

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2017

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

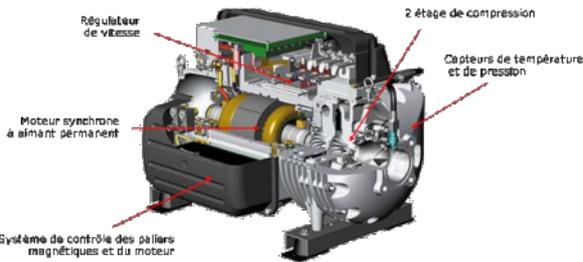
Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI



MODELISATION D'UNE MACHINE FRIGORIFIQUE CORRIGE UPS – UPSTI



1 MODELISATION DU CYCLE FRIGORIFIQUE

1.1 Questions préalables sur le principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Question 1.

Le fluide reçoit de l'énergie pendant la compression $w_{12} > 0$, la source chaude est réchauffée par le fluide, qui fournit donc de l'énergie thermique $q_{23} < 0$ et la source froide est refroidie par le fluide donc $q_{41} > 0$.

Question 2.

Le transfert thermique se fait des zones de forte température vers les zones de plus faible température. Dans le condenseur, le transfert se fait du fluide vers la source chaude, la température du fluide est donc plus élevée que celle de la source chaude. Dans l'évaporateur, le transfert se fait de la source froide vers le fluide, la température du fluide est donc plus faible que celle de la source.

Question 3.

La source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude est la pièce dans laquelle se trouve le réfrigérateur.

1.2 Questions préalables sur l'expression utile du premier principe

Question 4.

Le débit massique $D_m = \mu Sv$ avec μ la masse volumique du fluide et S la section de l'écoulement.

Question 5.

En régime permanent, le débit massique se conserve. La section étant supposée constante, le produit « vitesse x masse volumique » est constant ; la masse volumique est donc minimale là où la vitesse du fluide est maximale donc ici juste avant la compression.

Question 6.

Graphiquement, $\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 440 - 387 = 53 \text{ kJ kg}^{-1}$. La vitesse et la masse volumique sont connues à l'entrée du compresseur, la masse volumique est connue à la sortie ce qui permet de calculer la vitesse du fluide à la sortie du compresseur $v_2 = 0,09 \text{ ms}^{-1}$ et donc $\Delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -0,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$ qui est 100 fois plus petite que la variation d'enthalpie, la variation d'énergie cinétique massique est donc négligeable devant la variation d'enthalpie massique.

Question 7.

Une estimation de la variation d'énergie potentielle massique sur le compresseur avec $\Delta z = 30 \text{ cm}$ fournit $\Delta(gz) = 3 \text{ kJ kg}^{-1}$ qui est 10 fois plus petite que la variation d'enthalpie massique.

1.3 Lecture du diagramme et intérêt de la vaporisation

Question 8.

Graphiquement $T_{\text{sat}}(P_{bp}) = -30^\circ\text{C}$ et $T_1 = -20^\circ\text{C}$ soit $T_1 - T_{\text{sat}}(P_{bp}) = 10^\circ\text{C}$.

Question 9.

De même, $T_{\text{sat}}(P_{hp}) = 40^\circ\text{C}$ et $T_3 = 30^\circ\text{C}$ soit $T_3 - T_{\text{sat}}(P_{hp}) = -10^\circ\text{C}$.

Question 10.

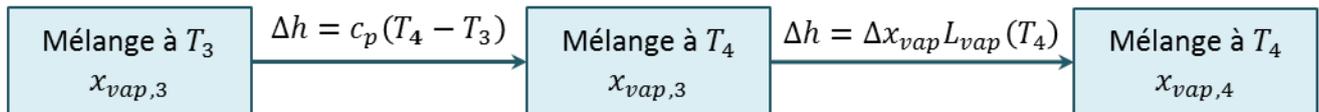
Il n'y a pas de pièces mobiles donc le travail reçu pendant la transformation dans le détendeur est nul et les parois sont calorifugées, il n'y a donc pas de chaleur reçue ; la variation d'enthalpie est donc nulle $\Delta h_{34} = 0$.

