

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2015

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Dispositif Médical d'Injection

II - Modélisation de l'asservissement du volume injecté

II - 1 Actionneur thermique

Question 1.

L'actionneur peut être modélisé par un 1er ordre, de gain $K_h = \frac{60}{12} = 5 \text{ V/N}$ et de constante de temps $\tau_h = 2 \text{ ms}$ ($t_{5\%} = 3\tau_h = 6 \text{ ms}$ ou tangente à l'origine)

II - 2 Ecoulement dans le canal de l'aiguille

Question 2.

Les hypothèses pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli sont :

- Le fluide est incompressible et homogène.
- Il s'écoule en régime permanent.
- Il est parfait.

Dans ce cas, le théorème de Bernoulli d'écrit :

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = cte \quad (z : \text{hauteur})$$

Les pertes de charges correspondent à une perte de pression due aux frottements du fluide dans la canalisation.

Si le canal est horizontal ($z = cte$), et le fluide visqueux, alors :

$$\Delta \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = \Delta h \quad \text{avec } \Delta h \text{ pertes de charges en m}$$

Question 3.

Le nombre de Reynolds est défini par : $R_e = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\eta}$ avec :

V : vitesse caractéristique du fluide en m/s

L : dimension caractéristique (m), ici le diamètre du canal

ν : viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

ρ : masse volumique (kg/m^3), on supposera $\rho = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$

η : viscosité dynamique (Pa.s)

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{60 \pi (200 \cdot 10^{-6})^2} = 2,65 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{2,65 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{10^{-3}} = 530$$

Question 4.

Les pertes de charges sont : $\Delta h = \Lambda \frac{\Delta x \langle v^2 \rangle}{2R \cdot 2g}$

$\langle v^2 \rangle$: vitesse carrée moyenne de toutes les particules de fluide

Δx : en m/s, représente la longueur de la conduite

$$\text{AN : } \Delta h = \Lambda \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,65^2}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 2,9,81} = 89,7 \Lambda$$

Remarque : la valeur de Λ n'est pas fournie

Question 5.

Le débit est : $Q = S \cdot V = S \cdot \langle v \rangle = S \frac{P(0) - P(L)}{8 \eta L} R^2$

Question 6.

La relation précédente donne : $P(0) = \frac{8 \eta L Q}{S R^2} + P(L) = \frac{8 \eta L V}{R^2} + P(L)$

avec $P(L) = P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$

$$\text{Soit } P(0) = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,65}{10^{-8}} + 10^5 = 2,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

II -3 Membrane de la micropompe

Question 7.

Isolons le segment i. Bilan d'actions mécaniques :

$$\{\tau_{P \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{matrix} P\vec{y}_i \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{M_i}$$

$$\{\tau_{i-1 \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{matrix} x_i\vec{x}_0 + y_i\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_i} + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -k_t(\theta_i - \theta_{i-1})\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_i}$$

$$\{\tau_{i+1 \rightarrow i}\} = - \left\{ \begin{matrix} x_{i+1}\vec{x}_0 + y_{i+1}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_{i+1}} - \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -k_t(\theta_{i+1} - \theta_i)\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_{i+1}}$$

Le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ donne :

- $x_i - x_{i+1} - P \sin \theta_i = 0$
- $y_i - y_{i+1} + P \cos \theta_i = 0$

Le théorème du moment statique au point O_i en projection sur $\vec{z}_0$ donne :

$$k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + (\overrightarrow{O_i M_i} \wedge P\vec{y}_i) \cdot \vec{z}_0 - (\overrightarrow{O_i O_{i+1}} \wedge (x_{i+1}\vec{x}_0 + y_{i+1}\vec{y}_0)) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{O_i M_i} = \frac{L_0}{2} \vec{x}_i \text{ et } \overrightarrow{O_i O_{i+1}} = L_0 \vec{x}_i$$

Soit :

$$k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + P \frac{L_0}{2} + x_{i+1}L_0 \sin \theta_i - y_{i+1}L_0 \cos \theta_i = 0$$

Question 8.

Sachant que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ et $\cos \theta_i \approx 1$, on obtient les équations linéarisées :

- $x_i - x_{i+1} - P\theta_i = 0$
- $y_i - y_{i+1} + P = 0$
- $k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + P \frac{L_0}{2} + x_{i+1}L_0\theta_i - y_{i+1}L_0 = 0$

Question 9.

