

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2017

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

ROBOVOLC : un robot mobile pour l'exploration volcanique

1^{ère} partie : contexte et présentation du système

Q1.1 Dans la phase de conception de ROBOVOLC, une alternative à un système de locomotion à roues était un système volant. Donner deux inconvénients d'un tel système remettant en cause son utilisation dans l'environnement volcanique considéré.

Solution:

- Environnement de vol mal maîtrisé à cause des gaz et des températures élevées qui vont engendrer des variations de pression importantes
- Non-maîtrise de la masse totale du robot qui dépend des outils, et de la prise d'échantillons.

Q1.2. Citer un intérêt à mettre les batteries en position basse sur le système.

Solution:

La raison principale est de positionner le centre de gravité le plus proche possible du sol afin d'éviter le basculement du robot, en raison probable de la forte densité massique des batteries. Il s'agit donc d'un problème de stabilité.

Q1.3. Citer une phase de vie du système qui contraint sa taille maximale et son poids maximal.

Les attendus du sujet ne sont pas clairs ici. La notion de phase de vie est liée à l'expression des fonctions de service dans la réalisation du cahier des charges (diagramme des interacteurs) et elle n'est pas inscrite explicitement dans le programme actuel. Les cas d'utilisation sont par contre explicités en annexe dans le sujet.

Solution 1: Par exemple, la phase de vie de transport du robot ou la phase de déplacement qui impose une masse et un encombrement limités (masse pour l'autonomie et encombrement pour permettre le contournement d'obstacle ou le franchissement).

Solution 2 : En rapprochant la notion de phase de vie aux cas d'utilisation présentés dans le document, on peut proposer la phase de contournement d'obstacle.

2^{ème} partie : étude de la mobilité sur un sol plan

Q2.1. Montrer que les effets dynamiques peuvent ici être négligés.

Solution: En se plaçant dans un cas défavorable (les dimensions caractéristiques du système sont de l'ordre du mètre, la plus faible étant la hauteur $h=0.8\text{m}$) $l_c = 0.8 \text{ m}$.

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gl_c}} = \frac{0.5}{\sqrt{10 \times 0.8}} = \frac{0.5}{2\sqrt{2}} \approx 0.18$$

Donc, on peut considérer que les effets dynamiques ont bien une influence limitée sur le comportement du robot ROBOVOLC.

Q2.2. Exprimer la vitesse de rotation ω_r de chaque roue par rapport au châssis, ainsi que la vitesse de rotation ω_m du moteur correspondant. Faire l'application numérique pour une vitesse $v = 0,5$

Solution:

Le mouvement du robot ROBOVOLC est un mouvement de translation, donc tous les points du robot ont la même vitesse.

A partir de l'hypothèse de roulement sans glissement entre les roues et le sol, on a $\vec{V}_{P_i R_i / \text{sol}} = \vec{0}$.
On a alors par la formule de changement de point :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{P_i R_i / \text{sol}} &= \vec{V}_{O_i R_i / \text{sol}} + \overrightarrow{P_i O_i} \wedge \vec{\Omega}_{R_i / \text{sol}} \\ \vec{V}_{P_i R_i / \text{sol}} &= v \vec{x} + \left(\frac{D}{2} \vec{z} \right) \wedge \omega_r \vec{y} = \vec{0}\end{aligned}$$

On trouve alors : $v = \frac{D}{2} \cdot \omega_r$.

De plus, un réducteur de rapport r est placé entre le moteur et la roue et donc :

$$\omega_m = \frac{2}{Dr} \cdot v$$

L'application numérique donne $\omega_m = 787 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q2.3. Donner trois avantages et deux inconvénients d'un système à roues non directionnelles.

Solution:

Avantages :

- simplicité de conception du robot ROBOVOLC ;
- simplicité de la commande des roues ;
- réduction des coûts de fabrication ;
- fiabilité ;
- motricité élevée sans différentiel ;
- diminution de la masse du robot ;

— ...

Inconvénients :

- Usure des pneumatiques ;
- Trajectoire du robot mal maîtrisée si les 6 roues sont usées différemment ;
- Commande séparée de chaque moteur à réaliser.

Q2.4. Exprimer la vitesse $\vec{V}_{P_i S_c / S_0}$ du point P_i en fonction de ω_z, v_x, v_y et des données géométriques

Solution:

Le torseur cinématique du mouvement de S_c par rapport à S_0 étant défini, on peut écrire la relation de Varignon :

$$\vec{V}_{P_i S_c / S_0} = \vec{V}_{O_i S_c / S_0} + \overrightarrow{P_i O_i} \wedge \vec{\Omega}_{S_c / S_0}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{P_i S_c / S_0} &= v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + (-a_i \vec{x} - e_i \vec{y} + \frac{D}{2} \vec{z}) \wedge \omega_z \vec{z} \\ \vec{V}_{P_i S_c / S_0} &= (v_x - e_i \omega_z) \cdot \vec{x} + (v_y + a_i \omega_z) \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

Q2.5 Exprimer la vitesse $\vec{V}_{P_i S_c / S_0}$ du point P_i en fonction de la vitesse de glissement latéral, de la vitesse de rotation de la roue i et des données géométriques

Solution :

$$\vec{V}_{P_i S_c / S_0} = \vec{V}_{P_i S_c / S_i} + \vec{V}_{P_i S_i / S_0}$$

Avec
$$\vec{V}_{P_i S_c / S_i} = \vec{V}_{O_i S_c / S_i} + \vec{P_i O_i} \wedge \vec{\Omega}_{S_c / S_i} = \vec{0} + \left(\frac{D}{2} \vec{z}\right) \wedge -\omega_{ri} \vec{y} = \frac{D}{2} \omega_{ri} \vec{x}$$

Et $\vec{V}_{P_i S_i / S_0}$ porté uniquement par $\vec{y}$ car il n'y a pas de glissement longitudinal.

$$\vec{V}_{P_i S_c / S_0} = \frac{D}{2} \omega_{ri} \vec{x} + v_{gi} \vec{y}$$

Q2.6. En déduire la vitesse de glissement latéral v_{gi} et la vitesse de rotation ω_{ri} de chaque roue en fonction de ω_z , v_x , v_y et des données géométriques.

Solution:

À partir des 2 résultats obtenus aux questions 2.4 et 2.5, on trouve immédiatement :

$$v_{gi} = v_y + a_i \omega_z \quad \text{et} \quad \omega_{ri} = \frac{2}{D} (v_x - e_i \omega_z)$$

Q2.7. Pour un mouvement de rotation pure ($\omega_z > 0$) autour du point O , indiquer sur le document réponse DR1 :

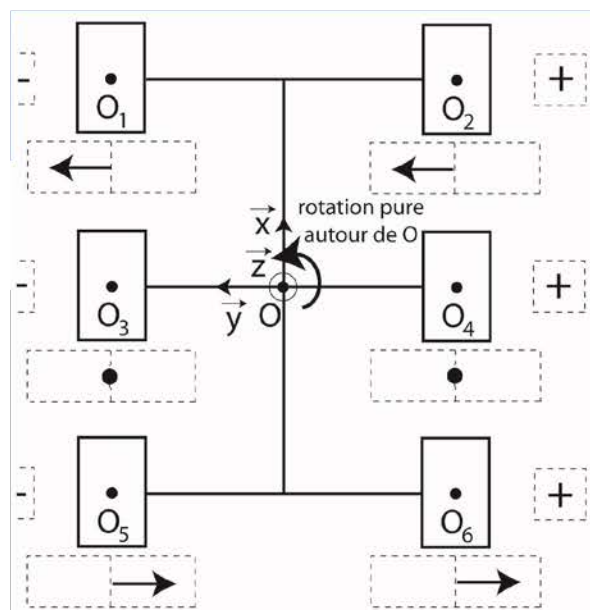
- le signe de la vitesse de rotation ω_{ri} de chaque roue ;
- le sens de la vitesse de glissement latéral v_{gi} .

Faire de même pour un mouvement de rotation pure autour du point O_f . On précisera le raisonnement et on remplira les cases en utilisant les notations introduites sur le document réponse.

Solution:

Pour un mouvement de rotation pure autour du point O , on a $v_x = v_y = 0$

Donc : $v_{gi} = a_i \omega_z$ et $\omega_{ri} = -\frac{2}{D} e_i \omega_z$

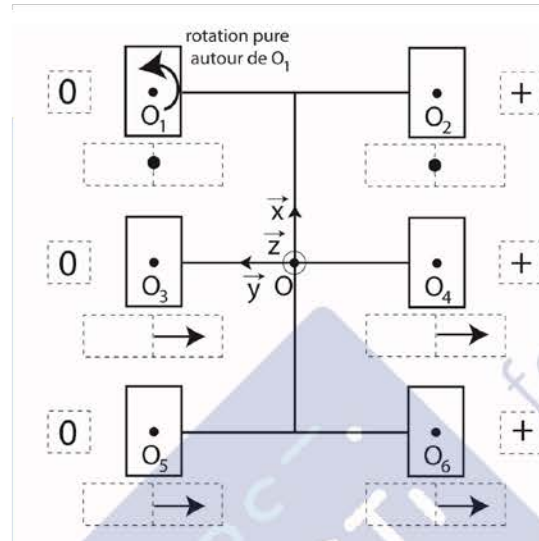


Pour un mouvement de rotation pure autour de O_1 :

Pour le raisonnement :

- on utilise le champ des vecteurs vitesse ;
- O_1 est le centre de rotation ;
- Les vecteurs vitesse des différents points O_i sont perpendiculaires aux vecteurs $\overrightarrow{O_1 O_i}$ pour i allant de 2 à 6

On déduit du tracé le sens de ω_{ri} et de v_{gi}



Q2.8. Donner une conséquence du glissement latéral sur les roues et proposer une solution technologique pour prendre en compte cette conséquence.

Solution:

Cela va provoquer de l'usure sur les pneumatiques des roues. On pourrait prendre des roues holonomes, mais ce serait beaucoup plus cher. Pour limiter l'effet sur les pneus, on peut aussi proposer d'accomoder une déformation importante au contact par l'intermédiaire de picots par exemple.

Q2.9. Citer deux composants permettant de réaliser la fonction Kc en précisant les avantages/inconvénients et le type de signal (analogique ou numérique) en entrée/sortie de chacun. Indiquer la technologie la plus probablement retenue ici.

Solution:

On peut utiliser une génératrice tachymétrique (machine à courant continu fonctionnant en générateur) ou un codeur incrémental associé à une électronique de traitement (convertisseur fréquence-tension).

L'entrée de ces 2 propositions est une vitesse angulaire de rotation.

La sortie de la génératrice tachymétrique est une tension électrique analogique. La sortie du codeur incrémental est un signal numérique, qui après son traitement par l'électronique, délivrera une tension analogique.

La technologie probablement utilisée sur le robot ROBOVOLC est une génératrice tachymétrique. Afin de mieux résister à l'environnement hostile (poussières, températures élevées).

Q2.10. Donner la valeur numérique de $U(t)$ à appliquer pour obtenir une valeur nulle en sortie du CNA. À quelle consigne correspond la valeur hexadécimal $U(t) = A000$?

Solution: Pour obtenir une tension nulle en sortie du CNA il faut se placer à la moitié de la pleine échelle, soit 32 768 en décimal (moitié de $16 \times 16 \times 16 \times 16$), soit 8000 en hexadécimal.

Pour $U(t) = A000$ en hexadécimal, soit en décimal 40 960, la consigne est de $\frac{40960-32768}{65536} \times 20 = 2.5V$

Q2.11. Calculer la résolution en mV du CAN.

Solution:

On suppose que l'étendue de mesure correspond à la variation maximale de la tension délivrée par la dynamo-tachymétrique, soit 1.22 V, ce qui semble une plage de variation faible.

La résolution est donc de : $\frac{1.22}{2^{12}} \approx 298 \mu V$

Q2.12. Donner les deux hypothèses principales qu'il faut faire pour pouvoir utiliser un modèle de système linéaire continu invariant.

Remarque : on interprétera la question comme étant appliquée dans le contexte particulier du Robovolc

Solution: Il faut faire l'hypothèse que la période d'échantillonnage soit faible vis-à-vis de la rapidité de la grandeur à asservir (pour la validité du modèle système continu). De plus, il faut faire l'hypothèse que le pas de quantification est très faible par rapport à l'étendue de mesure de la grandeur à asservir (pour la validité du modèle linéaire).

On peut également citer ici l'hypothèse que le système ne travaille pas en zone de saturation et qu'il n'y ait pas de seuils (frottement sec).

