$

Mais aussi : $B_f(p) = \frac{K(\sigma_1 + \sigma_4)}{\tau} \times \frac{\left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_4} + p \right]}{\frac{K\sigma_2}{\tau} + \frac{K\sigma_1}{\tau}p + \frac{(1+K\sigma_3)}{\tau}p^2 + p^3}$. On en déduit $K' = \frac{K(\sigma_1 + \sigma_4)}{\tau}$.

Q17 :

$$(p - p_2)(p - p_1)^2 = -p_2 p_1^2 + (2p_2 + p_1)p_1 p - (p_2 + 2p_1)p^2 + p^3 = \frac{K\sigma_2}{\tau} + \frac{K\sigma_1}{\tau}p + \frac{(1+K\sigma_3)}{\tau}p^2 + p^3$$

On identifie les différents termes en p^0 , p^1 et p^2 :

$$\begin{cases} -p_2 p_1^2 = \frac{K\sigma_2}{\tau} \\ (2p_2 + p_1)p_1 = \frac{K\sigma_1}{\tau} \\ -(p_2 + 2p_1) = \frac{(1+K\sigma_3)}{\tau} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \sigma_2 = -\frac{\tau p_2 p_1^2}{K} \\ \sigma_1 = \frac{\tau p_1 (2p_2 + p_1)}{K} \\ \sigma_3 = -\left[\frac{\tau (p_2 + 2p_1) + 1}{K} \right] \end{cases}$$

Q18 :

$$\begin{aligned} z_0 = p_2 &= -10 \text{ s}^{-1} \\ p_1 = -z\omega_0 &= -\frac{5}{tr_{5\%}} = -143 \text{ s}^{-1} \\ \sigma_1 &= 18,3 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \\ \sigma_2 &= 160 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1} \\ \sigma_3 &= 0,18 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1} \end{aligned}$$

Q19 :

Avec le pôle p_2 compensé, $B_f(p) = K' B'_f(p) = K' \frac{1}{(p - p_1)^2}$.

C'est un système du 2nd ordre. Le pôle p_1 est à partie réelle négative. Le système est donc stable.

Q20 :

«requirement» Ecart statique Id = "1.2.2.1" Text = "L'écart statique en réponse à un échelon doit être nul"
«requirement» Dépassements Id = "1.2.2.2" Text = "Aucun"
«requirement» Sensibilité à une perturbation en échelon Id = "1.1.1" Text = "L'écart en régime permanent dû à un échelon de perturbation collatère nul"

Le gain statique de la fonction de transfert $B_f(p)$ est égal à 1 (Q15). L'écart statique est donc nul. L'exigence est respectée.

Le facteur d'amortissement $z = 1$. Il n'y a donc pas de dépassements suite à une entrée de type échelon. L'exigence est respectée.

Il y a une intégration dans la chaîne d'action située avant la perturbation additive (correcteur P.I.D.). L'exigence est donc respectée.

Q21 :

L'énoncé nous indique que le couple moteur doit être inférieur à 10 % du couple maximal. On doit donc avoir une variation maximale de 11,3 mN.m.

La figure 11 nous montre des variations de couple moteur supérieures à 11,3 mN.m pour une tension de commande bruitée par le signal de mesure. Il est donc nécessaire de filtrer.

«requirements»
Variation de couple
Id = "1.6.1"
Text = "≤ 11,3 mN·m"

Q22 :

La constante de temps de la partie mécanique ($\tau = 14,9 \text{ ms}$) est bien plus grande que la période du signal bruité. La position angulaire $\Delta\theta_1(t)$ n'est donc pas impactée par le bruit de mesure.

Q23 :

La vitesse de rotation est nulle, on a donc $e_1 = 0 \text{ V}$.

On en déduit $\Delta C_1 = k_t \frac{u_1}{R}$ et donc $u_{1\text{max}} = \frac{R\Delta C_{1\text{max}}}{k_t}$.

A.N. : $u_{1\text{max}} = 0,45 \text{ V}$.

