

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2017

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

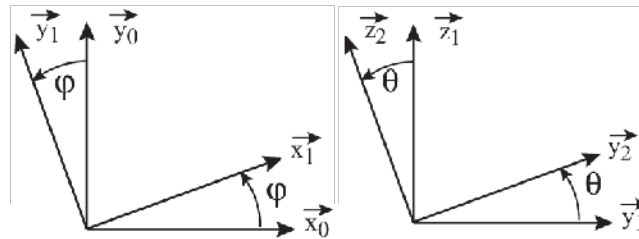
Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Question n°1

Les deux angles n'étant pas coplanaires, il faut dessiner deux figures de changement de bases.



$$\vec{OP} = D \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ D \cdot \cos \theta \\ D \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -D \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ D \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ D \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0} \Rightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} -D \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ D \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ D \cdot \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0}$$

Question n°2

Sur la figure 4 du sujet, les deux triangles (image de A, image de B, O) et (A, B, O) sont semblables, il est donc possible d'écrire la relation :

$$\frac{h}{H} = \frac{d}{D}$$

La distance D peut se déduire de la relation : $D = H \cdot \frac{d}{h}$ avec le cas particulier où $d = 100 \cdot h$, nous obtenons :

$$D = 100 \cdot H \quad \text{A. N.} \quad D = 100 \cdot 0,226 = 22,6 \text{ m}$$

Question n°3

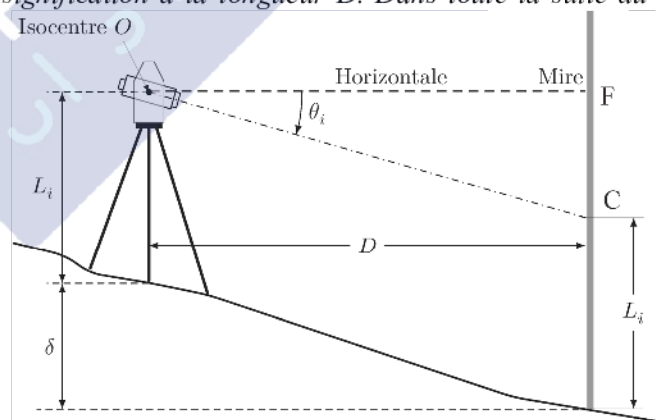
Remarque : les figures 2 et 4 ne donnent pas la même signification à la longueur D. Dans toute la suite du corrigé, nous utiliserons la définition de la figure 4.

Sur la figure 4, $CF = \delta$, le triangle (O, C, F) est rectangle en (F), nous avons donc la relation :

$$\delta = D \cdot |\tan \theta_i|$$

Remarque : la valeur absolue est nécessaire dans la mesure où δ est une distance (double flèche dans la figure 4) et l'angle θ_i est algébrique.

$$\text{A. N. : } \delta = 22,6 \cdot |\tan(-4,723^\circ)| = 1,867 \text{ m}$$



Question n°4

Avec la question n°2 : $\Delta D = \Delta H \cdot \frac{d}{h} \Rightarrow \Delta D = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,5 \text{ m}$

Avec : $\delta = D \cdot |\tan \theta_i|$, nous avons : $\Delta \delta = \Delta D \cdot |\tan \theta_i| + D \cdot \frac{\Delta \theta_i}{1 + \cos^2 \theta_i}$

Pour des angles faibles, il est possible d'avoir l'approximation suivante : $\Delta \delta \approx \Delta D \cdot |\tan \theta_i| + D \cdot \Delta \theta_i$

$$\text{A. N. : } \Delta \delta \approx 0,5 \cdot |\tan(4,723)| + 500 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \Delta \delta \approx 4,17 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

L'erreur relative est donc de : $\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{4,17 \cdot 10^{-2}}{1,867} = 0,0223 = 2,23 \%$

Cette erreur relative est supérieure à 0,01 %. Il n'est donc pas possible d'utiliser un théodolite pour réaliser les mesures de dénivelé si l'on souhaite une précision de 0,01 %.