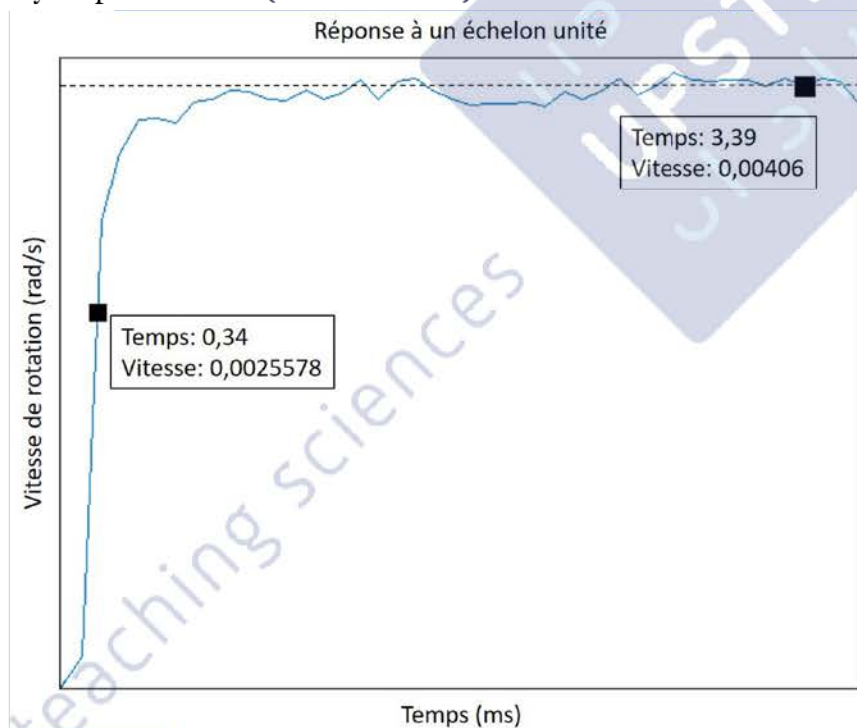


Figure 8 : courbe de réponse du moteur pour un échelon unité

Q2.13. Exprimer par un modèle du premier ordre sous forme canonique la fonction de transfert $H_{\text{moteur}}(p)$ du moteur, et identifier ses paramètres.

Solution:

$$H_{\text{moteur}}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p} = \frac{0,00406}{1 + 0,34p}$$

Q2.14. Calculer la fonction de transfert

Solution:

On obtient directement la fonction de transfert demandée en appliquant par exemple la formule de Black :

$$\frac{\Omega_{\text{roue}}(p)}{\Omega_c(p)} = K_{\text{red}} \frac{K_v \frac{K_m}{1 + \tau_m p}}{1 + K_v K_c \frac{K_m}{1 + \tau_m p}} = \frac{K_{\text{red}} K_v K_m}{1 + K_v K_m K_c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K_v K_m K_c} p}$$

Comme $K_c = 1$

$$\frac{\Omega_{\text{roue}}(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_{\text{red}} K_v K_m}{1 + K_v K_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K_v K_m} p}$$

Q2.15. Exprimer les conditions pour avoir des valeurs d'erreur statique en position et en vitesse inférieures à 1%. Proposer un moyen d'obtenir des valeurs nulles pour ces erreurs statiques.

Solution:

Je pense qu'il manque un bloc adaptateur de gain $1/K_{\text{red}}$ en amont du soustracteur. La suite est menée avec l'hypothèse de la présence de ce bloc adaptateur.

Dans ce cas, la fonction de transfert en boucle fermée vaut :

$$\frac{\Omega_{\text{roue}}(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_v K_m}{1 + K_v K_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K_v K_m} p}$$

On suppose le système stable (vérifié car τ_m , K_m et K_v positifs). On peut donc appliquer le théorème de la valeur finale.

On demande ici une erreur en position et en vitesse... sur un asservissement de vitesse. On comprend qu'il s'agit de caractériser l'erreur pour un échelon puis une rampe de vitesse mais le vocabulaire utilisé est déstabilisant je trouve.

Calcul de l'erreur statique en position ε_p pour entrée échelon d'amplitude Ω_{c0} :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + K_v K_m} \cdot \Omega_{c0}$$

Calcul de l'erreur en vitesse ε_v pour entrée rampe de pente Ω_{c0} :

$$\varepsilon_v = +\infty$$

Donc seule la condition sur l'erreur statique (en position) est atteignable. Pour que le cahier des charges relatif à l'erreur statique soit vérifié, il faut que $K_m K_v > 99$, soit :

$$K_v > 24\,384$$

Une solution pour avoir les erreurs demandées nulles est de remplacer le correcteur $C_v(p)$ (actuellement un gain pur K_v) par un double correcteur proportionnel intégral, ce qui aura pour conséquence d'augmenter la classe de la FTBO à 2, et donc d'annuler à la fois les erreurs statiques en position et en vitesse vis-à-vis de la consigne. Cependant, il faudrait s'assurer de la stabilité du système ainsi corrigé. Et ici aucune chance de le rendre stable car la marge de phase (de la boucle ouverte) serait strictement négative (à cause de la phase des 2 intégrateurs). Il faudrait rajouter en sus du double intégrateur un correcteur à avance de phase pour régler la stabilité.

Q2.16. Expliquer qualitativement en quoi conserver la position du CIR dans la zone d'empattement du châssis favorise le contrôle.

Solution: Si le CIR est dans la zone d'empattement, cela permettra de limiter le glissement latéral, et donc l'usure des pneumatiques.

Dans le cas d'un mouvement de translation, on a $\dot{\theta}=0$, donc le CIR est rejeté à l'infini. Résultat logique car un mouvement de translation peut être vu comme un mouvement de rotation avec un rayon de courbure infini.

Q2.17. Exprimer les composantes (v_x^0, v_y^0) de la vitesse $\vec{V}_{O, S_c/S_o}$ dans le repère fixe en fonction de celles (v_x, v_y) dans le repère local lié au châssis. En déduire le lien entre les composantes d'accélération $(\dot{v}_x^0, \dot{v}_y^0)$ et $(\dot{v}_x, \dot{v}_y)$. On pourra introduire les notations $\gamma_x = \dot{v}_x - v_y \dot{\theta}$ et $\gamma_y = \dot{v}_y + v_x \dot{\theta}$

Solution :

Par projection des composantes de vitesse de la base $(\vec{x}, \vec{y})$ dans la base $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0)$, on obtient les relations :

$$\begin{aligned} v_x^0 &= v_x \cos \theta - v_y \sin \theta \\ v_y^0 &= v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{aligned}$$

Par dérivation temporelle et en utilisant les notations imposées dans le sujet, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{v}_x^0 &= \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta \\ \dot{v}_y^0 &= \gamma_x \sin \theta + \gamma_y \cos \theta \end{aligned}$$

Q2.18. Exprimer les coordonnées $(x_I(t), y_I(t))$ du CIR dans le repère local $(0, \vec{x}, \vec{y})$ en fonction de v_x, v_y et $\dot{\theta}$

Solution :

On sait que $\vec{V}_{I(t), S_c/S_o} = \vec{0}$ par définition du CIR. Or, on connaît $\vec{V}_{O, S_c/S_o}$ donc, à l'aide du champ des vecteurs vitesse dans le mouvement considéré, on obtient :

$$\vec{V}_{I(t), S_c/S_o} = \vec{0} = \vec{V}_{O, S_c/S_o} + \vec{I}(t) \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}$$

Donc, on trouve :

$$\begin{aligned} x_I(t) &= -\frac{v_y^0}{\dot{\theta}} \\ y_I(t) &= \frac{v_x^0}{\dot{\theta}} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un mouvement de translation, on a $\dot{\theta} = 0$, donc le CIR est rejeté à l'infini.

Q2.19. Énoncer précisément l'origine de ce modèle, et donner la signification des termes $m_0, F_{xi}, F_{yi}, R_{xi}, M_r$ et I_0 .

Solution:

Ces équations sont issues du

- Théorème de la résultante dynamique appliqué au ROBOVOLC en projection sur $\vec{X}_0$;
- Théorème de la résultante dynamique appliqué au ROBOVOLC en projection sur $\vec{Y}_0$;
- Théorème du moment dynamique appliqué au ROBOVOLC au point O en projection sur Z_0 ;

Identification des grandeurs du modèle :

m_0 représente la masse totale du ROBOVOLC ;

F_{xi} représente les actions liées aux couples fournis par le moteur i ;

F_{yi} représente les composantes tangentielles (portées par $\vec{Y}_0$) des actions du sol sur la roue i ;

R_{xi} représente les composantes tangentielles (portées par $\vec{X}_0$) des actions du sol sur la roue i ;

M_r représente le moment des actions mécaniques extérieures dues aux contacts entre les roues et le sol agissant sur le ROBOVOLC ;

I_0 représente le moment d'inertie équivalent du ROBOVOLC en O autour de $\vec{Z}_0$.

Remarque : le candidat devait postuler la signification de chacun des termes de l'équation (en plus d'identifier l'origine de chacune des équations). Dans ce contexte, la notation proche pour les actions motrices F_{xi} et les actions résistantes liées aux frottements F_{xi} était je trouve assez perturbante.

Q2.20. Expliquer la modélisation qui permet d'écrire les équations 1 et 2.

Solution :

Il s'agit de la loi de coulomb dans un espace 3D. μ est le coefficient de frottement longitudinal (dans la direction $\vec{x}$ et f_r le coefficient de frottement latéral (dans la direction $\vec{y}$).

Q2.21. Montrer que le modèle dynamique global de la plateforme se met alors sous forme matricielle $M\ddot{q} + \vec{C}(\dot{q}, \dot{q}) = \vec{E}(\dot{q}, \{\tau_i\})$

Solution :

On récrit le modèle dynamique en remplaçant cette fois-ci γ_x et γ_y par les projections dans la base O .

$$m_0(\ddot{X}_0 \cos \theta + \ddot{Y}_0 \sin \theta) = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{2\tau_i}{D} - f_r \cdot F_{zi} \cdot \text{signe}(v_{xi}) \right)$$

$$m_0(-\ddot{X}_0 \sin \theta + \ddot{Y}_0 \cos \theta) = - \sum_{i=1}^6 \mu \cdot F_{zi} \cdot \text{signe}(v_{yi})$$

$$I_0 \cdot \ddot{\theta} = \frac{e^2}{D} (\tau_2 + \tau_4 + \tau_6 - \tau_1 - \tau_3 - \tau_5) - M_r(\{F_{yi}\}, \{R_{xi}\})$$

On peut écrire ce système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_0 \cos \theta & m_0 \sin \theta & 0 \\ -m_0 \sin \theta & m_0 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_0 \\ \ddot{Y}_0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 f_r \cdot F_{zi} \cdot \text{signe}(v_x - e_i \dot{\theta}_i) \\ - \sum_{i=1}^6 \mu \cdot F_{zi} \cdot \text{signe}(v_y + a_i \dot{\theta}_i) \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{2\tau_i}{D} \\ 0 \\ \frac{e^2}{D} (\tau_2 + \tau_4 + \tau_6 - \tau_1 - \tau_3 - \tau_5) \end{bmatrix}$$

Q2.22

Solution:

Pour contrôler les mouvements, les coordonnées du CIR doivent vérifier $-a < x_I(t) < a$

Comme v_y et $\dot{\theta}$ sont supérieurs à 0 et $x_I(t) = \frac{-v_y}{\dot{\theta}}$ on obtient $\frac{v_y}{\dot{\theta}} < a$

En remplaçant par la projection de v_y par la projection de v_y dans le repère global, on obtient les relations suivantes :

$$(-\dot{X}_0 \sin \theta + \dot{Y}_0 \cos \theta) \dot{\theta} < a \dot{\theta}$$

soit

$$(-\dot{X}_0 \sin \theta + \dot{Y}_0 \cos \theta) \dot{\theta} - a \dot{\theta} < 0$$

$$\text{Et donc : } \vec{A}(\vec{q}) = \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -a \end{vmatrix}_{R_0}$$

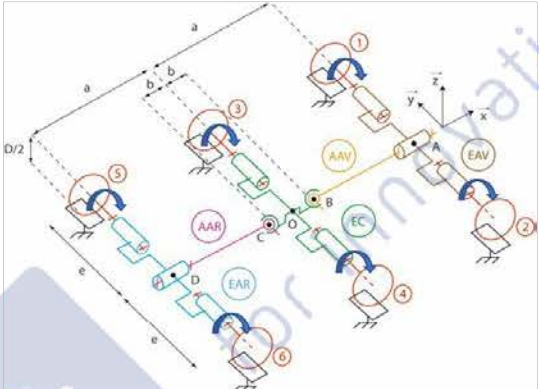
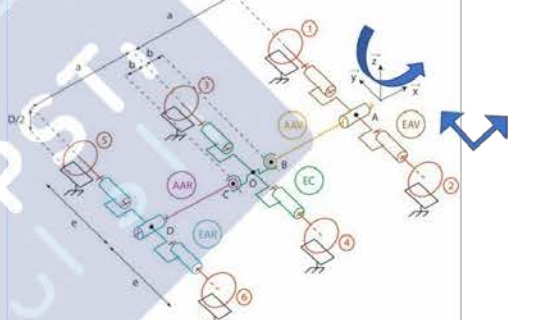
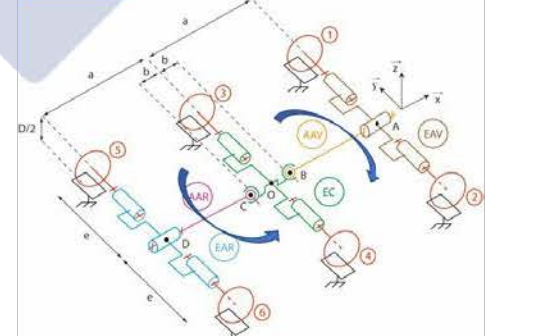
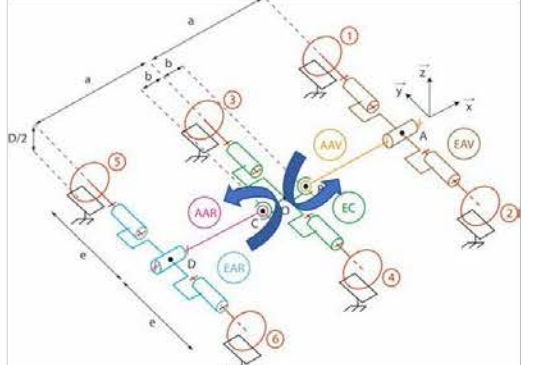
Quant à conclure sur la mise en place du contrôleur, je sèche encore, sinon que la mise en place du contrôleur semble imposer des conditions sur les vitesses et la position du robot dans le repère global, ce qui ne semble pas aisé.

