

## Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2015

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

### A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : [corrigesconcours@upsti.fr](mailto:corrigesconcours@upsti.fr).

### Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : [www.upsti.fr](http://www.upsti.fr)

L'équipe UPSTI

# Système papillon motorisé pour moteur essence injection directe

## Banque PT SI A 2015

### corrigé

#### PARTIE 1

#### ANALYSE PARTIELLE DE LA GESTION DU COUPLE MOTEUR

##### Question 1/

STR lent : variables à évolution temporelle lente

STR rapide : variables à évolution temporelle rapide

##### Question 2/

- Moteur :
  - Attelage mobile :
    - Vilebrequin :
      - Capteur vitesse/position
  - Bloc moteur :
    - Capteur anticliquetis
    - Capteur de température
  - Culasse :
    - Système de distribution :
      - Capteur position avance variable
  - Collecteur échappement :
    - Capteur température échappement
- Périphérique moteur :
  - Alimentation carburant :
    - Capteur pression alimentation carburant
  - Suralimentation :
    - Capteur pression
  - Catalyseur :
    - Capteur taux oxygène

## PARTIE 2

# MODELISATION MECANIQUE DU BOITIER PAPILLON

### Question 3/

$$K_{red} = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\theta_s}{\theta_e}$$

Or

$$K_{red} = \frac{\omega_s}{\omega_i} \cdot \frac{\omega_i}{\omega_e} = \frac{Z_{22}}{Z_{32}} \cdot \frac{Z_{11}}{Z_{21}}$$

AN :

$$K_{red} = \frac{14}{57} \cdot \frac{10}{49} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \approx \frac{1}{20}$$

$$\boxed{K_{red} \approx \frac{1}{20}}$$

$$\theta_e = \frac{\theta_s}{K_{red}}$$

AN :

$$\theta_e = \frac{105}{\frac{1}{20}} \approx 2000^\circ$$

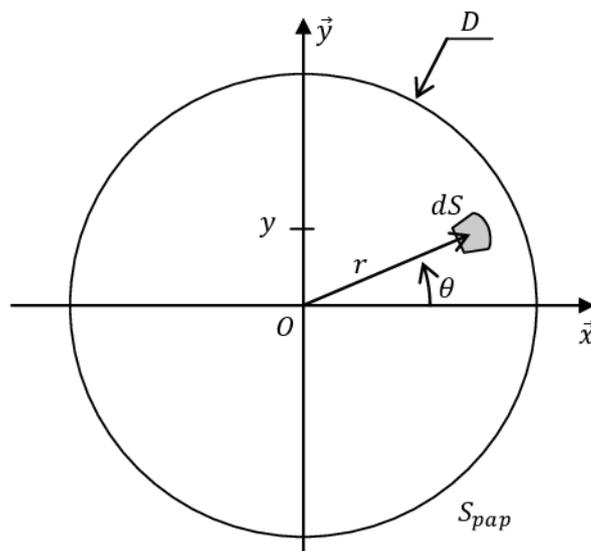
Pour avoir une rotation  $\theta_s = 105^\circ$  il faut une rotation du rotor du moteur de  $\boxed{\theta_e \approx 2000^\circ}$

### Question 4/

$$J_{pap} = \int_{S_{pap}} y^2 \cdot dm$$

$$\text{Avec : } dm = \rho_{vp} \cdot e_p \cdot dS$$

$$\text{En coordonnées polaires : } \begin{cases} dS = r \cdot dr \cdot d\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$



$$J_{pap} = \rho_{vp} \cdot e_p \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\frac{D}{2}} (r \cdot \sin\theta)^2 \cdot r \cdot dr \cdot r\theta$$

$$J_{pap} = \rho_{vp} \cdot e_p \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin^2\theta \cdot d\theta \int_{r=0}^{r=\frac{D}{2}} r^3 \cdot dr$$

$$J_{pap} = \rho_{vp} \cdot e_p \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4$$

$$\boxed{J_{pap} = \rho_{vp} \cdot e_p \cdot \pi \cdot \frac{D^4}{64}}$$

$J_{pap}$  est le moment d'inertie de la vanne-papillon par rapport à son axe de rotation,  $J_{pap}$  est le moment d'inertie de l'axe et du pignon 31 par rapport au même axe de rotation, donc le moment d'inertie total  $J_3$  par rapport à ce même axe est :

$$\boxed{J_3 = J_{pap} + J_{axe}}$$

### Question 5/

$$E_c = E_{c(1/Rg)} + E_{c(2/Rg)} + E_{c(3/Rg)}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_e^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_i^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_s^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_e^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot (K_{red1} \cdot \omega_e)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot (K_{red} \cdot \omega_e)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot [J_1 + J_2 \cdot K_{red1}^2 + J_3 \cdot K_{red}^2] \cdot \omega_e^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_e^2$$

$$\text{Avec } \boxed{J_{eq} = J_1 + J_2 \cdot K_{red1}^2 + J_3 \cdot K_{red}^2}$$

AN :

$$J_{eq} = 4 \cdot 10^{-6} + \underbrace{7,5 \cdot 10^{-9} \left(\frac{10}{49}\right)^2}_{< 4 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{8,4 \cdot 10^{-7} \left(\frac{10}{49} \cdot \frac{14}{57}\right)^2}_{< 4 \cdot 10^{-8}} \approx 4 \cdot 10^{-6}$$

On a donc :

$$\boxed{J_{eq} \approx J_1}$$

### Question 6/

Le couple de précharge appliqué par le ressort de rappel est proportionnel à l'angle de rotation de l'ensemble 3.

$$\Delta C_R = K_R \cdot \theta_s$$

AN :

$$\Delta C_R = 0,1 \times 2 = 0,2 N.m$$

Le couple de rappel est :  $C_R = 1,7 N.m$

$$\frac{\Delta C_R}{C_R} = \frac{0,2}{1,7} \approx 10\%$$

L'hypothèse « couple constant exercé par le ressort sur l'axe » est acceptable.