Question 11.

Dans la première partie, le fluide est à l'état liquide, la courbe est verticale, la température est donc constante $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ et $\Delta h = 0$.

Question 12.

L'enthalpie étant une fonction d'état, la transformation est « décomposable » de la manière suivante :



La première phase correspond au changement de température du fluide, en considérant la capacité thermique massique identique dans les deux phases.

La seconde phase correspond à la vaporisation d'une partie du fluide :

$$\Delta h = \left((1 - x_{vap,4})h_{liq}(T_4) + x_{vap,4}h_{vap}(T_4) \right) - \left((1 - x_{vap,3})h_{liq}(T_4) + x_{vap,3}h_{vap}(T_4) \right)$$

Soit $\Delta h = (x_{vap,4} - x_{vap,3}) (h_{vap}(T_4) - h_{liq}(T_4)) = \Delta x_{vap} L_{vap}(T_4)$.

Ce qui fournit $\Delta h_{34} = C_p(T_4 - T_3) + \Delta x_{vap} L_{vap}(T_4)$.

Question 13.

À $T_4 = -30^\circ C$, $h_{liq}(T_4) = 162 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et soit $L_{vap}(T_4) = 218 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Comme $\Delta h = 0$, $T_4 - T_3 = -\frac{L_{vap}(T_4)\Delta x_{vap}}{c_p}$. En relevant graphiquement $x_{vap} = 0,37$, on obtient $T_4 - T_3 = -80^\circ C$ alors que $T_3 = 30^\circ C$ et $T_4 = -30^\circ C$ et donc $T_4 - T_3 = 60^\circ C$. Il y a une nette différence...

Remarque : en exploitant le sous refroidissement, il est possible d'évaluer la capacité thermique massique $c_p = 1,4 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$, la variation de température obtenue est alors de $-57^\circ C$ ce qui est plus proche de celle obtenue graphiquement.

1.4 Hypothèses simplificatrices et efficacité de la machine.

Question 14.

Il est nécessaire de négliger les pertes de charges.

Question 15.

La transformation doit être adiabatique et réversible. On néglige les phénomènes dissipatifs.

Question 16.

L'énergie massique couteuse correspond à l'énergie massique fournie par le compresseur au fluide w_{12} . L'énergie massique utile est l'énergie que l'on retire à la source froide pour la maintenir froide q_{41} .

Graphiquement, $w_{12} = \Delta h_{12} = 53 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $q_{41} = \Delta h_{41} = 146 \text{ kJ.kg}^{-1}$ soit $e = 2,7$.

Question 17.

Sur un cycle supposé réversible : $\Delta h = w_{12} + q_{23} + q_{41} = 0$ et $\Delta s = \frac{q_{41}}{T_f} + \frac{q_{23}}{T_c}$ soit $q_{23} = -\frac{T_c}{T_f} q_{41}$ et donc $e = \frac{q_{41}}{w_{12}} =$

$$\frac{q_{41}}{q_{41} \left(\frac{T_c}{T_f} - 1 \right)} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 7,4.$$

L'efficacité réelle est nécessairement inférieure à celle de Carnot. Les sources d'irréversibilité sont les phénomènes dissipatifs (frottements), la rapidité des transformations, la diffusion thermique au niveau des sources chaude et froide...

Question 18.

Si la transformation n'est pas réversible, l'entropie varie, plus exactement elle augmente $\Delta s = s_{créée} > 0$, ce qui se traduit par une augmentation de Δh_{12} et donc de w_{12} , l'efficacité diminue donc.

Question 19.