Troisième partie

Étude du comportement sur terrain accidenté

Q3.1. Déterminer le nombre de mobilités du modèle de la plateforme.

Solution:

6 pivots de roues ; 6 mobilités liées à la rotation des roues par rapport à leur axe	
Liaison appui plan de l'ensemble par rapport au sol et donc 2 translations et une rotation de l'ensemble par rapport au sol ; 3 mobilités	
Rotations en R_z des ensembles AAV ou AAR par rapport à EC 2 mobilités	
Rotations simultanées de AAR et AAV par rapport à EC en R_y. (Une seule mobilité)	

$$m = 12$$

Q3.2. Montrer que le modèle est isostatique. Conclure quant à la capacité du châssis à maintenir les roues au contact du sol en toute circonstance.

On peut utiliser ici directement les formules de calcul du degré d'hyperstatisme.

En calculant à partir des relations cinématiques :

- Nombre cyclomatique $\mu = 16 - 12 + 1 = 5$
- Nombre de mobilités $m = 12$
- Inconnues cinématiques $I_c = 6 * 5 + 2 * 2 + 8 * 1 = 42$

Le degré d'hyperstatisme est donc égal à :

$$h = 12 + 30 - 42 = 0$$

Le système est isostatique

En calculant à partir des inconnues de statique :

- Nombre de pièces $p = 12$
- Nombre de mobilités $m = 12$
- Inconnues cinématiques $I_s = 6 * 1 + 2 * 4 + 8 * 5 = 54$

Le degré d'hyperstatisme est donc égal à :

$$h = 12 - 66 + 54 = 0$$

Le système est isostatique

Q3.3. Proposer un modèle de liaison parfaite pour le contact roue-sol qui permet de tenir compte, dans une étude de statique sans glissement, du frottement longitudinal et transversal. Peut-on calculer toutes les inconnues statiques de liaison dans ce cas ?

Solution:

La liaison parfaite qui permet de tenir en compte dans une étude de statique sans glissement à la fois des efforts normaux, du frottement longitudinal et du frottement transversal est une liaison rotule. Il faudrait alors modéliser les 6 contacts entre les roues et le sol par des liaisons rotule pour résoudre.

Dans ce cas, le degré d'hyperstatisme est modifié :

12 inconnues de liaison sont supprimées, mais seule une mobilité (rotations simultanées autour de AAC et AAV autour de EC) subsiste. Le système est hyperstatique de degré 1 et toutes les inconnues de statique ne peuvent être déterminées.

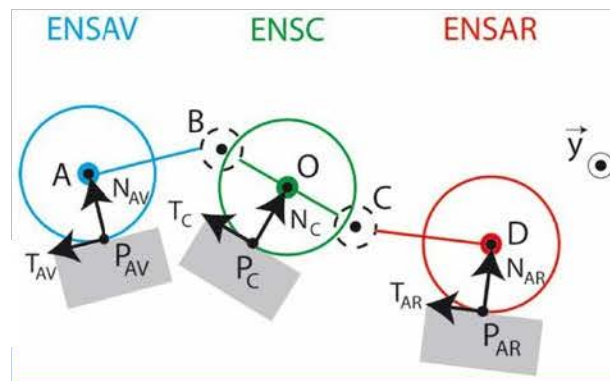


Figure 13 : configuration plane du châssis

Q3.4. Indiquer s'il est possible de déterminer, par une analyse statique globale, les différentes actions N_{AV} , T_{AV} , N_C , T_C , N_{AR} et T_{AR} . Justifier votre réponse.

En passant sur une étude plane (avec les 6 inconnues d'effort ci-dessus à déterminer et les 2x2 inconnues de liaison dans les liaisons pivot.

Le système est composé de 3 solides hors bâti et il sera donc possible d'écrire 9 équations de la statique. Une analyse de statique globale seule ne permettra pas de déterminer toutes les actions, il faudra rajouter une équation de comportement (modélisation des actions de frottement par les lois de Coulomb)

La modélisation plane de la Figure 13 est considérée dans la suite de cette partie.

Q3.5. Dans la configuration $\alpha = 0^\circ$ (pente nulle), justifier la répartition des efforts normaux :

$$N_{AV} = N_{AR} = mg \text{ et } N_C = Mg.$$

Solution :

Par symétrie du système, on peut commencer par remarquer que le centre de gravité du système est situé en G_c .

On isole tout l'ensemble en équilibre et on applique le Principe Fondamental de Statique. Le Théorème de la Résultante est projeté sur $\vec{z}$ Le Théorème du Moment Statique est appliqué au point P_c en projection sur $\vec{y}$.

On obtient alors les relations suivantes :

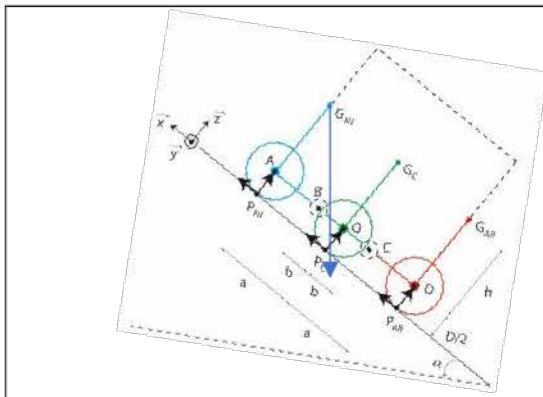
$$N_{AV} + N_C + N_{AR} - (M + 2m)g = 0$$

$$a. N_{AV} - a. N_{AR} = 0$$

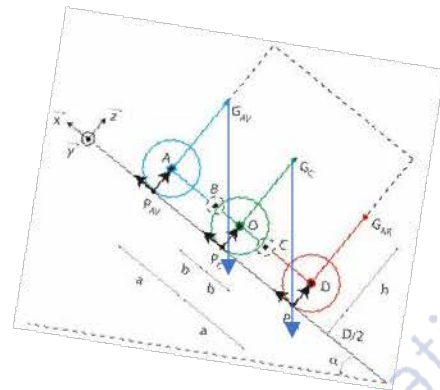
Ensuite, par identification, on obtient $N_{AV} = N_{AR} = mg$ et $N_C = Mg$

Q3.6. Déterminer, en fonction des données géométriques, la hauteur h limite des centres de gravité avant basculement du système sur une pente inclinée d'un angle α . En déduire la valeur limite de h à respecter pour satisfaire le cahier des charges, puis faire l'application numérique et conclure. On donne $\tan 50^\circ \approx 1,2$.

On commence par étudier les configurations possibles de basculement.

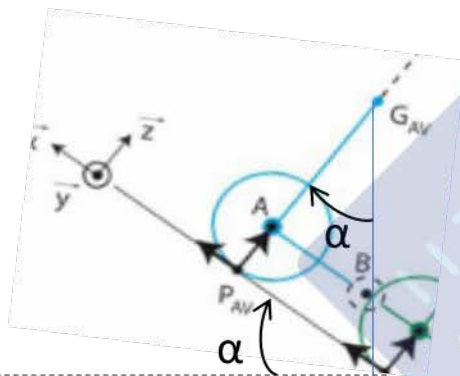


Basculement de ENSAV autour de B



Basculement de ENSAV et ENSC simultanément

Le basculement débutera donc obligatoirement par le basculement de la partie avant du véhicule. A l'aide de considérations graphiques, il est possible de dire que le basculement débutera lorsque les efforts de pesanteur sur ENSAV seront « à droite » de B.



La situation limite de basculement est tracée ci-contre (l'effort de pesanteur passe par le point B). On lit directement sur la figure en utilisant les données du schéma :

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AG_{AV}} = \frac{a - b}{h}$$

La hauteur limite des centres de gravité avant basculement dans une pente α est donc :

$$h_{lim} = \frac{(a - b)}{\tan \alpha}$$

Le cahier des charges impose de monter des pentes de 50° , on obtient donc une hauteur limite h après application numérique :

$$h_{lim} = \frac{0.6}{1.2} = 0.5m$$

Deuxième méthode :

En isolant ENSAV et en appliquant le Principe Fondamental de la Statique, on pourra résoudre sachant qu'à la limite du basculement, N_{AV} est connu et vaut 0

Théorème de la résultante sur $\vec{x}$: $T_{AV} + X_{ensc-ensav} - mg \sin \alpha = 0$

Théorème de la résultante sur $\vec{z}$: $N_{AV} + Y_{ensc-ensav} - mg \cos \alpha = 0$

Théorème du Moment sur $\vec{y}$ au point B :

$$-mgh \sin \alpha + mg(a - b) \cos \alpha - N_{AV}(a - b) - T_{AV}h = 0$$

A la limite du basculement, les efforts sur la roue avant sont nuls et l'équation de moment devient :

$$-mgh_{lim} \sin \alpha + mg(a - b) \cos \alpha = 0 \text{ soit encore}$$

$$h_{lim} = \frac{(a - b)}{\tan \alpha}$$

Q3.7. Montrer que l'hypothèse HYP1 permet de calculer l'ensemble des efforts de contact roue-sol dans la configuration $\alpha \neq 0^\circ$ (le calcul n'est pas demandé). Quelle équation permet de démontrer que $N_{AV} \neq N_{AR}$ dans cette configuration ?

Solution: À la Q3.4, dans le cas où les 3 coefficients de frottement ne sont pas connus, on a démontré qu'il n'était pas possible de résoudre, car il nous manquait une équation.

Avec l'HYP1, la résolution devient possible puisque l'on rajoute une équation de comportement.

L'écriture du Théorème du Moment Statique appliqué au point P_c permet de démontrer l'inégalité

$$N_{AV} \neq N_{AR}$$

Franchissement d'un obstacle

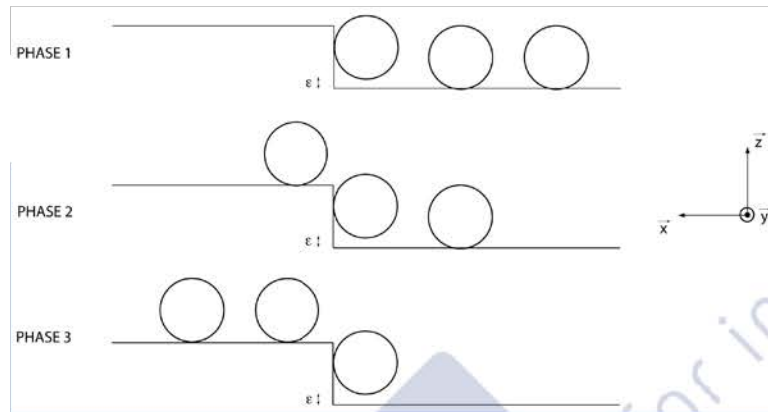


Figure 15 : schématisation de l'obstacle et des phases de son franchissement

Q3.8. Pour chacune des trois phases, donner les deux équations obtenues par le théorème de la résultante

Les autres équations de statique ne sont pas demandées.

Solution:

Phase 1	
TRS en $\vec{x}$	$-N_{AV} + T_C + T_{AR} = 0$
TRS en $\vec{z}$	$T_{AV} + N_C + N_{AR} - (2m + M) \cdot g = 0$
Phase 2	
TRS en $\vec{x}$	$T_{AV} - N_C + T_{AR} = 0$
TRS en $\vec{z}$	$N_{AV} + T_C + N_{AR} - (2m + M) \cdot g = 0$
Phase 3	
TRS en $\vec{x}$	$T_{AV} + T_C - N_{AR} = 0$
TRS en $\vec{z}$	$N_{AV} + N_C + T_{AR} - (2m + M) \cdot g = 0$

Q3.9. Identifier les plages temporelles des diagrammes où ont lieu chacune des phases 1, 2 et 3. Indiquer également à quoi correspondent les autres phases des diagrammes, et préciser l'origine des sauts d'effort observés.

Solution: Pour $t \in [1; 2]$ s, Phase 1 ; Pour $t \in [3; 4]$ s, Phase 2 ; Pour $t \in [5; 6]$ s, Phase 3.

Remarque : Une erreur s'est glissée dans le document Annexe 2. Il faut lire $\mu=2$, et non 0,2.

Les autres phases correspondent à des états transitoires lorsqu'aucune roue ne touche les marches verticales.

Q3.10. Expliquer pourquoi, sous l'hypothèse HYP2, il n'est pas possible de franchir l'obstacle avec un coefficient de frottement $\mu=0,5$.