Question n°5

Pour réaliser les tracés, il faut tenir compte de l'indice de réfraction de l'air et du verre avec la relation :

$$n_{\text{verre}} \cdot \sin(\theta_{\text{verre}}) = n_{\text{air}} \cdot \sin(\theta_{\text{air}})$$

L'angle d'entrée dans le verre est donc :

$$\sin(\theta_{\text{verre}}) = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} \cdot \sin(\theta_{\text{air}})$$

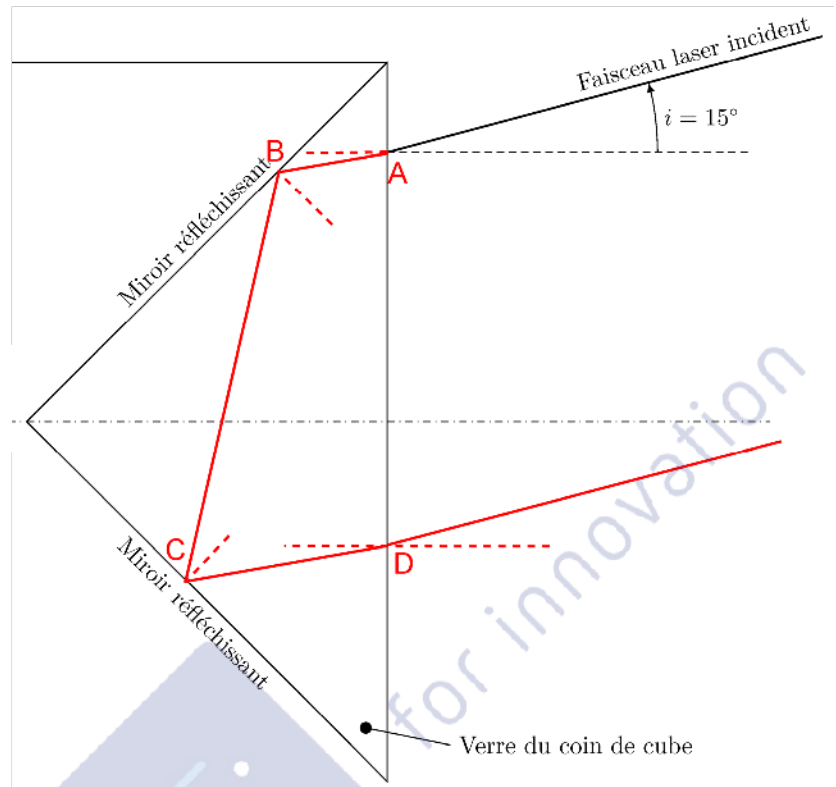
$$\sin(\theta_{\text{verre}}) = \frac{1,008}{1,52} \cdot \sin(15^\circ) = 0,1716$$

$$\theta_{\text{verre}} = 9,88^\circ$$

En B et en C, le faisceau est réfléchi avec le même angle par rapport à la normale.

Le faisceau (CD) est donc parallèle au faisceau (AB).

Le faisceau qui ressort du prisme a donc la même direction que le faisceau incident (ils sont parallèles).



Question n°6

La vitesse de déplacement du point de mesure (F) (défini à la question 3 du corrigé), situé à une distance D de l'isocentre, s'exprime par la relation : $V = D \cdot \dot{\phi}$. Cette vitesse doit correspondre à la vitesse de déplacement de l'opérateur.

On se place dans le cas le plus défavorable pour la vitesse angulaire : $D = D_{\text{mini}} = 1,5 \text{ m}$

$$\dot{\phi}_{\text{Maxi}} = \frac{V_{\text{Maxi}}}{D_{\text{mini}}} ; \dot{\phi}_{\text{ref}} = \frac{V_{\text{Maxi}}}{D_{\text{mini}}} \text{ (en rad/s)} \text{ ou } \dot{\phi}_{\text{ref}} = \frac{V_{\text{Maxi}}}{D_{\text{mini}}} \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi} \text{ (en tr/min)}$$

$$\text{A.N. : } \dot{\phi}_{\text{ref}} = \frac{5 \cdot 10^3}{60 \cdot 60 \cdot 1,5} \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi} = 8,84 \text{ tr/min}$$

Pour être certain que le système de visée suive le prisme optique, il faut que le rayon du prisme soit, au minimum, entièrement compris dans la résolution angulaire $\Delta\phi_{\text{ref}}$ (voir figure).