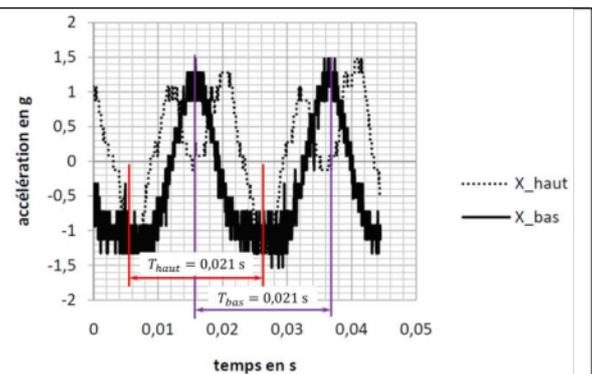
Le sous-refroidissement permet de diminuer h_3 et donc h_4 , ce qui permet d'augmenter q_{41} et donc d'augmenter l'efficacité.

2 MODELISATION DES VIBRATIONS GENEREES LORS DU FONCTIONNEMENT

2.1 Analyse expérimentale à l'aide d'accéléromètres

Question 20.

Pour chacun des accéléromètres on mesure une période quasiment équivalente de 0,021 s. La fréquence est de $\frac{1}{0,021} = 47,6 \text{ Hz}$. Cette fréquence est proche de la fréquence du réseau électrique (50 Hz).



Question 21.

De manière analogique, il est possible d'utiliser un filtre RC pour réaliser un filtrage des hautes fréquences.

De manière numérique plusieurs techniques permettent de filtrer un signal bruité :

- Utilisation de la moyenne glissante sur k échantillons :
 - soit un signal de n échantillons,
 - pour $i \in [k, n]$ on substitue l'échantillon i par la moyenne des échantillons compris entre $i - k$ et k .
 - Inconvénient : on a alors un retard de k échantillons entre la valeur filtrée et la valeur actuelle du signal.
- Utilisation d'un filtre numérique (d'ordre 1 par exemple) :
 - On note $e(t)$ le signal bruité et $s(t)$ le signal filtré. Le filtrage passe bas peut être modélisé par une équation différentielle d'ordre 1 : $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$. En utilisant un schéma d'intégration d'Euler, on obtient l'équation de récurrence suivante : $s_k = \frac{\tau}{\tau + \Delta t} s_{k-1} + \frac{\Delta t}{\tau + \Delta t} e_k$. τ est la constante de temps du filtre et Δt est la période d'échantillonnage du signal bruité initial.

Question 22.

L'analyse des courbes montre que :

- suivant \vec{x} , l'accélération varie entre $-g$ et g ;
- suivant \vec{y} , l'accélération varie entre $-0,7g$ et $0,7g$;
- suivant \vec{z} , l'accélération varie entre $-0,2g$ et $0,2g$ (ne devrait-elle pas fluctuer autour de g ?).

Même si l'accélération suivant \vec{y} n'est pas négligeable, l'accélération suivant \vec{x} est quand même prépondérante. Cela peut s'expliquer par le fait que, d'après la figure, le piston se translate suivant \vec{x} . Par ailleurs, le mouvement du système bielle-manivelle s'effectuant dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , on peut émettre l'hypothèse que la rotation autour de \vec{y} est négligeable.

Remarque : je ne comprends pas vraiment ce que le rédacteur de sujet attend par « l'effet de la translation suivant \vec{x} est prépondérant devant celui (...) de la rotation autour de \vec{y} ».

Question 23.

Le système bielle-manivelle est dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) . Le vilebrequin tourne autour de \vec{z} . Les accélérations mesurées suivant \vec{z} sont négligeables par rapport aux autres. On peut donc faire l'hypothèse d'un problème plan dans (\vec{x}, \vec{y}) .

Question 24.

Les 4 ressorts sont en parallèle. En conséquence la raideur du ressort équivalent est de 80 N/mm .

On isole la pièce 1.

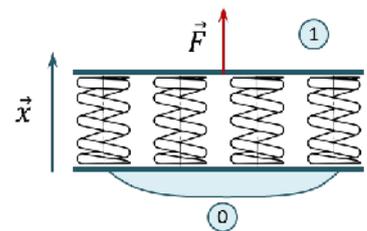
Bilan des actions mécaniques :

- effort \vec{F} ;
- action des ressorts : $\vec{F}_r = k(x - x_0)$.