Solution: Avec l'hypothèse $\mu=0,5$, la condition sur la roue avant et sur la roue arrière entre 3 et 4 s

impose $T_{AV} > 0,5 \cdot N_{AV}$ et $T_{AR} > 0,5 \cdot N_{AR}$, ce qui est impossible. Donc, il n'est pas possible de franchir l'obstacle avec un tel coefficient de frottement.

Q3.11. Donner la relation entre le couple moteur C_m et les autres actions extérieures appliquées à la roue.

Solution: On isole la roue.

On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures Appliquées à la roue :

- Action de la plateforme sur la roue (liaison pivot d'axe $\vec{y}$);
- Action du moteur $\vec{C}_m = C_m \vec{y}$;
- Action résistante $\vec{M}_r = -k \cdot N \vec{y}$
- Action du sol sur la roue : $\vec{F}_{Sol \rightarrow roue} = T \vec{x} + N \vec{z}$

On applique le Théorème du Moment Statique au centre de la roue et on obtient :

$$- C_m - M_r - T \cdot \frac{D}{2} = 0$$

Q3.12. Conclure sur la valeur de couple à retenir pour le dimensionnement des moteurs, et remettre en cause l'utilisation de l'hypothèse HYP2 pour ce dimensionnement.

Solution: Le couple maximal à retenir pour les moto-réducteurs est de 120 N.m.

L'hypothèse d'une valeur maximale (limite de glissement) pour la seule roue montant l'obstacle entraîne une surestimation de C_m . En réalité, il est possible que les trains avant et arrière soient plus ou moins chargés dans cette configuration.

Q3.13. Proposer un algorithme de répartition du couple sur chaque roue qui serait une alternative à l'hypothèse HYP2 et permettrait de sélectionner des couples optimaux.

Solution:

On peut par exemple calculer les couples résistants en prenant comme hypothèse un rapport $\frac{T}{N}$ constant sur les différents trains, ce qui aurait tendance à équilibrer la charge sur les différents trains. Si l'on veut réellement limiter les couples moteurs, il faudrait faire la démarche inverse et atteindre la limite du glissement pour les roues les moins chargées.

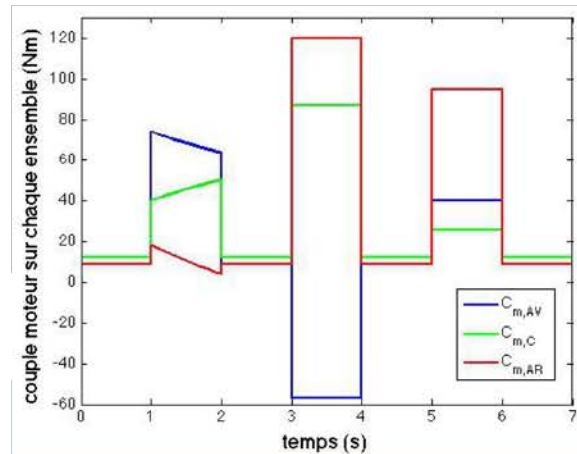


Figure 17 : évolution du couple sur chaque paire de roues

Le schéma d'asservissement est donné sur la Figure 18.

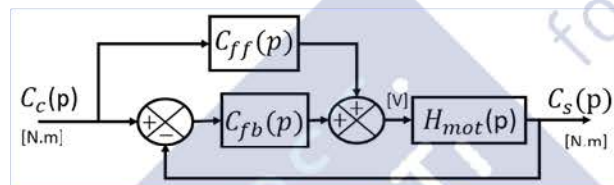


Figure 18 : schématisation de l'asservissement en couple

Q3.14. Énoncer, en justifiant, les hypothèses permettant de négliger les termes L et f pour cette modélisation du moteur par une fonction de transfert du premier ordre.

Solution: Le modèle de connaissance est du second ordre. Or il nous est fourni un modèle du premier ordre. Cela signifie que le coefficient d'amortissement ξ est supérieur à 1. Par conséquent la fonction de transfert du second ordre peut s'écrire comme un produit de 2 premiers ordres.

On a alors :

$$H_{mot}(p) = \frac{K_c}{K_c K_e + Rf} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ + Lf}{K_c K_e + Rf} p + \frac{LJ}{K_c K_e + Rf} p^2}$$

Si le coefficient de frottement est très faible (le couple dû aux frottements visqueux est très faible devant le couple électromagnétique), alors on peut considérer $f \approx 0$

On a alors :

$$H_{mot}(p) = \frac{1}{K_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ}{K_c K_e} p + \frac{LJ}{K_c K_e} p^2}$$

L'inductance L étant généralement faible (la tension aux bornes de l'inductance faible vis-à-vis des tensions électriques présentes dans le montage), on peut considérer $L \approx 0$.

Donc, on retrouve bien un modèle simplifié du 1^{er} ordre tel que proposé.

Q3.15. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$H_{mot}(p) = \frac{0.265}{0.4p + 200} = \frac{\frac{0.265}{200}}{1 + \frac{0.4}{200}p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\frac{C_S(p)}{C_C(p)} = \frac{C_{fb}(p) \cdot H_{mot}(p)}{1 + C_{fb}(p) \cdot H_{mot}(p)} = \frac{1 + \frac{K_{fb}}{I_{fb}} p}{1 + \frac{KK_{fb} + 1}{KI_{fb}} p + \frac{\tau}{KI_{fb}} p^2}$$

Q3.16. En s'aidant de la Figure 19, exprimer les conditions sur les paramètres K_{fb} et I_{fb} permettant de respecter le cahier des charges.

Les paramètres du modèle élaboré en question précédente sont les suivants :

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{KK_{fb} + 1}{KI_{fb}} \sqrt{\frac{KI_{fb}}{\tau}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{KI_{fb}}{\tau}}$$

Pour respecter le cahier des charges, il faut que $\xi \geq 0.7$ et $\omega_0 \geq 333 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

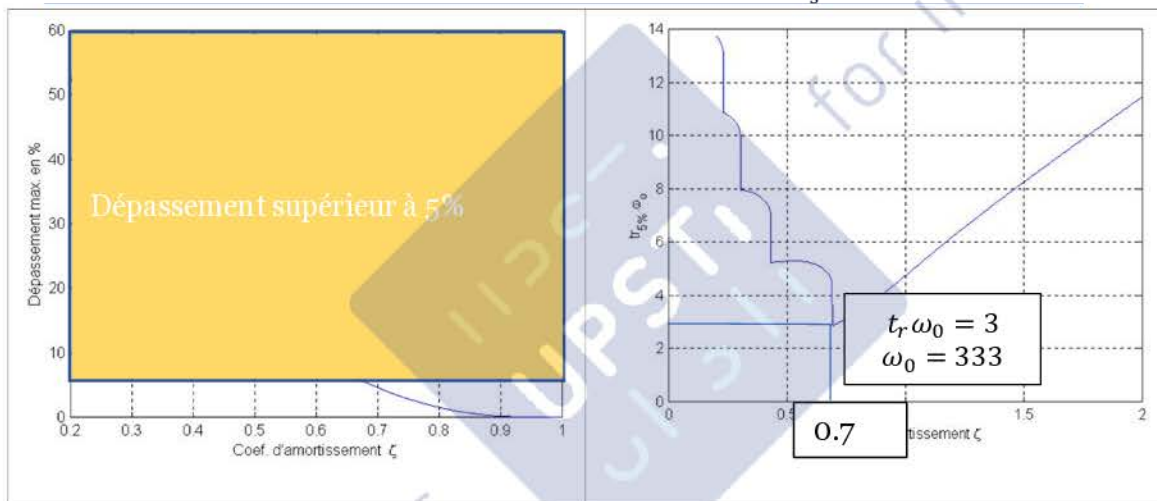


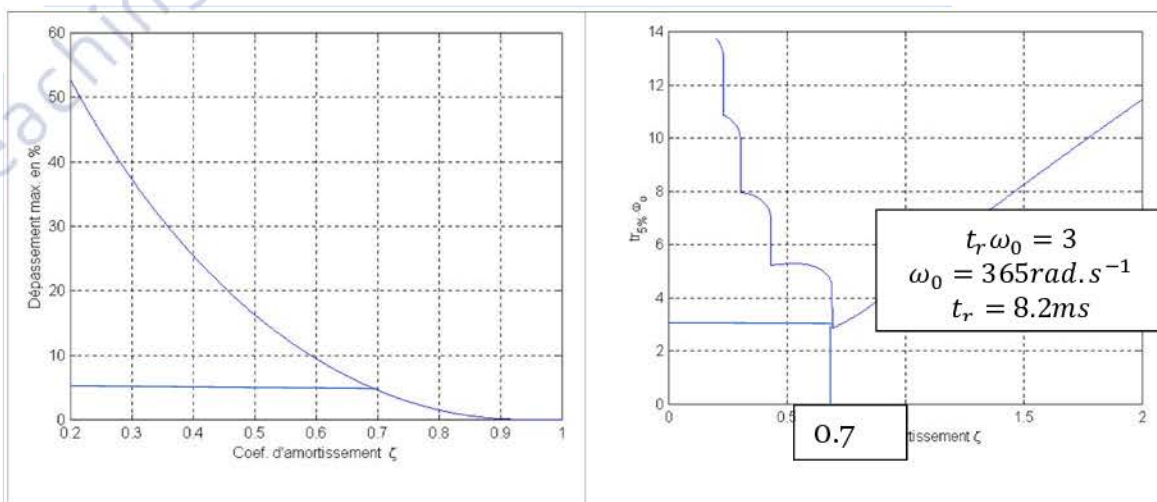
Figure 19 : dépassement et temps de réponse réduit en fonction de ξ

Par une technique d'optimisation, un bon jeu de paramètres trouvé est $K_{fb} = 30$ et $I_{fb} = 200 \cdot 10^3$.

Q3.17. Calculer la valeur du dépassement et le temps de réponse.

Solution: Dans le cas avec le jeu de paramètre correct, on a :

$$\omega_0 \approx 365 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \xi \approx 0,701$$



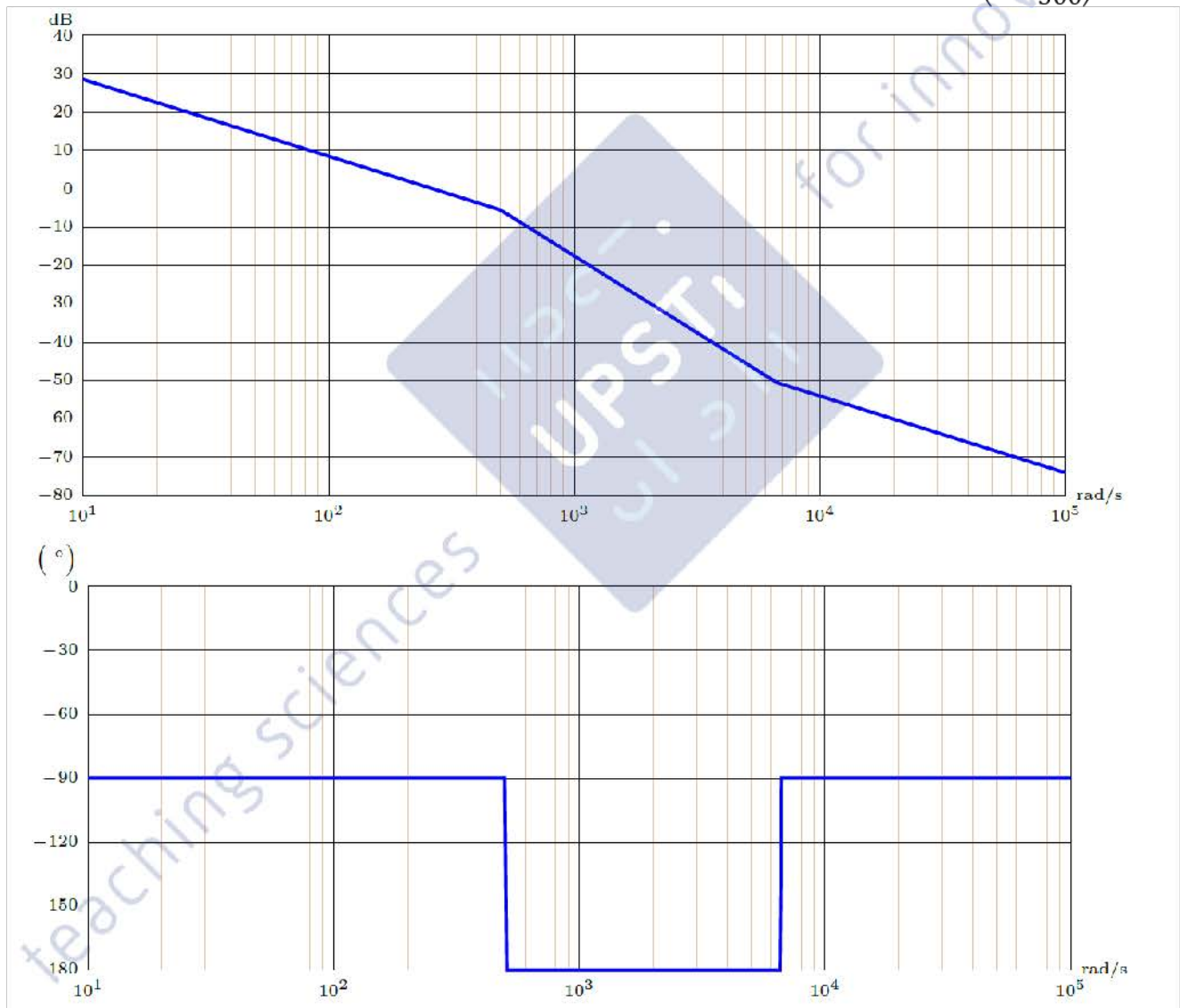
Donc, d'après les courbes de la figure 19, on trouve :

$$tr_{5\%} = 8 \text{ ms}$$

Q3.18. Tracer sur le document réponse DR2 le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Discuter des marges de gain et de phase.