### Question 7/

TEP appliqué à l'ensemble  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

$$\left. \frac{dE_{c(\Sigma/\mathcal{R}_g)}}{dt} \right] = \mathcal{P}_{AME \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g} + \mathcal{P}_{AMI, \Sigma}$$

BAME	$\mathcal{P}_{AME \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_g}$
$0 \rightarrow 1$	= 0 liaison au bâti parfaite
$0 \rightarrow 2$	= 0 liaison au bâti parfaite
$0 \rightarrow 3$	= 0 liaison au bâti parfaite
$air \rightarrow 3$	= 0 action négligeable
$moteur \rightarrow 1$	$\neq 0$
$ressort \rightarrow 3$	$\neq 0$

BAMI	$\mathcal{P}_{AMI, \Sigma}$
$1 \leftrightarrow 2$	= 0 roulement sans glissement
$2 \leftrightarrow 3$	= 0 roulement sans glissement

Le couple exercé par le moteur est supposé constant on a :

$$\mathcal{P}_{moteur \rightarrow 1/\mathcal{R}_g} = C_m \cdot \omega_e$$

Le couple exercé par le ressort étant supposé constant on a :

$$\mathcal{P}_{ressort \rightarrow 3/\mathcal{R}_g} = -C_R \cdot \omega_s$$

Le TEP permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_e^2 \right) = C_m \cdot \omega_e - C_R \cdot \omega_s$$

$$J_{eq} \cdot \omega_e \cdot \dot{\omega}_e = C_m \cdot \omega_e - C_R \cdot K_{red} \cdot \omega_e$$

$$\boxed{J_{eq} \cdot \dot{\omega}_e = C_m - C_R \cdot K_{red}}$$

### Question 8/

D'après la relation précédente on a :  $\dot{\omega}_e = \frac{C_m - C_R \cdot K_{red}}{J_{eq}}$

Les couples  $C_m$  et  $C_R$  sont constants donc l'accélération angulaire  $\dot{\omega}_e$  est constante.

Or  $K_{red} = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\dot{\omega}_s}{\dot{\omega}_e}$  donc l'accélération angulaire  $\dot{\omega}_s$  est constante.

Par intégration on obtient :

$$\omega_s = \dot{\omega}_s \cdot t$$

$$\theta_s = \frac{\dot{\omega}_s}{2} \cdot t^2$$

Soit  $\theta_{s \text{ ouverture}}$  l'angle de rotation au bout du temps  $t_{ouverture}$ .

$$\dot{\omega}_s = \frac{2 \cdot \theta_{s \text{ ouverture}}}{t_{ouverture}^2}$$

Soit :

$$\dot{\omega}_e = \frac{2 \cdot \theta_{s \text{ ouverture}}}{K_{red} \cdot t_{ouverture}^2}$$

D'après la question précédente on a :

$$C_m = C_n = J_{eq} \cdot \dot{\omega}_e + C_R \cdot K_{red}$$

D'où :

$$\boxed{C_m = C_n = J_{eq} \cdot \frac{2 \cdot \theta_{s \text{ ouverture}}}{K_{red} \cdot t_{ouverture}^2} + C_R \cdot K_{red}}$$

### Question 9/

L'exigence de rapidité impose :  $t_{ouverture} < 200 \text{ms}$

AN :

$$C_m = 4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2 \times 2}{\frac{1}{20} \times 0,2^2} + 1,7 \times \frac{1}{20}$$

$$C_m \approx 4.10^{-6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{20} \times 0,1^2} + 1,7 \times \frac{1}{20} \approx 4.10^{-6} \times 0,2 + 1,7 \times \frac{1}{20} \approx 1,7 \times \frac{1}{20} \approx 0,1 N.m$$

Le couple nécessaire est  $C_m = 0,1 N.m$ , le couple nominal du moteur est :  $C_n = 0,21 N.m$

$$C_m \leq C_n$$

Le couple nominal est suffisant pour respecter l'exigence de rapidité.

### Question 10/

D'après Q7, en posant  $C_m = 0 N.m$  on obtient :

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_e = -C_R \cdot K_{red} \quad \text{or} \quad K_{red} = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\dot{\omega}_s}{\dot{\omega}_e}$$

$$J_{eq} \cdot \frac{\dot{\omega}_s}{K_{red}} = -C_R \cdot K_{red}$$

$$\dot{\omega}_s = -\frac{C_R \cdot K_{red}^2}{J_{eq}}$$

Par intégration avec comme condition initiale :  $\theta_s(0) = \theta_{s \max}$ , on obtient :

$$\theta_s = \frac{\dot{\omega}_s}{2} \cdot t^2 + \theta_{s \max}$$

Soit  $t_{retour}$  le temps nécessaire au retour du papillon,  $\theta_s(t_{retour}) = 0 rad$

Soit  $\Delta\theta = \theta_{s \max} - \theta_{s \text{ retour}} = 105^\circ \approx 2 rad$

$$t_{retour} = \sqrt{\frac{-2 \cdot \Delta\theta}{\dot{\omega}_s}}$$

$$t_{retour} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\theta \cdot J_{eq}}{C_R \cdot K_{red}^2}}$$

### Question 11/

AN :

$$t_{retour} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 4.10^{-6}}{1,7 \times \left(\frac{1}{20}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-6}}{17 \cdot 10^{-1}} \cdot 20^2} \approx \sqrt{10^{-5} \times 400} \approx \sqrt{40 \cdot 10^{-4}} \approx 6.10^{-2} s$$

$$t_{retour} \approx 6.10^{-2} s$$

Un temps de retour très faible aura pour conséquence un choc brutal avec le bâti, il est judicieux de réaliser une étude pour déterminer si l'énergie cinétique acquise à ce moment d'impact est supportable par le matériau.