On applique le théorème de la résultante statique dans la direction \vec{x} :

- $F + 4k(x - x_0) = 0$.

En conséquence, le ressort équivalent a une raideur de $4k = 80 \text{ N/mm}$.



Question 25.

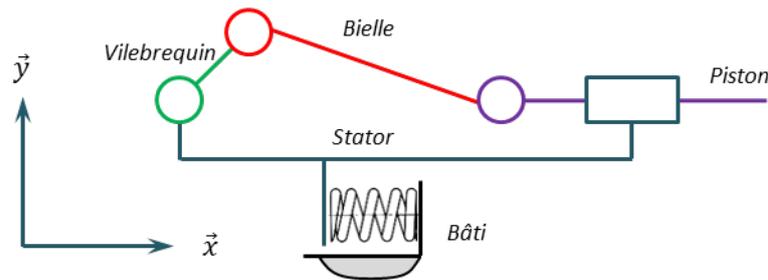
- Les blocs utilisés dans la modélisation causale traduisent les équations différentielles issues de la physique. Par essence, ces équations différentielles expriment un lien de causalité (en réalisant un TMD autour d'un axe fixe, on exprime que $C = J \frac{d\omega}{dt}$, ce qui signifie que la vitesse de rotation du solide est la conséquence de l'existence d'un couple). Ainsi, en schéma bloc par exemple, la grandeur physique d'entrée est la cause de la grandeur physique de sortie. On associe donc une grandeur physique aux liens et ceux-ci sont orientés. Le modèle n'est pas réversible.
- En modélisation acausale, ce sont des énergies qui transitent dans les liens (ces énergies sont caractérisées par des couples (flux, effort)). L'énergie n'est pas « orientée » et peut aller dans les deux sens. La notion de réversibilité est ainsi plus aisée à modéliser.

Question 26.

- Bilan des solides :
 - Bâti, stator, rotor et vilebrequin, bielle, piston.
- Bilan des liaisons :
 - « ressort », pivot (motorisée), pivot rotor-bielle, pivot bielle-piston, glissière piston-stator.

Remarque : le bloc « motorisation » pourrait être en accord avec le fait que le modèle soit « multiphysique ».

Question 27.



Question 28.

- Grandeurs d'effort : forces (N) & moment des forces (couple) (Nm).
- Grandeur de flux : vitesse de translation (m/s) et taux de rotation (rad/s).

Question 29.

Le modèle comme la mesure sont des signaux périodiques de l'ordre de 0,025 s (en adéquation avec le taux de rotation : 2500 tours/min correspond à un tour toutes les 0,024 seconde). Les valeurs maximales et minimales de l'accélération sont du même ordre de grandeur (de -4g à 3 g).

En revanche, la forme du signal n'est pas tout à fait la même. Cela peut s'expliquer par les frottements présents dans le système réel, les jeux dans les liaisons ou encore du choix de la modélisation entre le stator et le bâti (raideur et position des ressorts).

Question 30.

Si on estime que le modèle du compresseur est conforme au compresseur réel, on observe que la liaison entre le rotor et le stator est motorisée. Il est alors possible d'ajouter un capteur de vitesse sur le piston.

On réalise des simulations pour des vitesses de rotor comprises entre 1 et 3000 tours par minutes et on mesure l'accélération atteinte par le piston. Si on observe une augmentation de l'amplitude de l'accélération, on détermine ainsi la fréquence de résonance du système.

Remarques :

- le système a un seul degré de liberté, il n'y a donc qu'une fréquence de résonance ;
- il est possible que la résonance apparaisse en dehors d'un spectre de vitesse compris entre 1 et 3000 tours par minute. Dans ce cas, on n'aura pas de résonance dans le cycle d'utilisation du système ;
- je ne pense pas qu'il soit possible de tracer un diagramme de Bode dans Matlab à partir d'un modèle causal ...