La fonction de transfert en Boucle Ouverte s'exprime ainsi :

$$FTBO(p) = C_{fb}(p)H_{mot}(p) = \left(30 + \frac{200 \cdot 10^3}{p}\right) \cdot \frac{0,265}{0,4p + 200} = 265 \left(1 + \frac{p}{6667}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{p}{500}}\right)$$



La marge de gain est infinie (ou non définie) car la phase n'atteint jamais -180°

La marge de phase est nécessairement positive, car la phase est strictement supérieure à -180° . Donc le système est bien stable en boucle fermée.

Q3.19. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système en fonction de $H_{mot}(p)$, $C_{fb}(p)$ et $C_{ff}(p)$.

Solution:

$$\frac{C_S(p)}{C_C(p)} = \left(1 + \frac{C_{ff}(p)}{C_{fb}(p)}\right) \cdot \left(\frac{H_{mot}(p)C_{fb}(p)}{1 + H_{mot}(p)C_{fb}(p)}\right)$$

Q3.20. Que se passe-t-il si le correcteur vaut $C_{ff}(p) = \frac{1}{H_{mot}(p)}$? Quel est l'intérêt et le risque de ce choix particulier de correcteur ?

En admettant que l'on puisse réaliser un tel système (en fait, le système étant composé d'un gain et d'un dérivateur pur, il faudrait rajouter du filtrage afin d'avoir un système causal), on obtient après simplification :

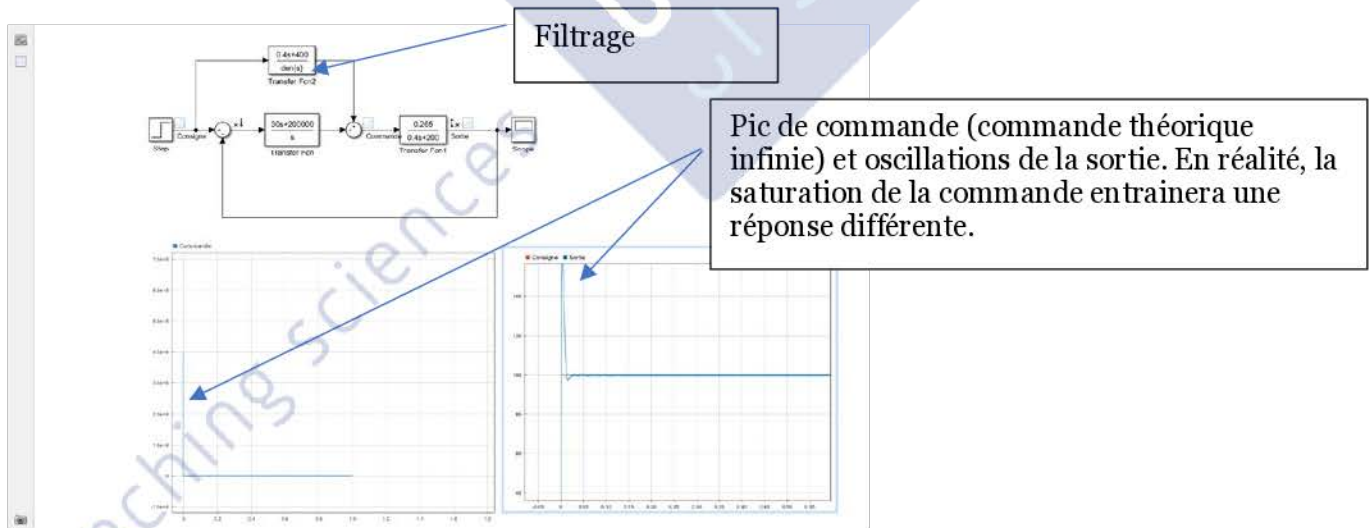
$$\frac{C_S(p)}{C_C(p)} = \left(1 + \frac{1}{H_{mot}(p) \cdot C_{fb}(p)}\right) \cdot \left(\frac{H_{mot}(p)C_{fb}(p)}{1 + H_{mot}(p)C_{fb}(p)}\right) = 1$$

L'intérêt théorique d'un tel système est donc évident puisqu'il s'agit d'un système dont la réponse correspond parfaitement à la consigne.

Cependant, pour y parvenir, il faut parfaitement maîtriser les paramètres du modèle du moteur $H_{mot}(p)$.

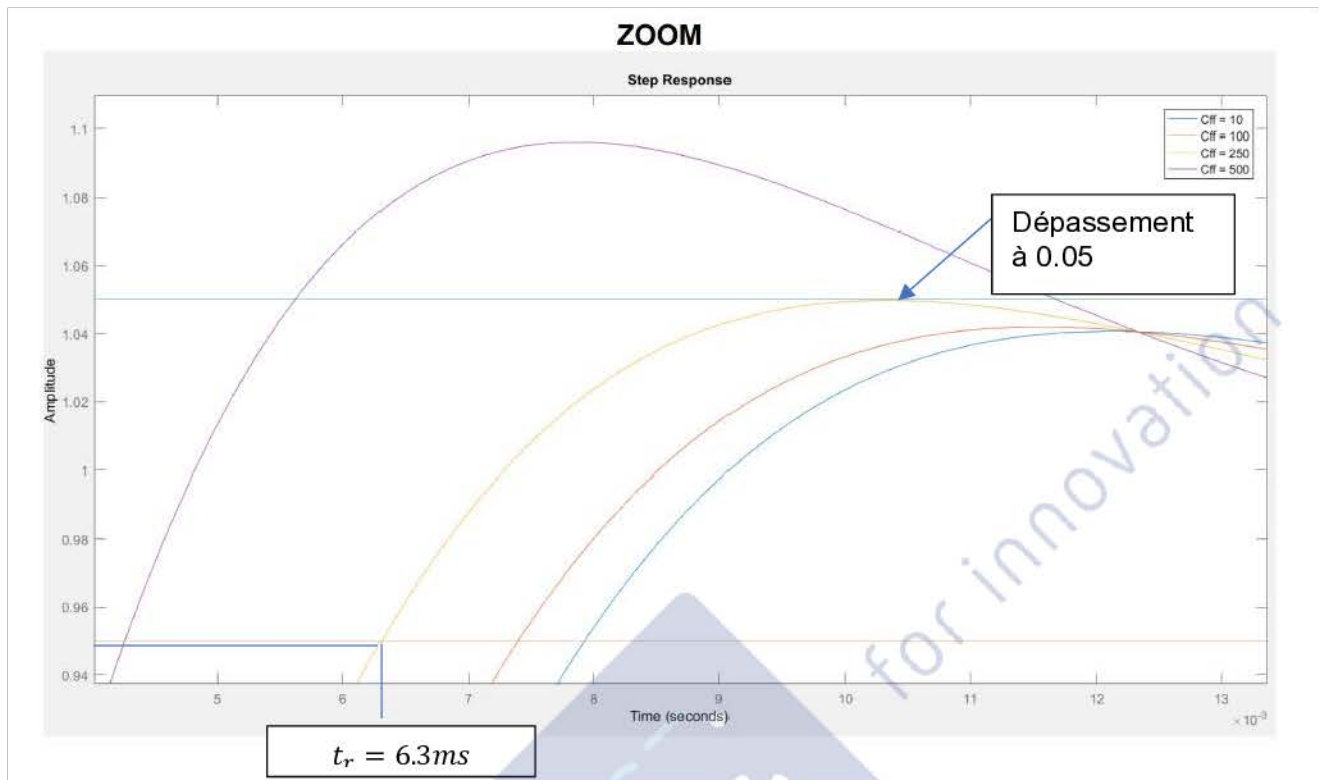
Un risque est donc de ne pas avoir un modèle suffisamment précis de $H_{mot}(p)$ et donc d'avoir des réactions imprévisibles et non désirées du correcteur.

Un autre écart entre la théorie et la réalisation pratique du correcteur est lié à la saturation de la commande. Un tracé de la réponse du système à un échelon de commande réalisé avec le correcteur théorique (modèle fourni dans ce dossier) montre la commande théorique du système (ci-dessous) :



Q3.21. Quelles conclusions peut-on tirer sur l'effet du correcteur ?

Solution: Ce correcteur a tendance à améliorer la rapidité sans trop dégrader la stabilité. Les critères de rapidité (temps de réponse à 5%) et de stabilité (dépassement autorisé) sont respectés, voire même améliorés pour $C_{ff} = 100$.



Quatrième partie Étude du bras manipulateur

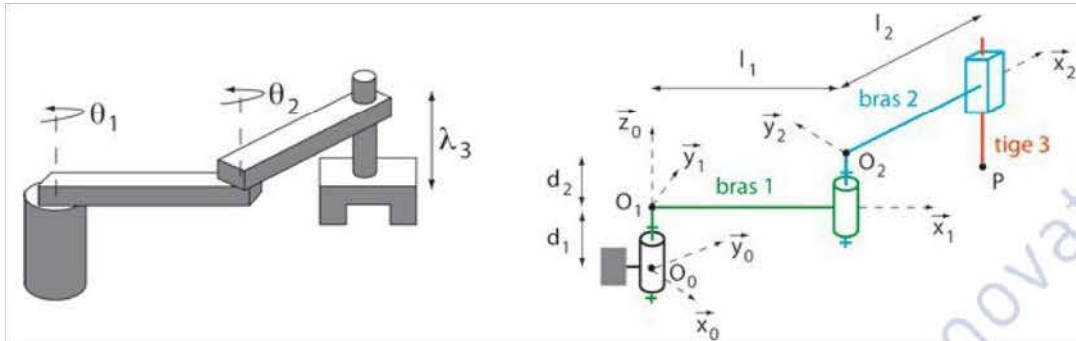
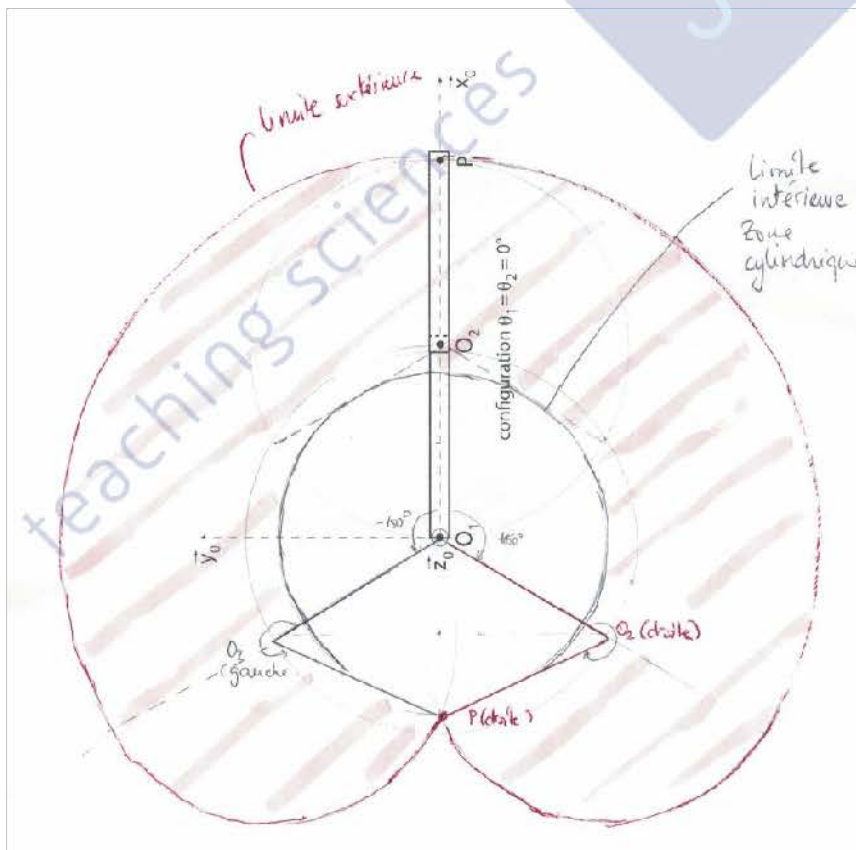


Figure 20 : schématisation et paramétrage du système SCARA

Q4.1. En représentant sur le document réponse DR3 la base du cylindre, montrer que le volume accessible par le point P (enveloppe de travail) est un cylindre à base non-circulaire.

Solution:

Q4.2. Donner l'expression des coordonnées (x_P, y_P, z_P) et de la vitesse $\vec{V}_{P,3/0}$ du point P dans le repère fixe $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des variables $\theta_1, \theta_2, \lambda_3$, de leurs dérivées par rapport au temps et des dimensions constantes du problème.