### Question 12/

$$\left. \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \omega_s^2 \\ \omega_s = \dot{\omega}_s \cdot t_{\text{retour}} \\ t_{\text{retour}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\theta \cdot J_{eq}}{C_R \cdot K_{red}^2}} \\ \dot{\omega}_s = -\frac{C_R \cdot K_{red}^2}{J_{eq}} \end{array} \right\} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot \left( \frac{C_R \cdot K_{red}^2}{J_{eq}} \right)^2 \cdot \frac{2 \cdot \Delta\theta \cdot J_{eq}}{C_R \cdot K_{red}^2}$$

$$\text{D'où : } \boxed{E_c = \frac{1}{2} \cdot J_3 \cdot 2 \cdot \Delta\theta \cdot \frac{C_R \cdot K_{red}^2}{J_{eq}}}$$

AN :

$$E_c = \frac{1}{2} \times 8,4 \cdot 10^{-7} \times 2 \times 2 \times \frac{1,7 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2}{4 \cdot 10^{-6}}$$

$$E_c \approx 4 \cdot 10^{-7} \times \frac{1,7 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2}{10^{-6}} \approx 4 \cdot 10^{-1} \times 2 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 \approx 1 \cdot 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{-2} \approx 2 \cdot 10^{-3} J$$

$$\boxed{E_c \approx 2 \cdot 10^{-3} J}$$

Au moment de l'impact l'énergie cinétique du système est d'environ 2mJ.

L'énergie nécessaire à sa rupture est définie par  $E_{\text{rupture}} = E_{\text{rupture surfacique}} \cdot S_{\text{dent}}$ , soit :

$$E_{\text{rupture}} = E_{\text{rupture surfacique}} \cdot b \cdot m$$

AN :

$$E_{\text{rupture}} = 13 \cdot 10^3 \times 8 \cdot 10^{-3} \times 1 \cdot 10^{-3}$$

$$E_{\text{rupture}} \approx 100 \cdot 10^3 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \approx 100 \cdot 10^{-3} J$$

$$\boxed{E_{\text{rupture}} \approx 100 \cdot 10^{-3} J}$$

L'énergie cinétique au moment du choc est inférieure à l'énergie de rupture, Le matériau supporte l'impact.

### Question 13/

On suppose que la force normale et la force tangentielle ont même norme (angle de pression non précisé dans le sujet).

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= \frac{C_n}{R_{11}} = \frac{2 \cdot C_n}{D_{11}} \\ D_{11} &= m \cdot Z_{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{F_{12} = \frac{2 \cdot C_n}{m \cdot Z_{11}}}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{23} &= \frac{C_i}{R_{22}} = \frac{2 \cdot K_{red1} \cdot C_n}{D_{22}} \\ D_{22} &= m \cdot Z_{22} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{F_{23} = \frac{2 \cdot C_n}{K_{red1} \cdot m \cdot Z_{22}}}$$

AN :

$$F_{12} = \frac{2 \times 210}{1 \times 10} \approx 40N$$

$$F_{23} = \frac{2 \times 210}{\frac{10}{49} \times 1 \times 14} \approx \frac{400 \times 50}{140} \approx \frac{400}{3} \approx 130N$$

### Question 14/

D'après la relation donnée dans le sujet on a :  $\sigma_{adm} = \frac{5,5 \cdot F}{b \cdot m}$

Donc :

$$\boxed{\sigma_{adm1} = \frac{5,5 \cdot F_{12}}{b \cdot m}}$$

$$\boxed{\sigma_{adm2} = \frac{5,5 \cdot F_{23}}{b \cdot m}}$$

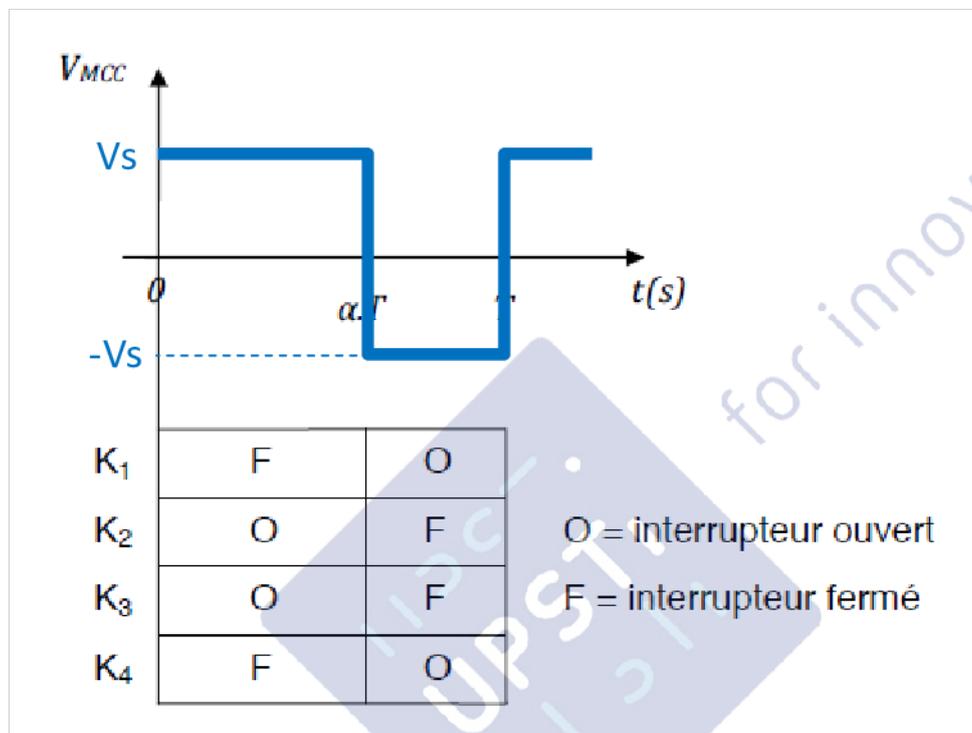
AN :

$$\sigma_{adm1} = \frac{5,5 \times 40}{8 \times 1} \approx 5,5 \times 5 \approx 30MPa$$

$$\sigma_{adm2} = \frac{5,5 \times 130}{8 \times 1} \approx \frac{5,5 \times 128}{8} \approx 5,5 \times 16 \approx 90MPa$$

La contrainte normale maximale admissible par le matériau est de 130MPa, la contrainte supportée reste inférieure à cette valeur donc le matériau est correctement choisi.