3 CONSOMMATION ELECTRIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE MONOPHASE : UNE ETUDE EXPERIMENTALE

Question 31.

On mesure une amplitude au démarrage de 3,6V. En régime permanent, on mesure une amplitude de 0,4V. Le facteur de surintensité est donc de $3,6/0,4 = 9$.

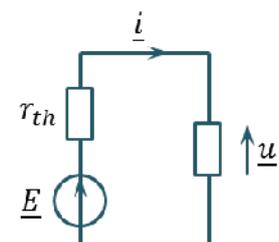
Question 32.

Le schéma électrique est donné ci-contre. En utilisant un pont diviseur de tension, on obtient : $\underline{u} = \underline{E} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + r_{th}}$ avec $\underline{Z} = -jY$.

Remarque : $\underline{Z} = -jY$ paraît étonnant pour un système très inductif tel qu'un moteur asynchrone.

En régime permanent, il est dit que $Y \gg r_{th}$ ce qui implique $\underline{u} = \underline{E}$. Par lecture du graphique on a $E = u = 185V$.

En exploitant le démarrage, $|\underline{u}| = |\underline{E}| \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z} + r_{th}|}$ soit $r_{th} = Y \sqrt{\frac{E^2}{U^2} - 1} = 4\Omega$ en prenant $U = 170 V$ (lecture graphique).



Question 33.

Une demande trop forte en courant peut provoquer une coupure (disjoncteur) pour l'ensemble des appareils ou une baisse de courant dans les autres appareils en parallèle.

Question 34.

Le courant circulant dans le fil crée un champ magnétique variable engendrant une force électromotrice induite, il s'agit d'un phénomène d'induction et la loi donnant la force électromotrice induite est la loi de Faraday. Les paramètres influençant le facteur de proportionnalité entre le courant mesuré et la tension délivrée sont la section de la bobine torique, le nombre de spires de cette bobine et la position du fil par rapport à la pince ampèremétrique.

Question 35.

Le déphasage est lié aux évolutions temporelles des signaux, la position du fil ne remet pas en cause la proportionnalité entre le courant et la tension, seulement la valeur du coefficient de proportionnalité, cela n'a donc pas d'incidence sur le déphasage.

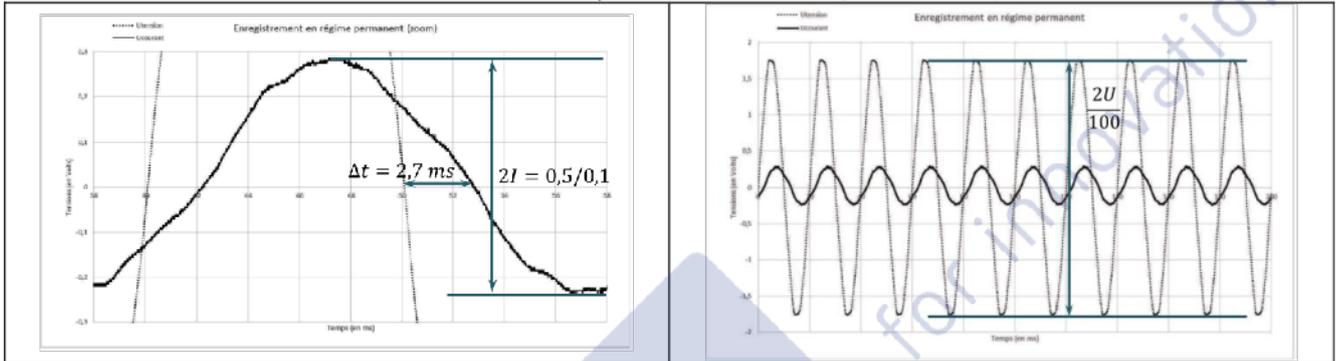
Question 36.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} UI \cos \varphi$$

Question 37.