Q24 :

Équation différentielle d'un filtre du 1^{er} ordre : $s^f(t) + T_f \frac{ds^f(t)}{dt} = s(t)$

Forme discrète : $s_k^f + T_f \frac{s_k^f - s_{k-1}^f}{T_e} = s_k$

Schéma numérique : $s_k^f = \frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-1}^f + \frac{T_e}{T_e + T_f} s_k$

Q25 :

La période d'échantillonnage est relativement petite ($T_e = 0,1 \text{ ms}$). Pour un nombre d'échantillons suffisamment important (k grand), la variance est constante. On peut donc considérer que $\text{var}(s_k^f) \approx \text{var}(s_{k-1}^f)$.

Q26 :

$$\text{var}(s_k^f) = \text{var}\left(\frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-1}^f + \frac{T_e}{T_e + T_f} s_k\right) = \left(\frac{T_f}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_{k-1}^f) + \left(\frac{T_e}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_k) + 2 \text{cov}\left(\frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-1}^f, \frac{T_e}{T_e + T_f} s_k\right)$$

Schéma numérique : $s_{k-1}^f = \frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-2}^f + \frac{T_e}{T_e + T_f} s_{k-1}$

Les variables s_{k-1}^f et s_k sont donc indépendantes.

Il en est de même pour les variables $\frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-1}^f$ et $\frac{T_e}{T_e + T_f} s_k$.

On a donc $2 \text{cov}\left(\frac{T_f}{T_e + T_f} s_{k-1}^f, \frac{T_e}{T_e + T_f} s_k\right) = 0$.

On en déduit que $\text{var}(s_k^f) = \left(\frac{T_f}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_{k-1}^f) + \left(\frac{T_e}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_k)$.

De plus, $\text{var}(s_k^f) \approx \text{var}(s_{k-1}^f)$.

D'où $\text{var}(s_k^f) \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_e + T_f}\right)^2\right] = \left(\frac{T_e}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_k)$ et donc $\text{var}(s_k^f) \left[\frac{T_e^2 + 2T_e T_f}{(T_e + T_f)^2}\right] = \left(\frac{T_e}{T_e + T_f}\right)^2 \text{var}(s_k)$

Pour finir, $\text{var}(s_k^f) = \frac{T_e}{(T_e + 2T_f)} \text{var}(s_k)$.

Q27 :

$$T_f = T_e \frac{[\text{var}(s_k) - \text{var}(s_k^f)]}{2 \text{var}(s_k^f)}$$

On souhaite $\text{var}(u_{1k}) \leq 0,02$ et donc $\text{var}(s_k^f) \leq \frac{0,02}{n_0} = 3,16 \times 10^{-9}$.

On en déduit $T_f \geq T_e \frac{[\text{var}(s_k) - \frac{0,02}{n_0}]}{2 \times \frac{0,02}{n_0}}$

A.N. : $T_f \geq 10^{-4} \times \frac{[1,1 \times 10^{-7} - 3,16 \times 10^{-9}]}{2 \times 3,16 \times 10^{-9}} = 1,69 \text{ ms}$.

Q28 :

«requirements» Sensibilité à une perturbation impulsionnelle Id = "1.1.2" Text = "L'écart en régime permanent dû à une perturbation en impulsion doit être nul"	
«requirements» Ecart de traînage Id = "1.2.3" Text = "L'écart de traînage, en réponse à une rampe de pente 0,1 m/s, doit être inférieur à 1,2 mm suivant les deux directions (x et y)"	
«requirements» Temps de réponse à 9% Id = "1.4.1" Text = "0,5% < 40 ms"	«requirements» Rapidité du suivi Id = "1.4" Text = ""

La réponse impulsionnelle nous montre un tracé qui tend vers 0. L'exigence est donc validée.

L'écart de traînage est de plus de 1,5 mm d'après la simulation effectuée. Ce critère n'est donc pas validé.

Le temps de réponse pour la stabilisation de la vitesse semble être d'environ 25 ms sur la courbe donnant l'écart pour une rampe. Le critère est donc validé.