M=Augmente (H, G)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

La première itération correspond à i=0 (sous python) (et i=1 sous scilab)

i=0

p=Pivot (M, 0) #recherche du plus grand pivot

p=0 ,

p==i, il n'y a pas d'appel à Echligne

for j in range(1, 8) :

Elimine(M, 0, j)

Seule la ligne j=6 (a=-1) est modifiée (a=0 pour les autres lignes)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Question 10.

$$u_{\text{actionneur}} = L_0(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

$$\text{Soit } u_{\text{actionneur}} = 1,25 \cdot 10^{-3}(\sin 0,000916 + \sin 0,0000833) = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

L'actionneur se déplace de 1,25 μm

Question 11.

```

1 import numpy as np
2 def derivee2(y, dy):
3     ddy = (f - c*y - b*dy) / a
4     return ddy
5 def Euler_ordre2(dt, nbdt):
6     y = [0]
7     dy = [0]
8     for i in range(nbdt):
9         dy = dy + [dy[i] + dt * derivee2(y[i], dy[i])]
10        y = y + [y[i] + dt * dy[i]]
11    return y

```

Remarque: lignes 9 et 10, '+' est ici une concaténation

Il aurait mieux valu utiliser ici la méthode « append », qui rajoute un élément à dy, de complexité $O(1)$. La concaténation de liste implique à chaque valeur de i la création d'une nouvelle liste dy, elle est de complexité $O(n)$.

II -4 Commande de l'actionneur piézoélectrique**Question 12.**

```

1 def ACTIONNER(TMemb):
2     return TMemb <= 45

```

II -5 Débitmètre à fil chaud**Question 13.**

P_{th} : puissance thermique transférée du fil vers l'extérieur

Si le fil est plus chaud que l'extérieur, alors $P_{th} > 0$

Question 14.

Bilan d'enthalpie :

$$dH = R_w I^2 dt - P_{th} dt$$

Or $dH = c dT_w$

Soit : $c \frac{dT_w}{dt} = R_w I^2 - P_{th}$

Question 15.

La puissance thermique peut être transférée par : conduction, convection et par rayonnement.

Question 16.

La surface latérale est $A = \pi d l$

Si on néglige les effets de bord, $\vec{j}_q$ est radial, et dépend uniquement de θ

La puissance thermique est $P_{th} = \int \vec{j}_q \cdot d\vec{S} = \int j_q \cdot dS$

Si on suppose que $\vec{j}_q$ est uniforme en norme, $P_{th} = j_q \cdot A = \pi d l j_q$

Question 17.

$j_q = h(T_w - T_0)$: loi de Newton

h désigne le coefficient de transfert thermique et s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$

Question 18.

La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_q = -\lambda_f \overrightarrow{\text{grad}} T$ avec λ_f conductivité thermique, en $W.m^{-1}.K^{-1}$

Soit $[Nu] = \left[\frac{W}{m^2.K} \cdot m \cdot \frac{K.m}{W} \right]$, le nombre de Nusselt est bien sans dimension.

Question 19.

En régime permanent, $R_w I^2 = P_{th} = \pi d l j_q = \pi l d h (T_w - T_0)$ où $hd = Nu \lambda_f$

Soit $R_w I^2 = \pi l \lambda_f (T_w - T_0) Nu$

Question 20.

$$Nu = \frac{R_w I^2}{\pi l \lambda_f (T_w - T_0)} = \frac{0,25}{\pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 \cdot 200} = 19,9$$

Le transfert par convection est prédominant par rapport au transfert par conduction. ($N_u \gg 1$)

Question 21.

Le nombre de Reynolds est $R_e = \frac{\rho V d}{\eta}$

Donc $N_u = a + b\sqrt{R_e}$ augmente avec la vitesse V .

Question 22.

On a établi question 19 : $R_w I^2 = \pi l \lambda_f (T_w - T_0) N_u$

Or la résistance du fil est telle que $R_w - R_0 = R_0 \alpha (T_w - T_0)$

D'où $\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} N_u$ avec $N_u = a + b \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}}$

Soit $\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} \left(a + b \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}} \sqrt{V} \right) = a_1 + b_1 \sqrt{V}$

Avec $a_1 = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} a$ et $b_1 = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}} b$

Question 23.

$U_{CB} = \frac{R_1}{R_1 + R_x} E$; $U_{CD} = \frac{R_1}{R_1 + R_w} E$

$e = U_{CB} - U_{CD} = E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_x} - \frac{R_1}{R_1 + R_w} \right)$

$e = E \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{1+\beta} \right)$ avec $\delta = \frac{R_x}{R_1}$ et $\beta = \frac{R_w}{R_1}$

Le pont est équilibré si $e = 0$ soit si $R_x = R_w$

Question 24.

En supposant la constante $\alpha > 0$, R_w augmente avec la température T_w donc si on augmente R_x , on sélectionne une température de travail plus élevée.

Dans le cas d'un fluide médicamenteux, il vaut mieux choisir R_x de telle façon que la température n'excède pas 100°C pour éviter l'ébullition et/ou l'altération du produit.

Question 25.