Question 15/



Question 16/

$K_1 = IN1.\overline{IN2}$

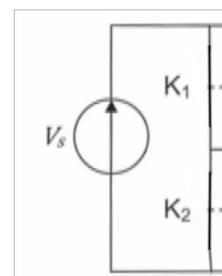
$K_2 = \overline{IN1}.IN2$

$K_3 = \overline{IN1}.IN2$

$K_4 = IN1.\overline{IN2}$

Question 17/

Si l'on ferme simultanément  $K_1$  et  $K_2$  on court-circuite le générateur qui est une source de tension. Le courant de court-circuit d'un générateur de tension parfait est infini.



**Question 18/**

$$V_{MCCavg} = \frac{1}{T} \int_0^T V_{MCC} \cdot dt$$

$$V_{MCCavg} = \frac{1}{T} \left( \int_0^{\alpha.T} V_{MCC} \cdot dt + \int_{\alpha.T}^T V_{MCC} \cdot dt \right)$$

$$V_{MCCavg} = \frac{1}{T} [\alpha.T.V_s + (T - \alpha.T).(-V_s)]$$

$$V_{MCCavg} = \alpha.V_s - (1 - \alpha).V_s$$

$$\boxed{V_{MCCavg} = (2.\alpha - 1).V_s}$$

**Question 19/**

On annule la constante dans l'expression précédente :

$$\boxed{V_{MCCavg}(t) = 2.V_s.\alpha(t)}$$

**Question 20/**

$$\boxed{\frac{V_{MCCavg}(p)}{\alpha(p)} = 2.V_s.e^{-\frac{T}{2}p}}$$

**Question 21/**

Pour l'évolution en courant on étudie la fonction suivante :  $F_1(p) = \frac{1}{R+L.p} = \frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{L}{R}.p} = \frac{K_1}{1+\tau_1.p}$

Avec  $\boxed{\tau_1 = \frac{L}{R}}$

Pour l'évolution en vitesse on étudie la fonction suivante :  $F_2(p) = \frac{1}{f+Jeq.p} = \frac{\frac{1}{f}}{1+\frac{Jeq}{f}.p} = \frac{K_2}{1+\tau_2.p}$

Avec  $\boxed{\tau_2 = \frac{Jeq}{f}}$

AN :

$$\tau_1 = \frac{0,9.10^{-3}}{1,3} \approx \frac{10^{-3}}{\frac{4}{3}} \approx 0,7.10^{-3} s$$

$$\tau_2 = \frac{4.10^{-6}}{0,5.10^{-3}} \approx 8.10^{-3} s$$

$$\boxed{\tau_1 \approx 0,7.10^{-3} s}$$

$$\boxed{\tau_2 \approx 8.10^{-3} s}$$

$\tau_1$  est très faible devant  $\tau_2$ , la variable vitesse  $\omega(t)$  évolue beaucoup moins rapidement que la variable courant  $i(t)$ .

### Question 22/

$$\frac{I(p)}{V_{MCCavg}(p)} = \frac{1}{R + L \cdot p} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + \frac{L}{R} \cdot p}$$

### Question 23/

$$V_{MCCavg}(t) = V_{MCCavg} \Rightarrow V_{MCCavg}(p) = \frac{V_{MCCavg}}{p}$$

Théorème de la valeur finale :

$$I_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot I(p)$$

$$I_{max} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot \frac{V_{MCCavg}}{p}$$

$$I_{max} = \frac{V_{MCCavg}}{R}$$

AN :

$$I_{max} = \frac{14,4}{1,3} \approx 11A$$

$$I_{max} \approx 11A$$

$I_{max} > I_n$ , il est nécessaire de limiter le courant en introduisant une boucle de courant.

### Question 24/

Développements limités usuels pour  $u$  proche de 0 :

$$\begin{cases} e^u \approx 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \\ \frac{1}{1+u} \approx 1 - u + u^2 - u^3 + \dots \end{cases}$$

Donc pour  $p$  proche de 0 on a :

$$e^{-T_r \cdot p} \approx 1 - T_r \cdot p + \frac{T_r^2 \cdot p^2}{2} - \frac{T_r^3 \cdot p^3}{6} + \dots$$

$$\frac{1}{1 + T_r \cdot p} \approx 1 - T_r \cdot p + T_r^2 \cdot p^2 - T_r^3 \cdot p^3 + \dots$$

$$\frac{1 - \frac{T_r}{2} \cdot p}{1 + \frac{T_r}{2} \cdot p} \approx \left(1 - \frac{T_r}{2} \cdot p\right) \left(1 - \frac{T_r}{2} \cdot p + \frac{T_r^2}{4} \cdot p^2 - \frac{T_r^3}{8} \cdot p^3 + \dots\right)$$

$$\frac{1 - \frac{T_r}{2} \cdot p}{1 + \frac{T_r}{2} \cdot p} \approx 1 - \frac{T_r}{2} \cdot p + \frac{T_r^2}{4} \cdot p^2 - \frac{T_r^3}{8} \cdot p^3 - \frac{T_r}{2} \cdot p + \frac{T_r^2}{4} \cdot p^2 - \frac{T_r^3}{8} \cdot p^3 + \dots$$

$$\frac{1 - \frac{T_r}{2} \cdot p}{1 + \frac{T_r}{2} \cdot p} \approx 1 - T_r \cdot p + \frac{T_r^2}{2} \cdot p^2 - \frac{T_r^3}{4} \cdot p^3 + \dots$$

L'approximation de Padé est la plus précise (identique jusqu'à l'ordre 2).