Solution:

$$\begin{aligned}x_P &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\y_P &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\z_P &= d_1 + d_2 - \lambda_3\end{aligned}$$

$$\vec{V}_{P,3/0} = \left. \frac{d\vec{O_0O_3}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(d_1\vec{z}_0 + l_1\vec{x}_1 + d_2\vec{z}_0 + l_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{z}_0)}{dt} \right|_{R_0} = l_1\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \dot{\lambda}_3\vec{z}_0$$

Q4.3. Montrer que la vitesse maximale V_{max} que peut atteindre le point P dans un mouvement plan horizontal est obtenue pour $\theta_2 = 0^\circ$. Exprimer V_{max} en fonction de la vitesse de rotation maximale ω_{max} des moteurs et des dimensions constantes.

Solution :

On exprime $\vec{V}_{P,3/0}$ dans la base 1 par exemple et on calcule la norme de ce vecteur vitesse. On obtient :

$$\|\vec{V}_{P,3/0}\| = \sqrt{l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 + \dot{\lambda}_3^2}$$

$\dot{\lambda}_3 = 0$ car on considère ci un mouvement plan.

La vitesse du point P est maximale lorsque $\theta_2 = 0^\circ$, donc lorsque les deux bras sont alignés.

$$\begin{aligned}\|\vec{V}_{P,3/0}\| &= \sqrt{l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)} \\ \|\vec{V}_{P,3/0}\| &= l_1\dot{\theta}_1 + (l_1 + l_2)\dot{\theta}_2\end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $V_{max} = l_1\omega_{max} + (l_1 + l_2)\omega_{max} = (2l_1 + l_2)\omega_{max}$

Q4.4. Donner l'expression de λ_3 et $\dot{\lambda}_3$ en fonction de z_P , V et des dimensions constantes.

Solution:

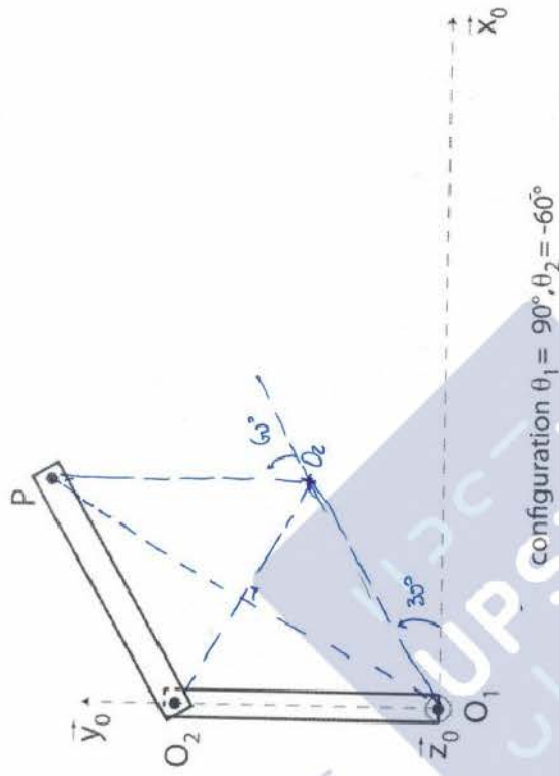
$$\lambda_3 = d_1 + d_2 - z_P$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\dot{z}_P = -V_P^z$$

Q4.5. Pour une même position (x_P, y_P, z_P) du point P , montrer schématiquement qu'il y a deux configurations possibles des angles θ_1 et θ_2 . Par un raisonnement graphique, représenter sur le document réponse DR4 la configuration complémentaire de celle qui est dessinée (correspondant à $\theta_1 = +90^\circ$ et $\theta_2 = -60^\circ$).

Solution :

Document Réponse DR4



Q4.6. Montrer que quelle que soit la configuration, la valeur de l'angle θ_2 est entièrement déterminé par $x_P^2 + y_P^2$ et donner l'expression de θ_2 en fonction de $x_P^2 + y_P^2$ et des dimensions constantes.

Solution :

On a

$$x_P^2 + y_P^2 = (l_1 + l_2)^2$$

De plus,

$$x_P = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_P = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Donc,

$$x_P^2 + y_P^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2$$

On obtient alors $\cos \theta_2 = \frac{x_P^2 + y_P^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$

Q4.7. À partir de l'expression générale précédente, préciser et justifier la forme simplifiée de la matrice d'inertie du bras i prenant en compte sa modélisation géométrique.

Solution :

Les bras 1 et 2 possèdent chacun 3 plans de symétrie $((\vec{x}_i, \vec{y}_i), (\vec{y}_i, \vec{z}_i), (\vec{x}_i, \vec{z}_i))$ passant par leur centre de gravité respectif G_i (2 plans de symétrie seraient suffisant pour justifier la forme ci-après)

Donc, la matrice d'inertie prend la forme suivante :

$$\bar{I}_{(G_i, i)} = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$$

Q4.8. Déterminer l'hyperstatisme du modèle du bras manipulateur. Conclure sur la possibilité d'obtenir les différentes actions de liaison (leur calcul n'est pas demandé).

Solution:

Le mécanisme est modélisé par une chaîne ouverte. Par conséquent le degré d'hyperstatisme est nul. Il est donc tout à fait possible de déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.

Q4.9. Calculer les vitesses $\vec{V}_{G_i, i/0}$ et les accélérations $\vec{\Gamma}_{G_i, i/0}$ des points G_1 et G_2 dans leur mouvement par rapport au bâti 0, ainsi que $\vec{V}_{P, i/0}$ et $\vec{\Gamma}_{P, i/0}$, en fonction des paramètres variables $\theta_1, \theta_2, \lambda_3$ de leurs dérivées temporelles et des dimensions constantes.

Solution :

Calcul de $\vec{V}_{G_1, 1/0}$:

$$\vec{V}_{G_1, 1/0} = \frac{d\overrightarrow{O_1 G_1}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_{G_1, 1/0}$:

$$\vec{\Gamma}_{G_1, 1/0} = \frac{d\vec{V}_{G_1, 1/0}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{l_1}{2} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1$$

Calcul de $\vec{V}_{G_2, 2/0}$:

$$\vec{V}_{G_2, 2/0} = \frac{d\overrightarrow{O_1 G_2}}{dt} \Big|_{R_0} = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_{G_2, 2/0}$:

$$\vec{\Gamma}_{G_2, 2/0} = \frac{d\vec{V}_{G_2, 2/0}}{dt} \Big|_{R_0} = l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + \frac{l_2}{2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2$$

Calcul de $\vec{V}_{P, 1/0}$:

$$\vec{V}_{P, 1/0} = \vec{V}_{O_1, 1/0} + \overrightarrow{PO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_2$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_{P, 1/0}$:

$$\vec{\Gamma}_{P,1/0} = \frac{d\vec{V}_{P,1/0}}{dt} \Big|_{R_0} = l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + l_2 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_2$$

Calcul de $\vec{V}_{P,2/0}$:

$$\vec{V}_{P,2/0} = \vec{V}_{P,3/0} \Big|_{\lambda=cste} = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_{P,2/0}$:

$$\vec{\Gamma}_{P,2/0} = \frac{d\vec{V}_{P,2/0}}{dt} \Big|_{R_0} = l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2$$

Calcul de $\vec{\Gamma}_{P,3/0}$:

$$\vec{\Gamma}_{P,3/0} = \frac{d\vec{V}_{P,3/0}}{dt} \Big|_{R_0} = l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2 - \ddot{\lambda}_3 \vec{z}_0$$

Q4.10. A partir du Théorème du Moment Dynamique, donner l'expression du couple moteur τ_2 dans la liaison pivot $(O_2, \vec{z}_0)$ en fonction des variables θ_1, θ_2 , de leurs dérivées temporelles et de données du problème. Faire de même pour le couple moteur τ_1 dans la liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$.

On simplifiera les expressions en introduisant les notations $a_i = l_i/2$, $\alpha = C_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2$, $\beta = C_2 + m_2 a_2^2 + m_3 l_2^2$ et $\gamma = m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2$

Détermination de τ_2 :

Pour trouver le couple τ_2 , on isole l'ensemble $\{2 + 3\}$ et on applique le Théorème du Moment Dynamique en O_2 en projection sur $\vec{z}_0$.

On commence par déterminer les quantités dynamiques :

$$\{\mathcal{D}_{2+3/0}\} = \{\mathcal{D}_{2/0}\} + \{\mathcal{D}_{3/0}\}$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O_2,2/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2/0} &= \vec{z}_0 \cdot (\vec{\delta}_{G_2,2/0} + m_2 \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \vec{\Gamma}_{G_2,2/0}) \\ \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2/0} &= \vec{z}_0 \cdot \left(\frac{d\vec{\Gamma}_{(G_2,2)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}}{dt} \Big|_{R_0} + m_2 \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge \vec{\Gamma}_{G_2,2/0} \right) \\ \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2/0} &= \vec{z}_0 \cdot \left(\frac{d\vec{\Gamma}_{(G_2,2)} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0}{dt} \Big|_{R_0} + m_2 \frac{l_2}{2} \vec{x}_1 \wedge (l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 + \frac{l_2}{2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2) \right) \end{aligned}$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2/0} = C_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 \frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_1 + m_2 \frac{l_2^2}{4} \cos \theta_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - m_2 \frac{l_2^2}{4} \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O_2,3/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,3/0} = \vec{z}_0 \cdot (\vec{\delta}_{G_3,3/0} + m_3 \overrightarrow{O_2 G_3} \wedge \vec{\Gamma}_{G_3,3/0})$$

Or, m_3 est une masse ponctuelle et $P = G_3$ donc $\vec{\delta}_{G_3,3/0} = \vec{0}$.

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,3/0} = m_3 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

Donc, $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2+3/0} = \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \gamma \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2$

Calcul du moment des AME sur 2+3 en O_2 :

- Action de 1 sur 2, liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_0) \Rightarrow \vec{M}_{O_2,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
- Action de la pesanteur 2, $\vec{R}_{pes \rightarrow 2} = -m_2 g \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_{O_2,pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
- Action de la pesanteur 3, $\vec{R}_{pes \rightarrow 3} = -m_3 g \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_{O_2,pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
- Action du moteur sur 2, $\vec{M}_{O_2,mot \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 = \tau_2$

On obtient finalement l'équation :

$$\tau_2 = \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \gamma \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2$$

Détermination de τ_1 :

Pour trouver le couple τ_2 , on isole l'ensemble $\{1 + 2 + 3\}$ et on applique le Théorème du Moment Dynamique en O_1 en projection sur $\vec{z}_0$.

On commence par déterminer les quantités dynamiques :

$$\{\mathcal{D}_{1+2+3/0}\} = \{\mathcal{D}_{1/0}\} + \{\mathcal{D}_{2/0}\} + \{\mathcal{D}_{3/0}\}$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O_1,1/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{\delta}_{O_1,1/0} \cdot \vec{z}_0 = c_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 a_1^2 \ddot{\theta}_1$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O_1,2/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_1,2/0} = \vec{z}_0 \cdot (\vec{\delta}_{O_2,2/0} + m_2 \overrightarrow{O_1 O_2} \wedge \vec{r}_{G_2,2/0})$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_1,2/0} = \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_2,2/0} + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 a_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - m_2 l_1 a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O_1,3/0} \cdot \vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_1,3/0} = \vec{z}_0 \cdot (\vec{\delta}_{P,3/0} + m_3 \overrightarrow{O_1 P} \wedge \vec{r}_{G_3,3/0})$$

Or, m_3 est une masse ponctuelle et $P = G_3$ donc $\vec{\delta}_{G_3,3/0} = \vec{0}$.

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_1,3/0} = m_3 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_3 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_3 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_3 l_1 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

Au final :

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_1,1+2+3/0} = \alpha \ddot{\theta}_1 + \beta (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \gamma \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + \gamma (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - \gamma (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2$$

Calcul du moment des AME sur 1+2+3 en O_1 :

- Action de 1 sur 1, liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0) \Rightarrow \vec{M}_{O_1,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z}_0 = 0$;

- Action de la pesanteur 1, $\vec{R}_{pes \rightarrow 1} = -m_1 g \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 1} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
-
- Action de la pesanteur 2, $\vec{R}_{pes \rightarrow 2} = -m_2 g \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
- Action de la pesanteur 3, $\vec{R}_{pes \rightarrow 3} = -m_3 g \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_{O_1, pes \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0$;
- Action du moteur sur 1, $\vec{M}_{O_2, mot \rightarrow 1} \cdot \vec{z}_0 = \tau_1$

On obtient finalement l'équation :

$$\tau_1 = \alpha \ddot{\theta}_1 + \beta (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \gamma \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + \gamma (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - \gamma (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2$$

Q4.11. Montrer alors que la dynamique du bras manipulateur peut être décrite par un système d'équations différentielles du second ordre non-linéaires et couplées, de la forme :

$$\mathbf{M}(\vec{\theta}) \ddot{\vec{\theta}} + \mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) \dot{\vec{\theta}} + \mathbf{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \vec{\tau}$$

Solution : On isole la tige 3 et on écrit le Théorème de la Résultante Dynamique. Il vient directement :

$$-m_3 \ddot{\lambda}_3 = F_3 - m_3 g$$

Cette équation ainsi que les deux issues de la question 56 donne alors :

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta + 2\gamma \cos \theta_2 & \beta + \gamma \cos \theta_2 & 0 \\ \beta + \gamma \cos \theta_2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\lambda}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & -\sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Q4.12. Montrer que les effets dynamiques dans le plan horizontal sont découplés de ceux dans la direction verticale.