On se place dans le cas le plus défavorable : $D = D_{\text{Maxi}} = 500 \text{ m}$

$$\tan(\Delta\phi_{\text{ref}}) = \frac{R_{\text{Pr}}}{D} \Rightarrow \Delta\phi_{\text{ref}} = \arctan\left(\frac{R_{\text{Pr}}}{D_{\text{Maxi}}}\right)$$

$$\text{A.N. : } \Delta\phi_{\text{ref}} = \arctan\left(\frac{0,05}{500}\right) = 5,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 1,10 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Question n°7

Le codeur délivre 512 points (ou impulsions) (supposés équirépartis) pour un tour complet. Le comportement du codeur est supposé être linéaire (équirépartition des points), la fonction de transfert du codeur incrémental peut être modélisée par une constante. Si le 512^e points est obtenu pour un tour :

$$\frac{G_{\text{pl}}(\theta)}{\theta_{\text{ml}}(p)} = K_{\text{cl}} = \frac{512}{2 \cdot \pi} = 81,49 \text{ points/rad}$$

Question n°8

La vitesse angulaire d'azimut dépend de la vitesse de rotation du moteur et du réducteur :

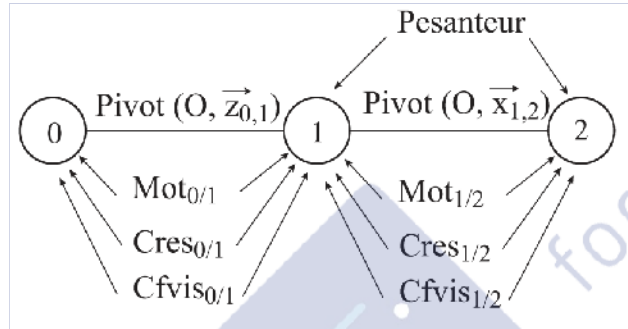
$$\dot{\phi}_{\text{Maxi}} = 7\,700 \cdot \frac{-2}{7} \cdot \frac{-1}{210} = 10,47 \text{ tr/min.}$$

Cette vitesse angulaire permet de valider le critère de suivi de trajectoire (car $10,47 \text{ tr/min} > 8,84 \text{ tr/min}$)

$$\Delta\phi = \frac{\rho_1}{K_{cl}} ; \Delta\phi = \frac{-2}{7} \cdot \frac{-1}{210} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{512} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Le critère de précision est également respecté (car $1,67 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \Delta\phi_{\text{ref}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$)

Question n°9



Question n°10

	Ensemble isolé	Equation scalaire	Justification
(E1)	1 & 2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{z}_{0,1})$ est nul dans la liaison pivot entre (0) et (1) (<i>les actions mécaniques dans les pivots n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.
(E2)	2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{x}_{1,2})$ est nul dans la liaison pivot entre (1) et (2) (<i>les actions mécaniques dans la pivot n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.

Question n°11

A) On isole (1 & 2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$:

$$\overrightarrow{\Sigma M_{\text{ext} \rightarrow 1 \cup 2}^O} \cdot \vec{z}_{0,1} = \left(\overrightarrow{\delta_{1/0}^O} + \overrightarrow{\delta_{2/0}^O} \right) \cdot \vec{z}_{0,1}$$

$$0 + 0 + \frac{k_1}{\rho_1} \cdot (c_{ml} + c_{rl} - f_{Eql} \cdot \dot{\phi}) = \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{1/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{2/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} \quad (\text{car } O \text{ est centre d'inertie des pièces 1 et 2}).$$

Remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur $\vec{z}_{0,1}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 0 et 1.

Avec $\vec{\sigma}_{2/0}^O = I(O,2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{bmatrix} J_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}_{(O,B_2)} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\phi} \cdot \cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)} = \begin{bmatrix} J_{x2} \cdot \dot{\theta} \\ J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\theta \\ J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ (car O est centre d'inertie)

de 2) ; de plus $\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$

$$\frac{k_1}{\rho_1} (c_{m1} + c_{r1} - f_{Eq1} \cdot \dot{\phi}) = J_{z1} \cdot \ddot{\phi} + \frac{d(J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2\theta + J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2\theta)}{dt}$$

$$c_{m1} + c_{r1} = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \ddot{\phi} + f_{Eq1} \cdot \dot{\phi} + \frac{d\left(J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2\theta + J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2\theta\right)}{dt}$$

Nous obtenons la première équation avec : $A_1 = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$, $B_1 = f_{Eq1}$; $C_{11} = J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$; $C_{12} = J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$

B) On isole (2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$:

$$\Sigma \vec{M}_{ext \rightarrow 2}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \frac{d(\vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2})}{dt} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \left(\frac{d\vec{x}_{1,2}}{dt}\right)_0 \quad (\text{car O est centre d'inertie de la pièce 2}).$$

$$0 + 0 + \frac{k_2}{\rho_2} (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_1 \quad (\text{remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O})$$

sur $\vec{x}_{1,2}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 1 et 2). $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$

$$\frac{k_2}{\rho_2} (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - (J_{y2} - J_{z2}) \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$c_{m2} + c_{r2} = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2} \cdot \ddot{\theta} + f_{Eq2} \cdot \dot{\theta} + (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2} \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(2\theta)$$