### Question 25/

$$T_r = 100 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

$$e^{-T_r \cdot p} \approx 1 \quad \text{si } \omega \leq \frac{1}{5 \cdot T_r} \quad \text{soit pour } \omega \leq 2000 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$e^{-T_r \cdot p} \approx \frac{1}{1 + T_r \cdot p} \quad \text{si } \omega \leq \frac{1}{2 \cdot T_r} \quad \text{soit pour } \omega \leq 5000 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$e^{-T_r \cdot p} \approx \frac{1 - \frac{T_r}{2} \cdot p}{1 + \frac{T_r}{2} \cdot p} \quad \text{si } \omega \leq \frac{2}{T_r} \quad \text{soit pour } \omega \leq 20000 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$\omega_{BFI} = 2000 \text{ rad} \cdot s^{-1}$  donc l'approximation  $e^{-T_r \cdot p} \approx 1$  est correcte.

### Question 26/

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = K_i \cdot K_{CAN} \cdot \frac{K_p \cdot K_{CNA} \cdot \frac{K_0}{1 + \tau_0 \cdot p}}{1 + K_p \cdot K_{CNA} \cdot \frac{K_0}{1 + \tau_0 \cdot p} \cdot K_i \cdot K_{CAN}}$$

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{K_i \cdot K_{CAN} \cdot K_p \cdot K_{CNA} \cdot K_0}{1 + \tau_0 \cdot p + K_p \cdot K_{CNA} \cdot K_0 \cdot K_i \cdot K_{CAN}}$$

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p + \tau_0 \cdot p}$$

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{\frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}}{1 + \frac{\tau_0}{1 + K_s \cdot K_p} \cdot p}$$

### Question 27/

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p + \tau_0 \cdot p}$$

Le système est stable si et seulement si les pôles de cette fonction de transfert (en boucle fermée) sont à parties réelles strictement négatives.

$$1 + K_s \cdot K_p + \tau_0 \cdot p = 0 \text{ pour } p = p_1 \text{ avec } p_1 = -\frac{1 + K_s \cdot K_p}{\tau_0}$$

$$Re(p_1) < 0 \Leftrightarrow 1 + K_s \cdot K_p > 0 \Leftrightarrow K_p > -\frac{1}{K_s}$$

Le système est stable si et seulement si  $K_p \in \left] -\frac{1}{K_s}, +\infty \right[$ .

### Question 28/

$$\text{D'après la question Q26 on a : } \frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{\frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}}{1 + \frac{\tau_0}{1 + K_s \cdot K_p} \cdot p}$$

Donc :

$$G_{SIC} = \frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}$$

### Question 29/

$$\text{D'après la question Q26 on a : } \frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{\frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}}{1 + \frac{\tau_0}{1 + K_s \cdot K_p} \cdot p}$$

La pulsation de coupure à -3dB d'une fonction du 1<sup>er</sup> ordre est :  $\omega_{c-3dB} = \frac{1}{\tau}$

On a donc :

$$\omega_{BFI} = \frac{1 + K_s \cdot K_p}{\tau_0}$$

$$\tau_0 \cdot \omega_{BFI} = 1 + K_s \cdot K_p$$

$$K_p = \frac{\tau_0 \cdot \omega_{BFI} - 1}{K_s}$$

AN :

$$K_p = \frac{0,7 \cdot 10^{-3} \times 2000 - 1}{0,5 \times 1 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 22}$$

$$K_p \approx \frac{1,4 - 1}{3 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{0,4}{3 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{4}{3} \cdot 10^2$$

$$K_p \approx 133$$

### Question 30/

$$\frac{I(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{G_{SIC}}{1 + \tau_F \cdot p}$$

Avec :  $G_{SIC} = \frac{K_S \cdot K_p}{1 + K_S \cdot K_p}$  et  $\tau_F = \frac{\tau_o}{1 + K_S \cdot K_p}$

La réponse  $i(t)$  à un échelon unitaire pour  $i_{ref}(t)$  est donc :

$$i(t) = G_{SIC} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_F}}\right)$$

### Question 31/

$$\frac{I(p)}{\alpha(p)} = \frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p} \Rightarrow \tau_o \cdot p \cdot I(p) + I(p) = K_o \cdot \alpha(p)$$

$$\Rightarrow p \cdot I(p) + \frac{1}{\tau_o} \cdot I(p) = \frac{K_o}{\tau_o} \cdot \alpha(p)$$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_o} \cdot i(t) = \frac{K_o}{\tau_o} \cdot \alpha(t)$$

$$a = \frac{1}{\tau_o}$$

$$b = \frac{K_o}{\tau_o}$$

### Question 32/

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_o} \cdot i(t) = \frac{K_o}{\tau_o} \cdot \alpha_k \text{ avec } i(0) = i_k$$

Solution générale de l'équation sans second membre :  $i(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}}$

Solution particulière de l'équation avec second membre :  $i(t) = K_o \cdot \alpha_k$

Solution générale de l'équation avec second membre :  $i(t) = \lambda \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k$

Condition initiale :  $i(0) = i_k \Rightarrow \lambda + K_o \cdot \alpha_k = i_k \Rightarrow \lambda = i_k - K_o \cdot \alpha_k$

On obtient alors :

$$i(t) = (i_k - K_o \cdot \alpha_k) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k$$

$$i(t) = \underbrace{i_k \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}}}_{\text{Régime libre}} + \underbrace{K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}\right)}_{\text{Régime forcé}}$$

### Question 33/

On pose  $t = k \cdot T_e$  dans la relation précédente :

$$i(k \cdot T_e) = i_k \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}}\right)$$