Solution : Les deux premières lignes des matrices (effets dynamiques dans le plan horizontal) sont indépendantes des variables $\lambda_3, \dot{\lambda}_3, \ddot{\lambda}_3$ (effets dynamiques dans la direction verticale), donc les effets dynamiques dans le plan horizontal sont bien découplés de ceux dans la direction verticale.

Q4.13. Donner trois éléments qui pourraient faire sortir le modèle dynamique précédent de son domaine de validité.

Solution :

- Frottement dans les liaisons
- Solides considérés comme déformables
- Forme réelle des solides ne présentant pas deux plans de symétrie orthogonaux
- Géométrie de la tige 3 éloignée de celle d'une masse ponctuelle
- Inclinaison du plan impliquant l'apparition des effets de pesanteur et un couplage dynamique ;
- ...

Q4.14. A partir d'hypothèses à formuler, déterminer le couple minimal que doit fournir le moteur à courant continu qui assure le mouvement vertical de la pince.

Solution :

On isole la vis. On utilise le Théorème du Moment Dynamique sur l'axe de la vis en faisant l'hypothèse de rendement unitaire (pas de frottement).

On trouve alors :

$$C_{min} = \pm \frac{p}{2\pi} F_3 = \pm \frac{p}{2\pi} \cdot (m_3 \lambda_3^{max} - m_3 g)$$

Q4.15. Expliquer l'intérêt de cette contrainte

Solution : cette contrainte permet d'arriver au point désiré sans oscillation du fait de la potentielle déformabilité des bras 1 et 2. Cela permet d'éviter les oscillations des bras en fin de mouvement. Et puis il est intéressant de s'arrêter en fin de trajectoire pour saisir l'objet.

Q4.16. Montrer que choisir une évolution temporelle des angles θ_1 et θ_2 sous la forme polynomiale $A_i t^5 + B_i t^4 + C_i t^3$ permet d'assurer la contrainte précédente. Donner la méthode permettant de fixer les constantes A_i, B_i, C_i

Solution :

avec les évolutions fournies dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\theta_i(t) &= A_i t^5 + B_i t^4 + C_i t^3 \\ \dot{\theta}_i(t) &= 5A_i t^4 + 4B_i t^3 + 3C_i t^2 \\ \ddot{\theta}_i(t) &= 20A_i t^3 + 12B_i t^2 + 6C_i t\end{aligned}$$

Il est donc possible qu'en $t=0$, les accélérations et vitesses angulaires soient nulles.

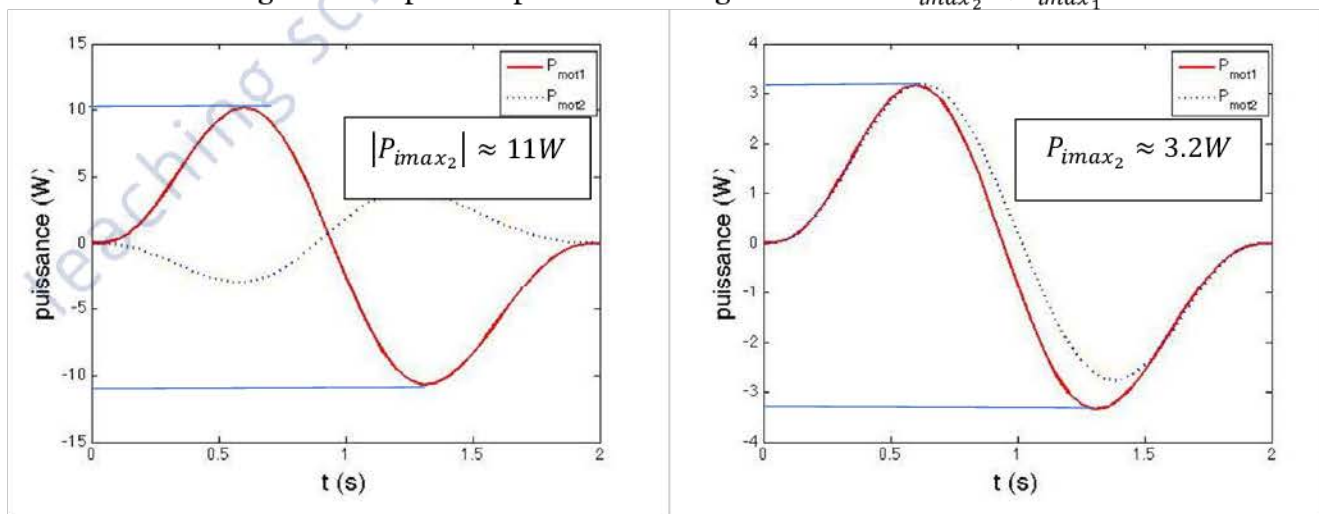
Des polynômes sur la position angulaire de degré inférieur ou égale à 4 ne permettraient pas de satisfaire la condition initiale sur l'accélération angulaire en $t=0$. Cependant, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 5 est adapté. Les polynômes de degré 5 permettent ainsi de minimiser les coefficients devant chaque monôme (A_i, B_i, C_i) en t .

Pour déterminer les constantes A_i, B_i, C_i il faut que celles-ci vérifient (en notant t_f la durée du mouvement) :

- $\dot{\theta}_i(t = t_f) = 5A_i t_f^4 + 4B_i t_f^3 + 3C_i t_f^2 = 0$
- $\ddot{\theta}_i(t = t_f) = 20A_i t_f^3 + 12B_i t_f^2 + 6C_i t_f = 0$
- $\dot{\theta}_i(t = t_k) = 5A_i t_k^4 + 4B_i t_k^3 + 3C_i t_k^2 \leq \dot{\theta}_{i,max}$ pour $t_k \in]0; t_f[$
- $\ddot{\theta}_i(t = t_k) = 20A_i t_k^3 + 12B_i t_k^2 + 6C_i t_k \leq \ddot{\theta}_{i,max}$ pour $t_k \in]0; t_f[$

Q4.17. A la vue des évolutions décrites dans l'Annexe 4, indiquer (en justifiant) la configuration la plus défavorable pour le dimensionnement des moteurs.

Solution : la configuration la plus adaptée est la configuration 2 car $P_{imax_2} < P_{imax_1}$

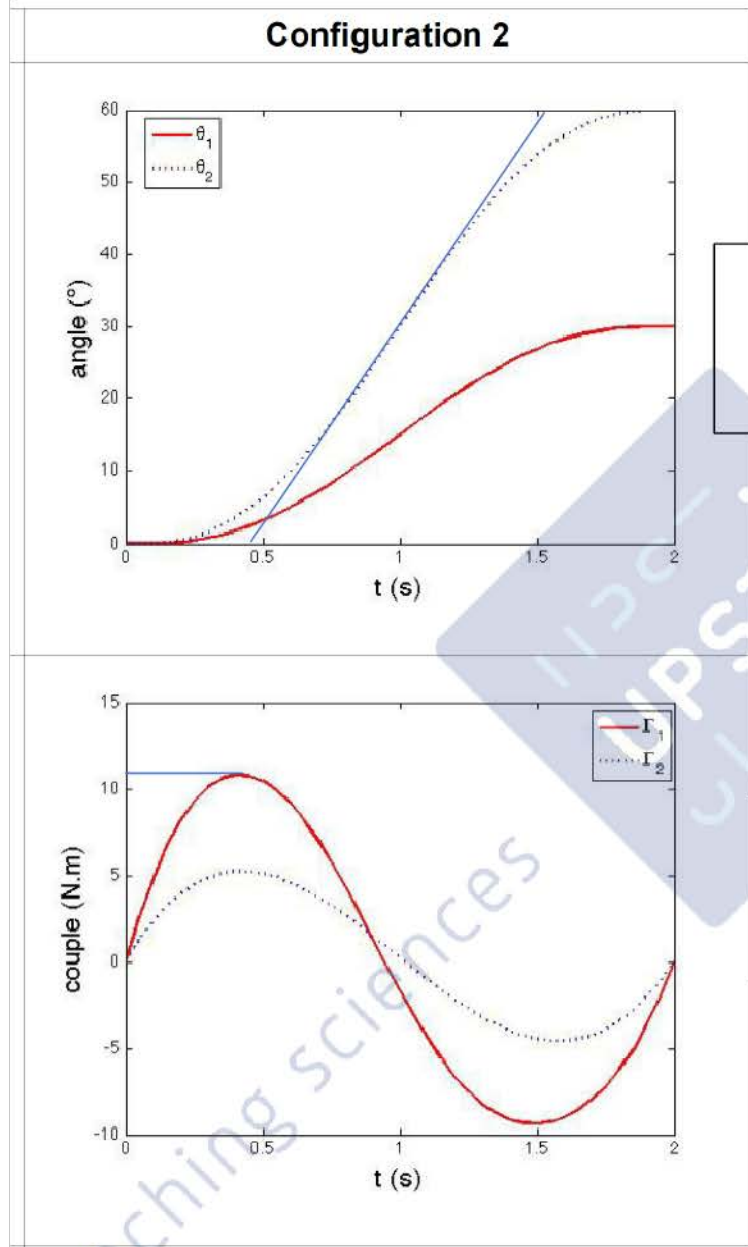


Q4.18. Choisir alors dans la documentation constructeur fournie dans l'Annexe 5 un moto-réducteur à courant continu (identique pour les 2 axes de rotation) convenable vis-à-vis du cahier des charges

Solution : le choix des actionneurs doit satisfaire les contraintes sur la vitesse maximale et sur le couple maximal.

En déterminant la pente maximale sur la courbe de position angulaire, on peut estimer la valeur de la vitesse angulaire maximale.

A partir de la courbe de couple, on définit le couple maximal à fournir par le moto-réducteur.



$$\dot{\theta}_{max} = \frac{60}{1,55 - 0,45} \approx 55^\circ/s$$

$$\dot{\theta}_{max} \approx 0,96 \text{ rad/s} \approx 9,1 \text{ tr/mn}$$

$$C_{max} \approx 11 \text{ Nm}$$

Il faut sélectionner un moteur avec un couple maximal supérieur à 11Nm et permettant de dépasser 9tr/mn.

Version	Rapport de réduction	Nombre d'étages	Rendement	Vitesse à vide en tr/mn	Vitesse en charge en tr/mn	Couple nominal en Nm	Courant nominal en mA
TRI/0004	3.70	1	0.80	811	716	0.43	103
TRI/0016	15.88	2	0.75	189	167	1.70	103
TRI/0025	25.01	2	0.75	120	106	2.70	103
TRI/0051	50.89	3	0.70	59	52	5.10	103
TRI/0093	92.70	3	0.70	32	29	9.30	103
TRI/0169	168.84	3	0.70	18	16	17.00	103
TRI/0219	218.12	4	0.65	14	12	20.40	103
TRI/0292	291.71	4	0.65	10	9	25.00	103
TRI/0398	397.29	4	0.65	8	7	25.00	103

Les moto-réducteurs TRI/0169 et TRI/0292 satisfont les contraintes. Le choix se portera sur le TRI/0169 probablement plus économique et plus léger.

Cinquième partie : étude de l'action de préhension

Q5.1 Donner le lien entre les angles α et β ainsi que l'expression de ces angles en fonction du rayon R de l'objet et des données géométriques.

Solution :

Une fermeture géométrique angulaire dans le triangle CEH donne immédiatement :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Une fermeture géométrique linéaire permet de déterminer la relation entre α (ou β), R et les dimensions du mécanisme.

On trouve (en projetant sur l'axe $\vec{x}$) :

$$R = d + l_4 \cos \beta - l_5 - l_6$$

$$R = d + l_4 \sin \alpha - l_5 - l_6$$

Q5.2. Déterminer la liaison équivalente entre le mors et l'objet à saisir. Cette liaison équivalente sera utilisée dans la suite de l'étude.

Solution :

Les liaisons étant en série, il est plus direct de passer par les torseurs cinématiques. Nous avons ici l'association d'une liaison rotule et d'une liaison appui plan en série

$$\{v_{5/objet}\} = \{v_{5/6}\} + \{v_{6/objet}\}$$

$$\{v_{5/objet}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{x56} \vec{x}_P + \omega_{y56} \vec{y}_P + \omega_{z56} \vec{z}_P \\ \vec{0} \end{array} \right\}_Q + \left\{ \begin{array}{c} \omega_{y60} \vec{y}_P \\ V_x \vec{x}_P + V_z \vec{z}_P \end{array} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{c} \omega_x \vec{x}_P + \omega_y \vec{y}_P + \omega_z \vec{z}_P \\ V_x \vec{x}_P + V_z \vec{z}_P \end{array} \right\}_Q$$

Il s'agit du torseur d'une liaison ponctuelle de normale $(Q, \vec{y}_P)$, la forme du torseur est maintenue sur la droite $(Q, \vec{y}_P)$, la liaison peut donc s'exprimer également comme une ponctuelle de normale $(S, \vec{y}_P)$

Q5.3. Calculer le degré d'hyperstatisme du modèle plan du mécanisme global de la pince

Solution :

Par une approche statique, $h = m - E_s + I_s$, avec

- $m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$
- $E_s = 3 \times (p - 1) = 15$
- $I_s = 6 \times 2 + 1 \times 2 = 14$ pour les 6 liaisons pivot et la glissière

Donc, $h=0$, le modèle du mécanisme est isostatique.