Il est nécessaire d'estimer sur ces graphes les amplitudes des tensions pour déterminer U et I et le déphasage entre les deux. Le quadrillage des graphes peu précis, l'épaisseur des traits engendre des incertitudes. Il est possible de les diminuer en faisant une mesure crête à crête pour les amplitudes. La figure 14 permet d'être plus précis sur la mesure de l'amplitude du courant et du déphasage qui sera plus précise en exploitant les points où les courbes coupent l'axe des abscisses (utiliser le passage au max n'est pas optimal).

On relève $U = 173 \text{ V}$, $I = 2,6 \text{ A}$ et $\Delta t = 2,7 \text{ ms}$ soit $\Delta \varphi = 0,85 \text{ rad}$ soit une puissance de $\langle P \rangle = 148 \text{ W}$.

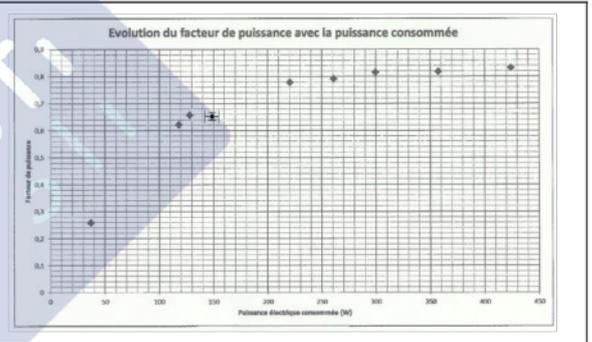


Question 38.

En utilisant un double décimètre pour faire la mesure de ce déphasage, l'erreur de mesure peut être estimée à 1mm (compte tenu de l'épaisseur des traits), ce qui correspond à une erreur sur le retard de $\frac{1}{10} \text{ ms}$ et sur le déphasage de $2\pi \frac{1}{10} \frac{1}{20} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ soit une incertitude (en divisant par $\sqrt{3}$) de 0,02 rad. Donc $0,83 \leq \Delta \varphi \leq 0,87$.

En calculant les cosinus, $0,64 \leq \cos \Delta \varphi \leq 0,67$ soit une incertitude de 0,02.

En procédant de la même manière que les mesures de U et I , les incertitudes sont respectivement de 2V et 0,06 A.



Ce qui fournit les incertitudes relatives :

- 1,1% sur la tension
- 2,3% sur le courant
- 3% sur le facteur de puissance

La source d'incertitude principale est celle sur le déphasage (mais elles sont assez comparables...)

En utilisant la propagation des incertitudes

$$\frac{\Delta \langle P \rangle}{\langle P \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \cos \Delta \varphi}{\cos \Delta \varphi}\right)^2}$$

l'incertitude relative sur la puissance vaut 4% ce qui fournit une incertitude de 5,9W.

Question 39.

À puissance fixée, plus le facteur de qualité est élevé plus le courant appelé est faible et plus les pertes Joule en ligne sont faibles.

4 COMMANDE DE LA VARIATION EN TEMPERATURE

Question 40.

Pour le système bouclé non corrigé, l'écart statique pour une entrée échelon est :