On pose  $t = (k + 1) \cdot T_e$  dans la relation précédente,  $\alpha_k$  constant sur  $[k \cdot T_e, (k + 1) \cdot T_e[$ :

$$i((k + 1) \cdot T_e) = i_k \cdot e^{-\frac{(k+1) \cdot T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{(k+1) \cdot T_e}{\tau_o}}\right)$$

On développe cette expression pour faire apparaître  $i(k \cdot T_e)$ .

$$i((k + 1) \cdot T_e) = i_k \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$i((k + 1) \cdot T_e) = i_k \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$i((k + 1) \cdot T_e) = i_k \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$i((k + 1) \cdot T_e) = \left[ i_k \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_o}}\right) \right] \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$i((k + 1) \cdot T_e) = i(k \cdot T_e) \cdot e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \alpha_k \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$i((k + 1) \cdot T_e) - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} \cdot i(k \cdot T_e) = K_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) \cdot \alpha_k$$

D'où :

$$f_o = -e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}$$

$$g_o = K_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

### Question 34/

$$i((k+1).T_e) + f_o \cdot i(k.T_e) = g_o \cdot \alpha_k$$

$$i((k+1).T_e) + f_o \cdot i(k.T_e) = g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot (K_i \cdot K_{CAN} \cdot i_{ref}(k.T_e) - K_{CAN} \cdot K_i \cdot i(k.T_e))$$

$$i((k+1).T_e) + \underbrace{[f_o + g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i]}_{f_F} \cdot i(k.T_e) = \underbrace{[g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_i \cdot K_{CAN}]}_{g_F} \cdot i_{ref}(k.T_e)$$

D'où :

$$\boxed{f_F = f_o + g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i}$$

$$\boxed{g_F = g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_i \cdot K_{CAN}}$$

### Question 35/

Détermination du régime permanent :

$$i((k+1).T_e) = i(k.T_e)$$

$$g_F \cdot i_{ref}(k.T_e) - f_F \cdot i(k.T_e) = i(k.T_e)$$

$$i(k.T_e) = \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot i_{ref}(k.T_e)$$

D'après la note (bas de la page 18 du sujet) on a :

$$i(k.T_e) = K \cdot (-f_F)^k + \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot i_{ref}(k.T_e)$$

Pour déterminer K on utilise la condition initiale :

$$i(0) = K \cdot (-f_F)^0 + \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot I_{désiré} = I_0$$

D'où :

$$K = I_0 - \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot I_{désiré}$$

On obtient alors la relation suivante :

$$\boxed{i(k.T_e) = \underbrace{\left[ I_0 - \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot I_{désiré} \right]}_{\text{Régime transitoire}} \cdot (-f_F)^k + \underbrace{\frac{g_F}{1 + f_F} \cdot i_{ref}(k.T_e)}_{\text{Régime permanent}}}$$

Le calcul par récurrence est donné dans le document « Démo pour la question 35.pdf »

### Question 36/

Condition nécessaire et suffisante de convergence :

$$\boxed{-1 < -f_F < 1}$$

### Question 37/

$$f_F = f_o + g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i$$

$$f_F = -e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i$$

$$f_F = -e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_s \cdot K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)$$

$$-1 < -f_F < 1 \Leftrightarrow -1 < -e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_s \cdot K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} < K_s \cdot K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) < 1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} < K_s \cdot K_p < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} \quad \text{car} \quad \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{K_s} < K_p < \frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}$$

Le domaine de stabilité est défini par :

$$\boxed{K_p > -\frac{1}{K_s}}$$

$$\boxed{K_p < \frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}}$$

### Question 38/

Stabilité pour un système continu (cf Q27) :  $K_p > -\frac{1}{K_s}$

Stabilité pour un système discret (cf Q37) :  $K_p > -\frac{1}{K_s}$  et  $K_p < \frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}$

$$\lim_{\frac{T_e}{\tau_o} \rightarrow 0} e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\frac{T_e}{\tau_o} \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} = +\infty$$

Pour  $\frac{T_e}{\tau_o}$  très petit (fréquence d'échantillonnage élevée) la condition de stabilité d'un système discret correspond à celle d'un système continu.

### Question 39/

AN :

D'après la courbe  $e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} = 0,9$  pour  $\frac{T_e}{\tau_o} = \frac{1}{10}$ .

$$K_s = K_i \cdot K_{CAN} \cdot K_{CNA} \cdot K_0$$

$$K_s = 0,5 \times 1 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 22 = 33 \cdot 10^{-4}$$

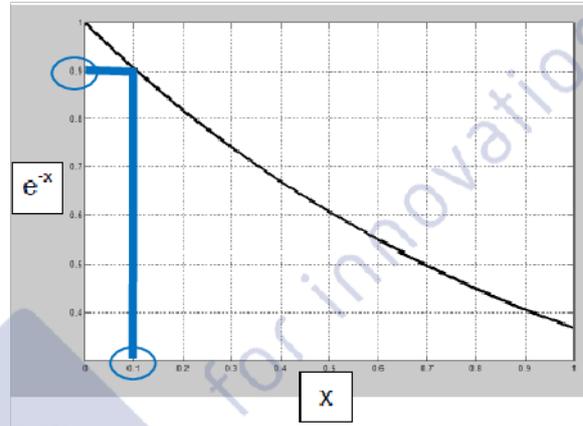
$$\frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} = \frac{1}{33 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1 + 0,9}{1 - 0,9}$$

$$\frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} \approx 300 \cdot \frac{1,9}{0,1}$$

$$\frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}} \approx 6000$$

Pour  $K_p = 120$  on a bien :  $-\frac{1}{K_s} < K_p < \frac{1}{K_s} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}}$

Le système avec commande numérique est stable.