Nous obtenons la deuxième équation avec : $A_2 = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2}$, $B_2 = f_{Eq2}$; $C_2 = (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2}$

Question n°12

Dans le cas particulier où $\theta = 0^\circ$, nous obtenons :

$$c_{m1} + c_{r1} = A_1 \cdot \ddot{\phi} + B_1 \cdot \dot{\phi} + C_{12} \cdot \dot{\phi} \quad \& \quad c_{m2} + c_{r2} = A_2 \cdot \ddot{\theta} + B_2 \cdot \dot{\theta}$$

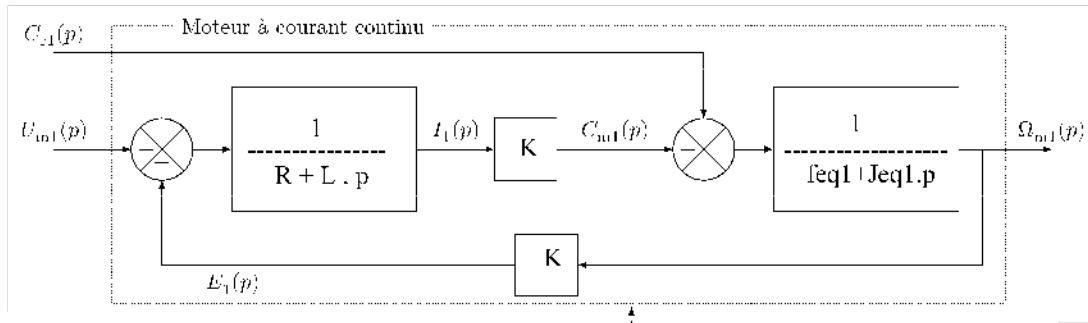
Nous pouvons donc définir : $J_{eq\phi} = A_1 + C_{12}$; $J_{eq\theta} = A_2$

Pour ramener ces moments d'inertie sur les axes des moteurs, il faut « égaliser les énergies cinétiques » :

$$\frac{1}{2} \cdot J_{eq\phi} \cdot \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{Eq1} \cdot \omega_{m1}^2 \Rightarrow J_{Eq1} = J_{eq\phi} \cdot \frac{\dot{\phi}^2}{\omega_{m1}^2} = J_{eq\phi} \cdot \rho_1^2 \Rightarrow J_{Eq1} = J_{eq\phi} \cdot \rho_1^2 = (A_1 + C_{12}) \cdot \rho_1^2$$

De la même façon, $J_{Eq2} = J_{eq\theta} \cdot \rho_2^2 = A_2 \cdot \rho_2^2$

Question n°13



Le bloc laissé vide dans le schémabloc général est un intégrateur dont la fonction de transfert est $\frac{1}{p}$. En effet, l'entrée de ce bloc est $\Omega_{m1}(p)$ alors que la sortie est $\theta_{m1}(p)$.

Question n°14.

La figure D du document réponse montre que, en régime établi, « l'intensité finale » est voisine de 0,2 A et ce pour les tensions de 4,9 V, 5,9 V et 6,9 V.

Avec l'équation $c_{m1}(t) = K \cdot i(t)$, nous savons que le couple moteur est proportionnel à l'intensité. Cela signifie que, en régime établi, le couple moteur ne dépend pas de la tension d'alimentation (donc de la vitesse de rotation du système) puisque l'intensité finale est toujours la même.

En régime établi, le couple moteur compense les frottements sec et visqueux. Comme ce couple moteur est constant pour la gamme de tension (donc de vitesse) testée, cela signifie que les frottements visqueux (qui dépendent de la vitesse) ne sont pas prépondérants par rapport au frottement sec.

Il est donc possible d'affirmer que le frottement visqueux équivalent a une influence négligeable (par rapport au couple de frottement sec).