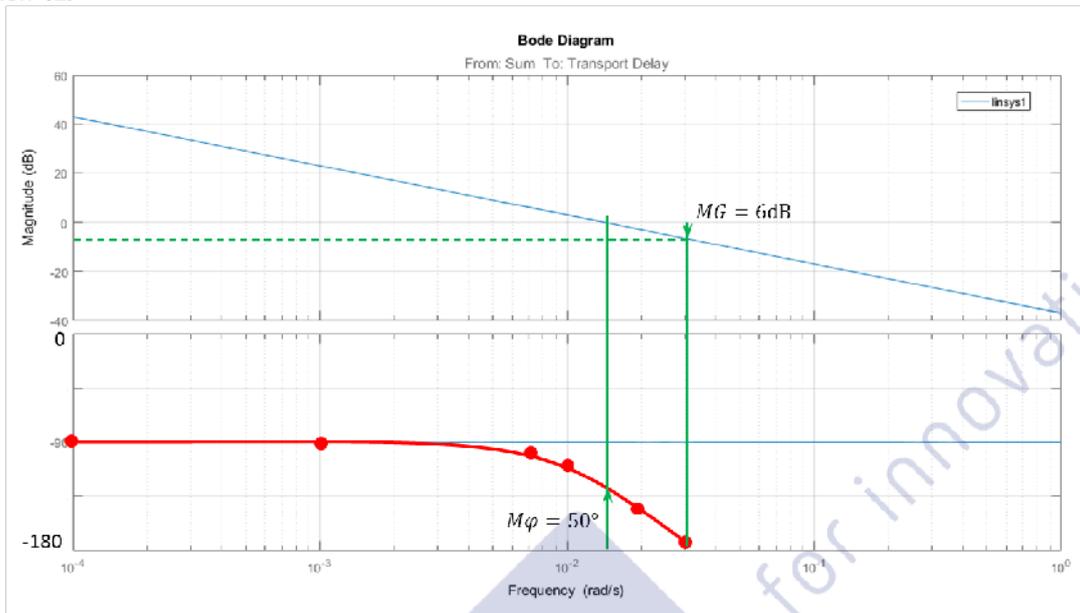
$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K_{pro} e^{-Tp}}{1 + T_{pro} p}} \frac{E_0}{p} = \frac{E_0}{1 + K_{pro}}$$

Ainsi l'ajout d'un correcteur ayant une partie intégrale permet d'annuler l'écart statique. L'action proportionnelle permet de stabiliser le système.

Question 41.

Le pôle dominant du système est $-\frac{1}{T_{pro}}$. Afin de compenser ce pôle, on peut donc prendre naturellement $T_i = T_{pro}$.

Question 42.



Question 43.

À l'aide du diagramme de Bode tracé à la question précédente, on peut mesurer la marge de gain : $MG = 6$ dB et une marge de phase de $M\varphi = 50^\circ$.

Question 44.

Méthode graphique

La marge de gain est déjà supérieure à 50° .

Pour avoir une marge de gain supérieure à 8 dB, il faut « descendre » la courbe de gain de 2 dB. Il faut donc un gain K tel que $20 \log K = -2$ dB $\Rightarrow K = 10^{-\frac{2}{20}} = 0,79$.

Remarque : « descendre » la courbe de gain va « décaler vers la gauche » le croisement avec l'axe des abscisses et contribue à augmenter la marge de gain.

Méthode analytique

On cherche la pulsation ω' pour laquelle $\varphi(\omega') = -\frac{\pi}{2}$. L'intégrateur présente un déphasage de 90° et le retard un déphasage de $-T\omega$. On a donc $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - T\omega$; on a donc $-\frac{\pi}{2} - T\omega' = -\pi \Leftrightarrow \omega' = \frac{\pi}{2T} = \frac{\pi}{2 \cdot 5,0} = 0,0314$ rad/s.

Le gain décibel vaut $G_{db}(\omega) = 20 \log \frac{KK_{pro}}{T_i\omega}$. On désire une marge de gain de 12 dB. On a donc $20 \log \frac{KK_{pro}}{T_i\omega'} = -12 \Rightarrow \frac{KK_{pro}}{T_i\omega'} = 10^{-\frac{12}{20}} \Leftrightarrow K = \frac{T_i\omega'}{K_{pro}} 10^{-\frac{12}{20}} = \frac{120 \cdot 0,0314}{1,7} 10^{-\frac{12}{20}} = 0,56$.