### Question 40/

En régime stabilisé :

$$i((k+1) \cdot T_e) \equiv i(k \cdot T_e)$$

$$g_F \cdot i_{ref}(k \cdot T_e) - f_F \cdot i(k \cdot T_e) = i(k \cdot T_e)$$

$$i(k \cdot T_e) = \frac{g_F}{1 + f_F} \cdot i_{ref}(k \cdot T_e)$$

Donc

$$G_{SIN} = \frac{g_F}{1 + f_F}$$

En reprenant les résultats de Q33 et Q34 on obtient :

$$G_{SIN} = \frac{g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_i \cdot K_{CAN}}{1 + f_o + g_o \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i}$$

$$G_{SIN} = \frac{K_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_i \cdot K_{CAN}}{1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}} + K_o \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) \cdot K_{CNA} \cdot K_p \cdot K_{CAN} \cdot K_i}$$

$$G_{SIN} = \frac{K_s \cdot K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right) + K_s \cdot K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau_o}}\right)}$$

$$G_{SIN} = \frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}$$

Le gain du système continu et du système numérique sont égaux :  $G_{SIN} = G_{SIC}$

#### Question 41/

On transpose à la boucle fermée les résultats obtenus en boucle ouverte à la question Q33 :

$$f_F = -e^{-\frac{T_e}{\tau_F}}$$

On part de l'expression de la réponse en courant pour la commande numérique :

$$i(k.T_e) = -0,2837 \cdot (-f_F)^k + 0,2837$$

$$i(k.T_e) = -0,2837 \cdot e^{k \cdot \ln(-f_F)} + 0,2837$$

$$i(k.T_e) = -0,2837 \cdot e^{k \cdot \ln\left(e^{-\frac{T_e}{\tau_F}}\right)} + 0,2837$$

$$i(k.T_e) = -0,2837 \cdot e^{k \cdot \left(-\frac{T_e}{\tau_F}\right)} + 0,2837$$

$$i(k.T_e) = -0,2837 \cdot e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_F}} + 0,2837$$

$$i(k.T_e) = 0,2837 \cdot \left(1 - e^{-\frac{k \cdot T_e}{\tau_F}}\right)$$

En posant :  $k.T_e = t$

$$i(t) = 0,2837 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_F}}\right)$$

Les 2 équations donnent le même résultat pour chaque échantillon  $k$  à l'instant  $k.T_e$ .

### Question 42/

On souhaite avoir :  $T_e \leq \frac{\tau_{BF}}{4}$

Pour un système du 1<sup>er</sup> ordre la constante de temps est égal à l'inverse de la pulsation de

coupure à -3dB :  $\tau_{BF} = \frac{1}{\omega_{BFI}}$

Pour  $\omega_{BFI} = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  on a alors  $\frac{\tau_{BF}}{4} = \frac{1}{4 \cdot \omega_{BFI}} = \frac{1}{4 \times 2000} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-3} \approx 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

On a également  $\frac{T_e}{\tau_o} = \frac{1}{10}$  et  $\tau_o = 0,7 \text{ ms}$

Donc :  $T_e = \frac{\tau_o}{10} = 0,07 \text{ ms}$

$$\left. \begin{array}{l} T_e = 0,07 \text{ ms} \\ \frac{\tau_{BF}}{4} \approx 0,12 \cdot \text{ms} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{le critère } T_e \leq \frac{\tau_{BF}}{4} \text{ est vérifié.}$$

### Question 43/

Le gain du système est  $G_{SIN} = \frac{K_s \cdot K_p}{1 + K_s \cdot K_p}$  il ne peut pas être unitaire.

### Question 44/

$$K_{pot} = \frac{5}{105} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$K_{pot} = \frac{5}{105} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$K_{pot} = \frac{5}{5 \times 3 \times 7} \cdot \frac{60 \times 3}{\pi} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$K_{pot} = \frac{60}{7 \cdot \pi} \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1}$$

### Question 45/

$$K_{comp} = \frac{1}{K_{pot}}$$

### Question 46/

$$K_{per} = K_{red}$$

### Question 47/

Le temps de réponse souhaité est :  $\tau_{R5\%} = 200ms$ , c'est un système du 1<sup>er</sup> ordre donc la constante de temps de ce système est :  $\tau_{système} = \frac{\tau_{R5\%}}{3} \approx 63ms$

D'après la figure 17 :

$$\frac{C_{MCC}(p)}{I_{ref}(p)} = \frac{K_F}{1 + \tau_F \cdot p} \cdot K_t$$

Comme  $\tau_F \ll \tau_{système}$  on peut simplifier l'expression en posant :

$$\frac{C_{MCC}(p)}{I_{ref}(p)} = K_1 = K_F \cdot K_t$$

$$\boxed{K_1 = K_F \cdot K_t}$$

D'après la figure 17 :

$$\frac{\theta_{papillon}(p)}{C_{tot}(p)} = \frac{1}{f + J_{eq} \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot K_{red} = \frac{\frac{1}{f}}{1 + \frac{J_{eq}}{f} \cdot p} \cdot \frac{1}{p} \cdot K_{red}$$

Comme  $\frac{J_{eq}}{f} \ll \tau_{système}$  on peut simplifier l'expression en posant :

$$\frac{\theta_{papillon}(p)}{C_{tot}(p)} = \frac{K_2}{p} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{p} \cdot K_{red}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{K_{red}}{f}}$$

### Question 48/

$$FTBF_A(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{\theta_{désirée}(p)} = \frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot \frac{K_2}{p}}{1 + K_\theta \cdot K_1 \cdot \frac{K_2}{p}} = \frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}{p + K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}$$

$$\boxed{FTBF_A(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{\theta_{désirée}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p}}$$

$$FTBF_R(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{C_r(p)} = -K_{red} \cdot \frac{\frac{K_2}{p}}{1 + K_\theta \cdot K_1 \cdot \frac{K_2}{p}} = -\frac{K_{red} \cdot K_2}{p + K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}$$

$$FTBF_R(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{C_r(p)} = - \frac{\frac{K_{red}}{K_\theta \cdot K_1}}{1 + \frac{1}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p}$$