Estimation du couple résistant

Les frottements visqueux étant négligeables, les équations précédentes donnent en régime permanent :

$$C_{r1}(t) = -C_{m1}(t) = -K \cdot i(t) \text{ A.N. : } C_{r1}(t) = -6,92 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = -1,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.m} \Rightarrow C_{r1}(t) = -1,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$$

Question n°15

En écrivant ce que l'on voit sur le schémabloc de la figure C, nous obtenons la relation :

$$\left\{ (U_{m1}(p) - K \cdot \Omega_{m1}(p)) \cdot \frac{K}{R} + C_{r1}(p) \right\} \cdot \frac{1}{J_{eq1} \cdot p} = \Omega_{m1}(p)$$

$$U_{m1}(p) \cdot \frac{K}{R \cdot J_{eq1} \cdot p} + C_{r1}(p) \cdot \frac{1}{J_{eq1} \cdot p} = \Omega_{m1}(p) \cdot \left\{ 1 + \frac{K^2}{R \cdot J_{eq1} \cdot p} \right\}$$

$$\left| U_{m1}(p) \cdot \frac{K}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} + C_{r1}(p) \cdot \frac{R}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} = \Omega_{m1}(p) \right. \quad \text{Avec} \quad \left| (U_{m1}(p) - K \cdot \Omega_{m1}(p)) \cdot \frac{1}{R} = I_1(p) \right.$$

$$\text{Nous obtenons : } U_{m1}(p) \cdot \frac{K}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} + C_{r1}(p) \cdot \frac{R}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} = \Omega_{m1}(p) = \frac{U_{m1}(p) - R \cdot I_1(p)}{K}$$

$$U_{m1}(p) \cdot \left(\frac{K^2}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} - 1 \right) + C_{r1}(p) \cdot \frac{K \cdot R}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} = -R \cdot I_1(p)$$

$$I_1(p) = U_{m1}(p) \cdot \left(\frac{J_{eq1} \cdot p}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} \right) - C_{r1}(p) \cdot \frac{K}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p}$$

$$I_1(p) = \frac{1}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} \cdot [U_{m1}(p) \cdot J_{eq1} \cdot p - C_{r1}(p) \cdot K]$$

Pour des entrées échelons, l'expression devient :

$$I_1(p) = \frac{1}{K^2 + R \cdot J_{eq1} \cdot p} \cdot \left[u_0 \cdot J_{eq1} - \frac{C_{r10}}{p} \cdot K \right]$$

Par transformée de Laplace inverse, l'intensité, dans le domaine temporel, s'écrit :

$$i_1(t) = \frac{u_0 \cdot J_{eq1}}{R \cdot J_{eq1}} \cdot e^{-t \cdot \frac{K^2}{R \cdot J_{eq1}}} - \frac{C_{r10} \cdot K}{K^2} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{K^2}{R \cdot J_{eq1}}} \right)$$

$$i_1(t) = \frac{u_0}{R} \cdot e^{-t \cdot \frac{K^2}{R \cdot J_{eq1}}} - \frac{C_{r10}}{K} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{K^2}{R \cdot J_{eq1}}} \right) = \frac{u_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{C_{r10}}{K} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Question n°16

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{-1}{T_1} \cdot \left\{ \frac{u_0}{R} + \frac{C_{r10}}{K} \right\} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

A $t = 0+$, la pente de la courbe d'intensité est :

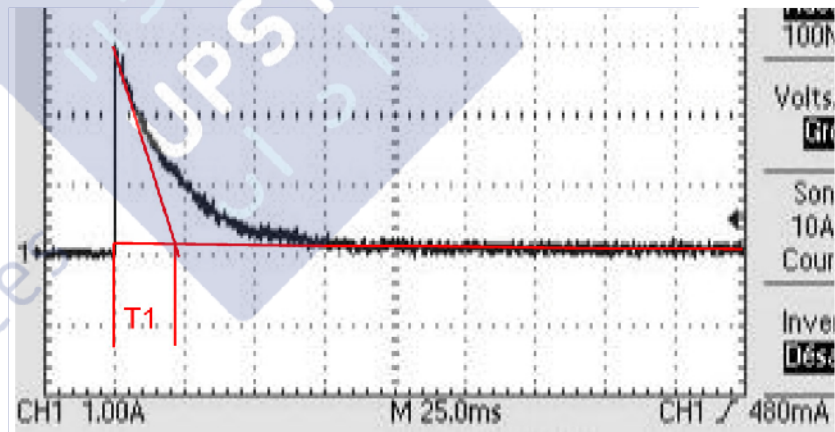
$$\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{-1}{T_1} \cdot \left\{ \frac{u_0}{R} + \frac{C_{r10}}{K} \right\}$$

Avec $i_1(t=0+) = \frac{u_0}{R}$ et

$i_1(t \rightarrow +\infty) = -\frac{C_{r10}}{K}$, cela signifie que la tangente à l'origine coupe la valeur asymptotique pour $t = T_1$