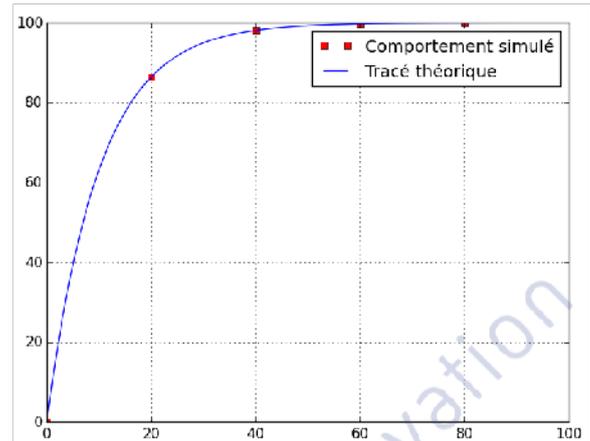
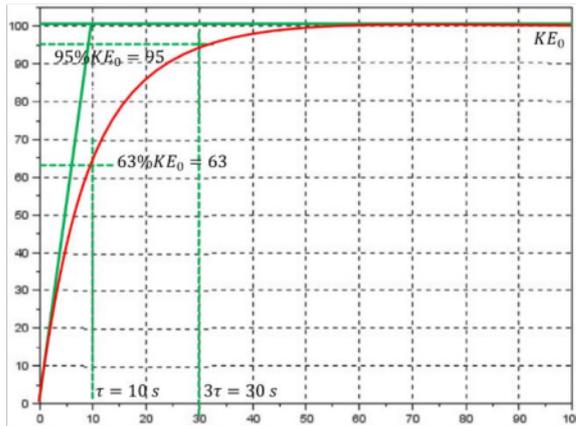
Question 45.

Pour le correcteur prédictif, l'écart maximum en régime transitoire est de $2,5^\circ\text{C}$ alors qu'il est de 5°C avec le correcteur PI. Le correcteur prédictif est donc le plus apte à atténuer les effets de la perturbation.

En revanche, on constate que pour les deux correcteurs l'objectif de d'avoir un écart de 0°C après 3 seconde n'est pas respecté.

Question 46.

Question 47.



Question 48.

```

1 ****définition des constantes***
2 n=1500 #nombre échantillon
3 tf= 1500#durée de la simulation
4 w=[i for i in range(0,tf,tf/n)] # définition du vecteur temps
5 Tech=tf/n;# calcul de la periode d'échantillonnage
6 Km=1.7; Tm=120; am=exp(-Tech/Tm); bm=1-am;
7 Kp=1.7; Tp=120; ap=exp(-Tech/Tp); bp=1-ap;
8 TRBF=145; lh=1-exp(-Tech*3/TRBF);
9 *** initialisation***
10 MV=(n)*[0]; CV=(n)*[0]; Sm=(n)*[0]; DV=(n)*[0]; SP=(n)*[0]; r=60;
11 ***Programmation de la commande prédictive***
12 for ii in range(2+r,tf,1):
13     if ii<700:
14         DV[ii]= 0
15     else:
16         DV[ii]=5
17     SP[ii]=-18
18     Sm[ii]=am*Sm[ii-1]+bm*Km*MV[ii-1]
19     CV[ii]=ap*CV[ii-1]+bp*(Kp*MV[ii-1-r]+DV[ii])
20     MV[ii]=(fse[ii].(cv[ii]+(Sm[ii]-Sm[ii-r])*1))*lh+Sm[ii]*bm)/(Km*bm)
21     if MV[ii]>20:
22         MV[ii]=20
23     elif MV[ii]< -20:
24         MV[ii]= -20
    
```

Perturbation de 5°C

Saturation

La perturbation a une amplitude de 5°C. Elle arrive à l'index 700.

Question 49.

Nous avons ici $am=ap=0,9917$ et $bm=bp=8,29.10^{-3}$

En observant l'algorithme, nous obtenons les valeurs suivantes :

SP[801]	Sm[801]	CV[801]	MV[801]
-18	-19,819	-15,642	-13,158

Question 50.

On constate que CV diminue entre les instants 800 et 801, donc que la température est en train de se rapprocher de -18°C.