### Question 49/

Le gain de  $FTBF_A(p)$  est unitaire donc l'erreur statique en asservissement en réponse à l'échelon unitaire pour  $\theta_{désirée}(t)$  est nulle.

$$\varepsilon_A = 0$$

### Question 50/

L'erreur statique  $\varepsilon_R$  en régulation en réponse à l'échelon d'amplitude 1,7 N.m pour  $C_r(t)$  et une consigne nulle est donné par :

$$\varepsilon_R = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\theta_{désirée}(t) - \theta_{papillon}(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-\theta_{papillon}(t)]$$

Théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_R = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\theta_{papillon}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \cdot \theta_{papillon}(p)$$

$$\varepsilon_R = \lim_{p \rightarrow 0} -p \cdot FTBF_R(p) \cdot C_r(p)$$

$$\varepsilon_R = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot - \frac{-\frac{K_{red}}{K_\theta \cdot K_1}}{1 + \frac{1}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p} \cdot \frac{C_r}{p}$$

$$\varepsilon_R = \frac{K_{red}}{K_\theta \cdot K_1} \cdot C_r$$

AN :

$$\varepsilon_R = \frac{\frac{1}{20}}{1,5 \times (1 \times 0,1)} \times 1,7 \approx \frac{0,05}{0,15} \times 1,7 \approx \frac{1}{3} \times 1,7 \approx 0,6 \text{ rad}$$

$$\varepsilon_R = 0,6 \text{ rad}$$

### Question 51/

Le temps de réponse est bien inférieur à 200ms.

Il n'y a pas de dépassement (système du 1<sup>er</sup> ordre).

L'erreur statique est non nulle à une sollicitation de type échelon ( $\varepsilon_A = 0$  mais  $\varepsilon_R \neq 0$ ).

Le cahier des charges n'est pas vérifié.

### Question 52/

$$FTBF_A(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{\theta_{désirée}(p)} = \frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot (1 + T_i \cdot p)}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot (1 + T_i \cdot p) + T_i \cdot p^2}$$

$$FTBF_A(p) = \frac{\theta_{papillon}(p)}{\theta_{désirée}(p)} = \frac{1 + T_i \cdot p}{1 + T_i \cdot p + \frac{T_i}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p^2}$$

### Question 53/

Le dénominateur de  $FTBF_A(p)$  est un polynôme de degré 2.

$$1 + T_i \cdot p + \frac{T_i}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot p^2 = 1 + \frac{2 \cdot m}{\omega_n} \cdot p + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2$$

Avec :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}{T_i}} \text{ et } m = \frac{1}{2} \sqrt{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot T_i}$$

Pour avoir le système le plus rapide sans dépassement il faut avoir  $m = 1$ .

$$m = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot T_i} = 1$$

$$m = 1 \Leftrightarrow K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot T_i = 4$$

$$m = 1 \Leftrightarrow K_\theta \cdot T_i = \frac{4}{K_1 \cdot K_2}$$

Le temps de réponse à 5% de ce système est donné par l'abaque, pour  $m = 1$  on a

$$\omega_n \cdot t_{R5\%} = 5 \text{ soit } \omega_n = \frac{5}{t_{R5\%}}$$

$$\text{Or } \omega_n = \sqrt{\frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}{T_i}} \text{ donc}$$

$$\frac{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2}{T_i} = \left( \frac{5}{t_{R5\%}} \right)^2$$

$$K_\theta^2 = \frac{25}{t_{R5\%}^2} \cdot K_\theta \cdot T_i \cdot \frac{1}{K_1 \cdot K_2}$$

$$K_\theta^2 = \frac{25}{t_{R5\%}^2} \cdot \frac{4}{K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{1}{K_1 \cdot K_2}$$

$$K_\theta = \frac{10}{t_{R5\%} \cdot K_1 \cdot K_2}$$

En reprenant la relation  $K_\theta \cdot T_i = \frac{4}{K_1 \cdot K_2}$  on obtient :

$$T_i = \frac{4}{K_\theta \cdot K_1 \cdot K_2} = \frac{4}{\frac{10}{t_{R5\%} \cdot K_1 \cdot K_2} \cdot K_1 \cdot K_2} = \frac{2}{5} t_{R5\%}$$

$$T_i = \frac{2}{5} t_{R5\%}$$

AN :

$$T_i = \frac{2}{5} \times 200 \cdot 10^{-3} = 80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T_i = 80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$K_1 = 1 \times 0,1 = 0,1$$

$$K_2 = \frac{1}{20} \times \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 100$$

$$K_\theta = \frac{10}{200 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \times 100} = \frac{1}{200} 10^3$$

$$K_\theta = 5$$

#### Question 54/

Le résultat présente un dépassement, il ne répond pas au cahier des charges.

#### Question 55/

Pour avoir un système susceptible de répondre au cahier des charges on peut placer en amont du comparateur une fonction de transfert qui compense le zéro de la FTBF.

$$H_{ref}(p) = \frac{1}{1 + T_i \cdot p}$$

#### Question 56/

Le temps de réponse de 185ms est bien inférieur à 200ms.

Il n'y a pas de dépassement.

L'erreur statique est nulle à une sollicitation de type échelon.

Le cahier des charges est vérifié.

## Question 57/

$$C_{mot} = C_R \cdot K_{red}$$

$$C_{mot} = K_t \cdot I_{MCCm}$$

$$I_{MCCm} = \frac{C_R \cdot K_{red}}{K_t}$$

AN :

$$I_{MCCm} = \frac{1,7 \times \frac{1}{20}}{0,1}$$

$$I_{MCCm} = \frac{17}{20} \approx 0,8A$$

$$I_{MCCm} \approx 0,8A$$

## Question 58/

Erreur probable dans le sujet : diagramme stm annexe 6

Proposition de modification du sujet :