$i_+ = i_- = 0$ (impédance d'entrée infinie)

Dans le cas d'un fonctionnement linéaire, $U_{DB} = 0$

Question 26.

Le circuit impose $U_{CA} = (R_1 + R_w)I = (R_1 + R_x)I'$ et $U = R_w I = R_x I'$

D'où $\frac{R_1 + R_w}{R_w} = \frac{R_1 + R_x}{R_x}$ soit $R_x = R_w$

Le circuit impose l'équilibre du pont soit $R_x = R_w$

Or R_w étant une fonction linéaire de la température, la température est maintenue constante.

Remarque : il semble qu'il y ait inversion dans les signes des entrées de l'ALI.

Si T augmente, R augmente, U augmente, donc $E_s = K(V_+ - V_-)$ augmente, donc I augmente, et la température aussi (Q14).....

Si on inverse les bornes + et -, si T augmente, U augmente, E_s diminue, donc I diminue, la puissance dissipée diminue, donc T diminue (boucle de rétroaction)

Question 27.

$E_s = U_{CA} = (R_1 + R_w)I$

$U = R_w I$

Soit $E_s = \frac{R_1 + R_w}{R_w} U$ soit $\gamma = \frac{R_1 + R_w}{R_w}$

$E_s^2 = \left(\frac{R_1 + R_w}{R_w} \right)^2 U^2$ avec $U = R_w I$ et $\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = a_1 + b_1 \sqrt{V}$

Soit $E_s^2 = (R_1 + R_w)^2 (a_1 + b_1 \sqrt{V}) \frac{R_w - R_0}{R_w}$ où $R_w = R_x$

$E_s^2 = A + B\sqrt{V}$

Question 28.

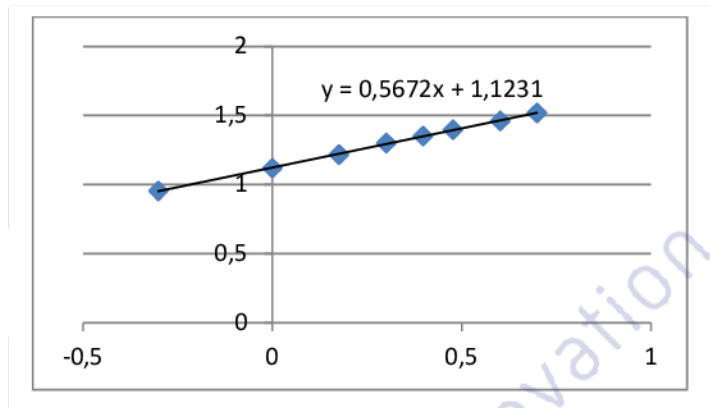
Si $V=0$, $E_s = 4,0$ soit $A = 16 V^2$

Question 29.

$$\log(E_S^2 - A) = \log B + n \cdot \log V$$

Pour trouver n (et B), on trace $\log(E_S^2 - A)$ en fonction de $\log V$

V	Es	log(V)	log(Es ² -A)
0	4		
0,5	5	-0,30	0,95
1	5,4	0,00	1,12
1,5	5,7	0,18	1,22
2	6	0,30	1,30
2,5	6,2	0,40	1,35
3	6,4	0,48	1,40
4	6,7	0,60	1,46
5	7	0,70	1,52



$$n = 0,57 \text{ et } B = 10^{1,1231} = 13,28$$

Question 30.

Le substrat doit être solide et isolant pour éviter une déperdition de chaleur.

On éliminera donc l'air et gardera leastique dont la capacité thermique volumique (= capacité thermique massique * masse volumique) et la conductivité thermique est la plus faible

Question 31.

$$\frac{Q(p)}{F_{th}(p)} = \frac{\frac{K_m p}{1 + \omega_0^2 p^2}}{1 + K_d \frac{K_m p}{1 + \omega_0^2 p^2}} = \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}$$

$$H(p) = \frac{V_{réel}(p)}{V_{cons}(p)} = K_{capt} \cdot \frac{K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_h p} \cdot \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}}{1 + \frac{K_{capt}}{p} \cdot K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_h p} \cdot \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}} \cdot \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{K_{capt} \cdot K_{corr} \cdot K_{th} \cdot K_m}{(1 + \tau_h p) \cdot (\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1) + K_{capt} \cdot K_{corr} \cdot K_{th} \cdot K_m}$$

Question 32.

Pour une entrée de type échelon, l'erreur statique n'est pas nulle : $\varepsilon_\infty = \frac{1}{1 + K_{bo}} =$

$$1 - K_{bf} = \frac{1}{1 + K_{corr} K_{th} K_m K_{cap}}$$

Question 33.

Les exigences sont : $t_{5\%} < 0,15s$ et une précision de 0,01ml

Ces 2 critères ne sont pas respectés.