Le zoom de la figure D, permet de mesurer $T_1 \approx 22 \text{ ms}$

Avec $T_1 = \frac{R \cdot J_{eq1}}{K^2}$, $J_{eq1} = \frac{K^2 \cdot T_1}{R}$



A.N. : $J_{eq1} = \frac{(6,92 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 22 \cdot 10^{-3}}{1,94} = 5,43 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

Question n°17

Le hacheur est modélisable (avec les hypothèses du sujet) par un système proportionnel dont le gain s'écrit :

$K_{h1} = \frac{U_0}{2^9 - 1}$ A.N. : $K_{h1} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ V/point}$

Question n°18

Les blocs Adaptateur, Codeur incrémental et Réducteurs sont modélisés par des systèmes proportionnels, il est donc possible d'écrire la relation temporelle :

$$\varepsilon_1(t) = \varphi_c(t) \cdot K_{ad1} - \frac{K_{cl}}{\rho_1} \cdot \varphi(t)$$

Pour obtenir $\varepsilon_1(t_\infty) = 0$ lorsque $\varphi_c(t_\infty) = \varphi(t_\infty)$, il faut $K_{ad1} = \frac{K_{cl}}{\rho_1}$

Question n°19

Sur la figure C, nous « lisons » :

$$\left\{ \left(\Phi_c(p) \cdot K_{ad1} - \frac{K_{cl}}{\rho_1} \cdot \Phi(p) \right) \cdot \frac{K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K}{K^2 + R \cdot J_{Eq1} \cdot p} + C_{r1}(p) \cdot \frac{R}{K^2 + R \cdot J_{Eq1} \cdot p} \right\} \cdot \frac{\rho_1}{p} = \Phi(p)$$

En regroupant et en utilisant la relation de la question n°18

$$\Phi_c(p) \cdot \frac{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}{(K^2 + R \cdot J_{Eq1} \cdot p) \cdot p} + C_{r1}(p) \cdot \frac{R \cdot \rho_1}{(K^2 + R \cdot J_{Eq1} \cdot p) \cdot p} = \Phi(p) \left(1 + \frac{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}{(K^2 + R \cdot J_{Eq1} \cdot p) \cdot p} \right)$$

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_c(p) \cdot K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1 + C_{r1}(p) \cdot R \cdot \rho_1}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1 + K^2 \cdot p + R \cdot J_{Eq1} \cdot p^2}$$

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_c(p) + C_{r1}(p) \cdot \frac{R \cdot \rho_1}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}}{1 + \frac{K^2}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1} \cdot p + \frac{R \cdot J_{Eq1}}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1} \cdot p^2}$$

Nous obtenons : $K_{lr} = \frac{R \cdot \rho_1}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}$; $a_1 = \frac{K^2}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}$; $b_1 = \frac{R \cdot J_{Eq1}}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}$

En utilisant K_{cl} à la place de K_{ad1} , nous obtenons :

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_c(p) + C_{r1}(p) \cdot \frac{R \cdot \rho_1}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K}}{1 + \frac{K}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl}} \cdot p + \frac{R \cdot J_{Eq1}}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K} \cdot p^2} ;$$

$$K_{lr} = \frac{R \cdot \rho_1}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K} ; a_1 = \frac{K}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl}} ; b_1 = \frac{R \cdot J_{Eq1}}{K_{cl} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K}$$

La fonction de transfert globale du schémabloc de la figure C est du second ordre. Un système de second ordre est inconditionnellement stable si tous les coefficients du dénominateur sont strictement positifs. Les coefficients a_1 , b_1 , K_{lr} sont strictement positifs si K_{p1} est lui-même strictement positif (les autres coefficients intervenant dans ces expressions sont strictement positifs).

Question n°20

$$\varsigma(p) = \Phi_c(p) - \Phi(p) = \Phi_c(p) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} \right\} - \frac{K_{lr}}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} \cdot C_{r1}(p)$$

$$\varsigma(p) = \Phi_c(p) \cdot \frac{p \cdot (a_1 + b_1 \cdot p)}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} - \frac{K_{lr}}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} \cdot C_{r1}(p)$$

Pour les signaux donnés : $\varsigma(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (a_1 + b_1 \cdot p)}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} - \frac{K_{lr}}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} \cdot \frac{C_{r10}}{p}$