Q5.4. Donner l'orientation de l'effort dans les liaisons situées en B et en E.

Solution :

Les solides 2 et 4 sont soumis chacun à 2 glisseurs, par conséquent, les directions des efforts en B et E sont respectivement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$.

Q5.5. Par une étude statique, montrer que les efforts F_p, F_s^x, F_s^y sont liés par la relation

$F_p = (F_s^y \tan \beta - F_s^x)K$ où l'expression de la constante K est à préciser en fonction de l_2 et l_4 .

Montrer également que cette relation est indépendante de L_5 et donner l'avantage technique de ce résultat.

- Isoler {2}. Obtenir la direction de $\overrightarrow{F}_{12}$ et $\overrightarrow{F}_{23}$

Le solide 2 est soumis à 2 forces $\overrightarrow{F}_{12}$ et $\overrightarrow{F}_{23}$. La direction de ces deux forces est la droite (EH).

En introduisant les paramètres géométriques de la pince, on obtient en projetant dans le repère R_p

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_{12} \cdot \sin \beta & - \\ F_{12} \cdot \cos \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{H, R_p} \quad \text{et} \quad \{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_{32} \cdot \sin \beta & - \\ F_{32} \cdot \cos \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{E, R_p}$$

- Isoler {1}. Déterminer complètement $\overrightarrow{F}_{21}$ en fonction de F_p et des paramètres géométriques

$\{T_{mot \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_p & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{P, R_p}$

$\{T_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_{21} \sin \beta & - \\ F_{21} \cos \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{H, R_p}$

Par application du théorème de la résultante statique en projection sur $\overrightarrow{x_p}$, on obtient directement la relation suivante :

$$F_p + F_{21} \cdot \sin \beta = 0 \quad \text{soit} \quad F_p = -F_{21} \cdot \sin \beta$$

- Isoler {2+3}, obtenir une relation entre F_{53} , F_p et les paramètres géométriques

En utilisant le résultat précédent, on peut remplacer $F_{12} \sin \beta = F_p$

$\{T_{5 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{53} & - \\ Y_{53} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{D, R_p}$

$\{T_{C \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_p & - \\ F_p / \tan \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{H, R_p}$

Pour faire apparaître la relation souhaitée, on écrit le théorème du moment statique au point C en projection sur $\overrightarrow{z_p}$

Pour les calculs, il me semblait beaucoup plus aisé d'utiliser une lecture directe des bras de levier sur le schéma plutôt que de détailler le calcul vectoriel.

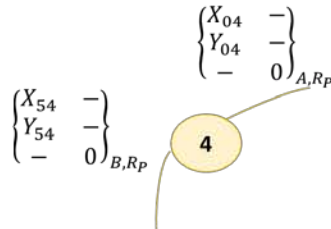
La relation obtenue est alors la suivante :

$$l_4 \cos \beta X_{53} + l_4 \sin \beta Y_{53} + 2l_2 \sin \beta \cdot \frac{F_P}{\tan \beta} = 0$$

soit

$$l_4 X_{53} + l_4 \tan \beta Y_{53} + 2l_2 F_P = 0$$

- Isoler $\{4\}$, obtenir la direction de $\vec{F}_{54}$ et $\vec{F}_{04}$

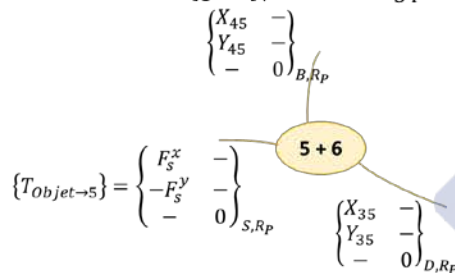


Le solide 4 est soumis à 2 forces $\vec{F}_{04}$ et $\vec{F}_{54}$. La direction de ces deux forces est la droite (AB).

En introduisant les paramètres géométriques de la pince, on obtient en projetant dans le repère R_p

$$\{T_{0 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} -F_{04} \cdot \sin \beta & - \\ F_{04} \cdot \cos \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_p} \quad \text{et} \quad \{T_{5 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} -F_{54} \cdot \sin \beta & - \\ F_{54} \cdot \cos \beta & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{E,R_p}$$

- Isoler $\{5+6\}$, obtenir F_{54} , X_{35} , Y_{35} , en fonction de F_S^x , F_S^y et des paramètres géométriques



En écrivant le Théorème du Moment Statique au point B cette fois :

$$l_3 Y_{35} - L_5 F_S^y - (l_5 + l_6) F_S^x = 0$$

On résout :

$$Y_{35} = \frac{L_5 F_S^y + (l_5 + l_6) F_S^x}{l_3}$$

En appliquant maintenant le Théorème de la Résultante Statique :

$$Y_{35} + F_{45} \cdot \cos \beta - F_S^y = 0 \quad \text{soit} \quad F_{45} = \frac{F_S^y - Y_{35}}{\cos \beta}$$

$$X_{35} - F_{45} \cdot \sin \beta + F_S^x = 0$$

$$\text{Soit } X_{35} = \frac{F_S^y - Y_{35}}{\cos \beta} \sin \beta - F_S^x = (F_S^y - Y_{35}) \tan \beta - F_S^x$$

$$X_{35} + Y_{35} \tan \beta = F_S^y \tan \beta - F_S^x$$

A partir de la relation obtenue précédemment :

$$X_{53} + \tan \beta Y_{53} = -2 \frac{l_2}{l_4} F_P$$

$$\text{Soit } X_{35} + \tan \beta Y_{35} = 2 \frac{l_2}{l_4} F_P$$

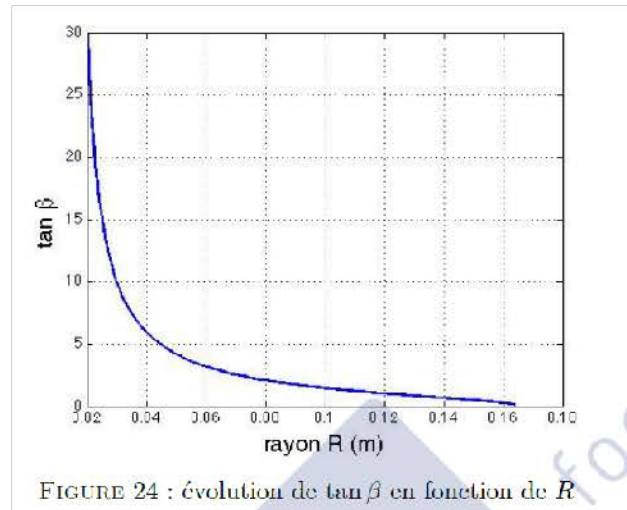
On obtient finalement par identification la relation suivante :

$$F_S^y \tan \beta - F_S^x = 2 \frac{l_2}{l_4} F_P$$

$$F_P = (F_S^y \tan \beta - F_S^x) \frac{l_4}{2l_2}$$

On trouve effectivement que l'effort F_p est indépendant de L_5 . Ceci est intéressant car quel que soit le point d'accroche S de l'objet dans la pince, l'effort est identique.

Q5.6. Commenter le graphe ci-dessous en termes d'impact sur les actions mécaniques mises en jeu, en particulier pour les valeurs extrêmes du rayon R



Solution :

On remarque que :

- Quand R est grand, l'effort F_p est quasi-indépendant de l'effort normal F_S^y de la pince sur l'objet.
- Quand R est petit, l'effort F_p dépend quasi-uniquement de l'effort normal F_S^y . La capacité de préhension est fortement diminuée pour des petits rayons.

Q5.7. En supposant un modèle de frottement de Coulomb (on note f le coefficient de frottement associé), montrer que l'objet peut être saisi sans aucune action de poussée F_p du moteur lorsque le rayon est tel que $R \geq R_{min}$. On précisera l'expression de R_{min} , on donnera sa valeur pour $f=2$ et on commentera ce caractère particulier de la pince en donnant un avantage et un inconvénient.

Solution :

En supposant un modèle de frottement de Coulomb, on a à la limite de l'adhérence (action de l'objet 6 sur le cône de frottement)

$$|F_S^x| = f \cdot |F_S^y|$$

L'effort F_p est nul lorsque $\tan \beta = f$

Dans ces conditions, le rayon $R = R_{min} = d + l_4 \sin(\tan^{-1} f) - l_5 - l_6$

Q5.8. Pour $R < R_{min}$, donner la relation entre l'effort de poussée F_p et la masse m_{objet} de l'objet à saisir, ainsi qu'entre l'effort de poussée et l'effort de serrage. En déduire la valeur de l'effort de poussée maximal à fournir pour respecter le cahier des charges avec $f=2$

Dans le cas où $R < R_{min}$ on a :

$$F_p = \left(\frac{m_{objet}g}{3} \tan \beta - f \frac{m_{objet}g}{3} \right) \frac{l_4}{2l_2}$$

Le cahier des charges impose $R_{min} = 0,04$ soit $\tan \beta = 6$ d'après la figure 24 et $m_{maxi} = 2,5kg$

Dans ces conditions,

$$F_p = \left(\frac{2,5 \cdot 10}{3} 6 - \frac{2 \times 2,5 \cdot 10}{3} \right) \frac{3}{4} = 25N$$

Pour les trois doigts, l'effort sera donc de 75N

Q5.9. Quel est l'intérêt pratique de la régulation mise en place ?

Solution : la régulation en place permet de contrôler l'effort normal et donc de contrôler le non-glissement de l'objet par rapport à la pince.

Q5.10. En considérant $P_F = 0$ (perturbation nulle) et $L=0$ (inductance nulle), calculer la fonction de transfert $\frac{F_S^y(p)}{F_C(p)}$ et la mettre sous forme canonique $\frac{K}{1+Ap+Bp^2}$. Identifier les paramètres K , A et B .

Solution :

$$\frac{F_S^y(p)}{F_C(p)} = \frac{C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_e K_t}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta} p + \frac{R J_{eq}}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta} p^2}$$

Par identification, on obtient :

$$K = \frac{C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta}$$

$$A = \frac{K_e K_t}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta}$$

$$B = \frac{R J_{eq}}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta}$$

Q5.11. Calculer la valeur de C_f permettant d'obtenir une erreur de position inférieure à 1%

Solution :

L'erreur statique ε_p pour une entrée en échelon d'amplitude F_{c0} vaut :

$$\varepsilon_p = (1 - K) F_{c0} = \frac{R}{R + C_f K_t K_r K_{ve} K_\beta} F_{c0}$$

Pour obtenir une erreur inférieure à 1%, il faut :

$$C_f > \frac{0,99R}{0,01 K_t K_r K_{ve} K_\beta} \approx 60370$$

Q5.12. Bien qu'il y ait un intégrateur dans la boucle ouverte, indiquer pourquoi l'erreur statique est non nulle

Solution :

l'intégrateur est placé après la perturbation (modélisée comme un couple résistant sur le moteur). L'erreur ne peut donc être nulle malgré la présence de l'intégrateur (il y a une perturbation inhérente à l'effort F_S^y).

On peut aussi dire que la FTBO est de classe 0 (on ne retrouve pas l'intégrateur pur dans l'écriture de la FTBO)

Q5.13. En considérant une valeur du correcteur permettant de valider le critère d'erreur de position, ce critère sera-t-il toujours validé si on ne néglige plus les perturbations ? Comment le démontrer ?

Solution : La perturbation agissant sur la valeur de l'erreur globale, en l'absence d'intégrateur pur en amont de la perturbation, le critère ne sera plus systématiquement validé. On peut le démontrer par le Théorème de la valeur Finale par exemple.

Q5.14. Le coefficient K_β a-t-il une influence sur l'asservissement ? Pourquoi ne peut-on pas considérer K_β comme une constante ?

Solution :

Le coefficient K_β représente la loi entrée-sortie du mécanisme reliant la position linéaire du vérin et la position de la pince. Cette relation est non-linéaire car elle fait intervenir des fonctions trigonométriques de l'angle β . Bien évidemment, ce coefficient a une influence sur le comportement de l'asservissement et un choix sera fait sur la zone de fonctionnement qui sera linéarisée.

Q5.15. Est-il techniquement possible d'asservir le système sans ce capteur d'effort ? Expliquer le raisonnement.

Solution :

Bien qu'il ne soit pas possible de positionner un capteur d'effort, il est possible d'asservir cette grandeur. En effet, il est possible de trouver une grandeur image de l'effort normal par le biais par exemple de la mesure du courant électrique circulant dans l'induit du moteur. Ce courant est une image du couple moteur qui sera lui-même image de l'effort normal. Dans ce contexte, la relation non-linéaire du mécanisme sera une difficulté supplémentaire à surmonter si la mesure est indirecte.

Q5.16. Indiquer un moyen permettant de limiter le glissement de l'objet. Expliquer le raisonnement

Solution

Afin de limiter le glissement, il faut :

- Augmenter l'effort normal (et maîtriser également le rayon de la pièce soulevée)
- Jouer sur le couple de matériaux en contact afin de maximiser le coefficient d'adhérence