Question n°21

Le système étudié (sa modélisation) étant stable, il est possible d'appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\Delta\varphi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \zeta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \zeta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{\Omega_{c0}}{p^2} \cdot \frac{p \cdot (a_1 + b_1 \cdot p)}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} - \frac{K_{lr}}{1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p^2} \cdot \frac{C_{rl0}}{p} \right)$$

$$\Delta\varphi = a_1 \cdot \Omega_{c0} - K_{lr} \cdot C_{rl0} = \frac{K^2 \cdot \Omega_{c0} - R \cdot \rho_1 \cdot C_{rl0}}{K_{ad1} \cdot K_{p1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}$$

$$\text{Soit : } K_{p1} = \frac{K^2 \cdot \Omega_{c0} - R \cdot \rho_1 \cdot C_{rl0}}{\Delta\varphi \cdot K_{ad1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1} \quad K_{p1 \text{ mini}} = \frac{K^2 \cdot \Omega_{c0} - R \cdot \rho_1 \cdot C_{rl0}}{\Delta\varphi_{\text{Maxi}} \cdot K_{ad1} \cdot K_{hl} \cdot K \cdot \rho_1}$$

$$\text{A.N. } K_{p1 \text{ mini}} = \frac{(6,92 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2,78 \cdot 10^{-3} + 1,94 \cdot \frac{2}{7.210} \cdot 1,3 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{81,49}{2} \cdot 1,17 \cdot 6,92 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2}{7.210}} = 5,4 \cdot 10^{-2}$$

Question n°22

Un correcteur proportionnel ne modifie pas la courbe de phase du diagramme de Bode. Or à $\omega_1 = 2 \cdot 10^4$ rad/s la phase de la FTBO non corrigée (donc également pour la FTBO corrigée avec un correcteur proportionnel) vaut sensiblement -180° . Il n'est donc pas possible d'avoir une phase de -135° à cette pulsation qui pourrait assurer la marge de phase souhaitée.

Un correcteur proportionnel ne permet pas de satisfaire le critère de marge de phase.

Question n°23

La phase de la FTBO non corrigée à $\omega_1 = 2 \cdot 10^4$ rad/s vaut -180° . Pour assurer une marge de phase de 45° à cette pulsation, le correcteur à avance de phase doit apporter une phase de $\varphi_m = +45^\circ$ à cette pulsation.

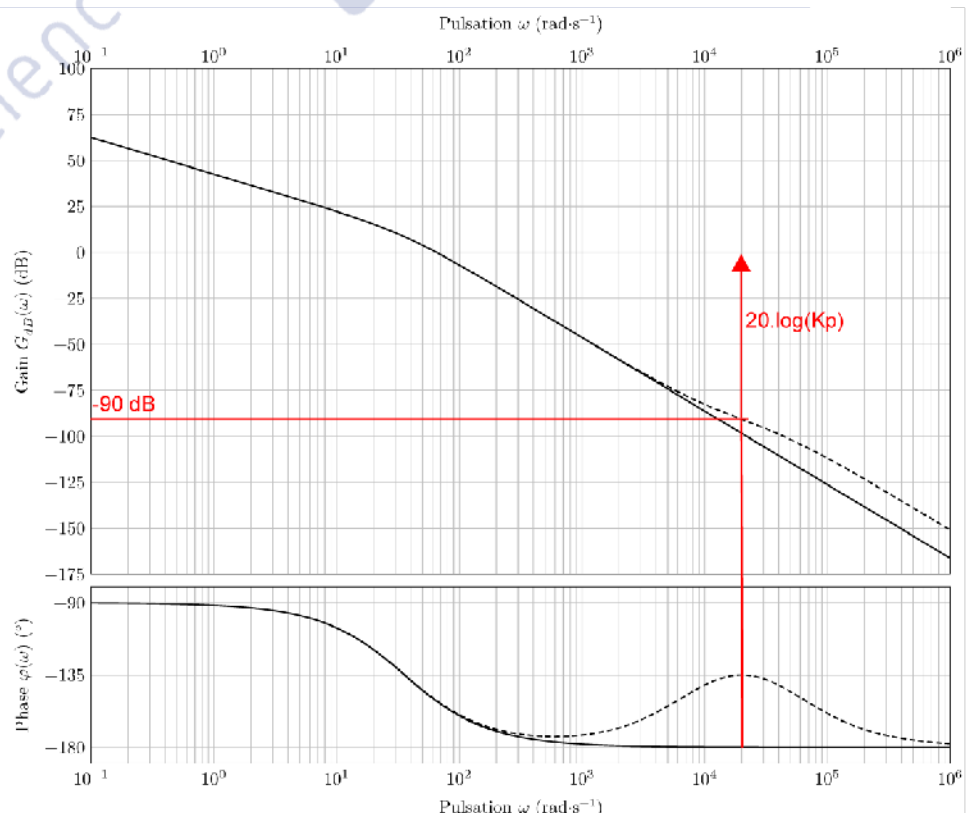
$$a = \frac{1 + \sin(45^\circ)}{1 - \sin(45^\circ)} = 5,83 \text{ et } T_d = \frac{1}{\omega_1 \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{5,83}} = 2,07 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Question n°24

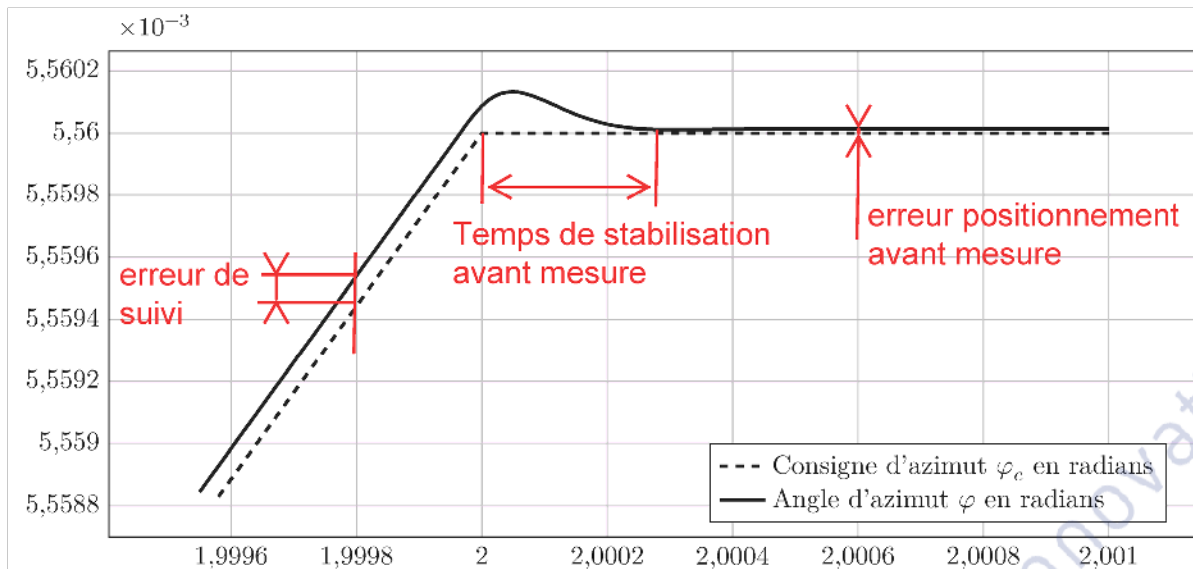
Pour que la marge de phase soit vérifiée, il faut que le gain (en dB) de la FTBO corrigée soit nul à $\omega_1 = 2 \cdot 10^4$ rad/s.

Pour cela, il faut monter la courbe de la FTBO de 90 dB : $20 \cdot \log(K_p) = 90$ dB, soit :

$$K_p = 10^{\frac{90}{20}} = 3,16 \cdot 10^4$$



Question n°25



La courbe de simulation permet de valider :

- l'exigence 1.2.2 « erreur de suivi » qui doit être inférieure à 10^{-4} rad . Sur la courbe de simulation (dans la rampe) il est possible de mesurer cette erreur de suivi qui est d'environ 10^{-7} rad . Ce critère est donc validé ;
- l'exigence 1.2.1 « positionnement avant mesure ». L'erreur doit être inférieure à $\frac{0,0001}{500} = 2 \cdot 10^{-7}$ rad . Sur la courbe de simulation (dans la partie de consigne constante), il est possible de relever une erreur de positionnement avant mesure d'environ $\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-8}$ rad . Ce critère est donc respecté ;
- l'exigence 1.2.1 « temps avant mesure ». La stabilisation doit être atteinte moins d'une seconde après l'arrêt du déplacement. Sur la courbe de simulation, le temps d'arrêt est d'environ 0,3 ms . Ce critère est donc respecté.

Question n°26

Les écarts L-C et S-C ont été respectivement quantifiés dans les questions Q4 & Q.7 (pour L-C) et Q25 (pour S-C).

L'écart S-L n'a pas été mesuré. Cette démarche permettrait de valider le modèle par rapport au système réel qui pourrait être intéressant en cas de reconception du produit ou de fabrications d'une gamme de produit dont les critères de performances seraient différents.