teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2021

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Etude d'un générateur houlomoteur en vue d'un contrôle optimal

Corrigé UPSTI

1 Introduction et présentation du système

2 Etude de la houle

Objectif

L'objectif de cette partie est de démontrer quelques particularités de la houle et d'estimer, dans le cadre d'une profondeur infinie, la puissance théorique récupérable par le système de génératrice houlomotrice.

Question 1 Quels sont les endroits du globe intéressants où placer une génératrice houlomotrice pour alimenter les villes ?

Les endroits intéressants du globe pour installer une génératrice houlomotrice se situent à la latitude 50° Sud où l'on peut espérer récupérer plus de 120kW par an pour un front d'onde de 1m de large.

2.1 Propriétés cinématiques de la houle

Question 2 Ecrire l'équation de la surface libre de la vague $z = \eta(x,t)$. On prendra $\eta = 0$ pour $t = 0$ et $x = \frac{\lambda}{4}$.

On a $\eta(x,t) = a \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On respecte bien $\eta = 0$ pour $t = 0$ et $x = \dfrac{\lambda}{4}$, l'onde se propage suivant la direction $\overrightarrow{e_x}$ positif.

Question 3 Ecrire la loi locale de conservation de la masse en fonction de $\overrightarrow{v_f}$.

Pour ce fluide incompressible la conservation de la masse indique $\text{div}(\overrightarrow{v_f}) = 0$.

Question 4 En utilisant le caractère irrotationnel de l'écoulement, montrer, par analogie avec l'électrostatique, qu'il existe un potentiel $\phi(x,z,t)$ qui vérifie en tout point du domaine fluide $\Delta\phi = 0$.

Par caractère irrotationnel de l'écoulement $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{v_f}) = \overrightarrow{0}$.

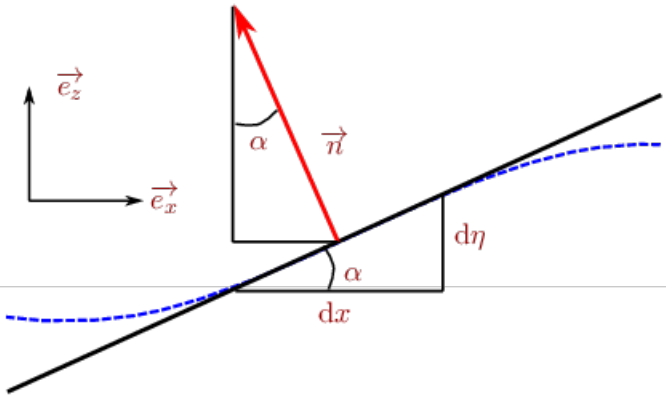
Il existe alors un potentiel ϕ tel que $\overrightarrow{v_f} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ car l'égalité $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)) = \overrightarrow{0}$ est toujours vérifiée.

La conservation de la masse devient alors $\text{div}(\overrightarrow{v_f}) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)) = 0$ soit $\Delta\phi = 0$.

Question 5 Montrer, à l'aide d'un schéma, que pour tout point de la surface libre $\alpha \approx \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ et $\overrightarrow{n} \approx \overrightarrow{e_z} - \alpha\overrightarrow{e_x}$.

En prenant un élément de longueur $\mathrm{d}l$ de la surface libre faisant un angle $\alpha(x,t)$ avec la ligne horizontale on a le schéma suivant (à t fixé) :

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



On lit alors $\tan(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$ et $\overrightarrow{n} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_z} - \sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}$. La cambrure de la houle étant petite on linéarise les fonctions trigonométriques ce qui donne $\alpha \approx \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ (avec t non fixé) et $\overrightarrow{n} \approx \overrightarrow{e_z} - \alpha\overrightarrow{e_x}$.

Question 6 Montrer qu'au premier ordre, cette relation s'écrit $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\eta}$.

Sur la surface libre et au premier ordre on a :

$$\overrightarrow{v_f} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi) \cdot \overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\eta}\overrightarrow{e_z}\right) \cdot (\overrightarrow{e_z} - \alpha\overrightarrow{e_x}) = -\alpha\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\eta}.$$

En négligeant le terme en α (car $\alpha \ll 1$ rad) on retrouve le résultat demandé dans l'énoncé.

Question 7 Ecrire la condition d'imperméabilité vérifiée par ϕ au niveau du fond de l'eau supposé plat.

Si le fond de l'eau est supposé plat la condition d'imperméabilité s'écrit :

$$\overrightarrow{v_f}(x, z = -d, t) \cdot \overrightarrow{e_z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-d} = 0$$

Question 8 Montrer que $\varphi(z)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi(z) = A \cdot \cosh(k \cdot z) + B \cdot \sinh(k \cdot z)$ où A et B sont deux constantes réelles.

Le laplacien du potentiel ϕ s'écrit $\Delta\phi = 0 = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$. Cela revient alors à écrire :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} - k^2\varphi(z)\right)\sin(k \cdot x - \omega \cdot t) = 0$$

Cette égalité étant vraie pour tout x et pour tout t la fonction φ vérifie alors l'équation différentielle linéaire du second ordre $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2} - k^2\varphi(z) = 0$ dont la forme de la solution peut s'écrire sous la forme proposée par l'énoncé.

Question 9 En combinant les relations (3), (4) et (5), montrer que la relation de dispersion de la houle s'écrit $\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(k \cdot d)$.

On a $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega\varphi(z)\cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ et on rappelle que $\eta(x,t) = a \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ donc les relations (3), (4) et (5) deviennent :

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

$$(A\cdot k\cdot\sinh(k\cdot\eta)+B\cdot k\cdot\cosh(k\cdot\eta))\sin(k\cdot x-\omega\cdot t) = a\cdot\omega\cdot\sin(k\cdot x-\omega\cdot t) \quad (3)$$
$$-\omega\,(A\cdot\cosh(k\cdot\eta)+B\cdot\sinh(k\cdot\eta))\cos(k\cdot x-\omega\cdot t) = -g\cdot a\cdot\cos(k\cdot x-\omega\cdot t) \quad (4)$$
$$(A\cdot k\cdot\sinh(-k\cdot d)+B\cdot k\cdot\cosh(-k\cdot d))\sin(k\cdot x-\omega\cdot t) = 0 \quad (5)$$

Ces relations étant vraies pour tout x et pour tout t on peut simplifier les relations :

$$A\cdot k\cdot\sinh(k\cdot\eta)+B\cdot k\cdot\cosh(k\cdot\eta) = a\cdot\omega \quad (3)$$
$$-\omega\,(A\cdot\cosh(k\cdot\eta)+B\cdot\sinh(k\cdot\eta)) = -g\cdot a \quad (4)$$
$$A\cdot\sinh(-k\cdot d)+B\cdot\cosh(-k\cdot d) = 0 \quad (5)$$

L'équation (5) donne $B = A\cdot\tanh(k\cdot d)$. On réinjecte dans les équations (3) et (4) :

$$A\cdot\sinh(k\cdot\eta)+A\cdot\tanh(k\cdot d)\cdot\cosh(k\cdot\eta) = \frac{a\cdot\omega}{k} \quad (3)$$
$$A\cdot\cosh(k\cdot\eta)+A\cdot\tanh(k\cdot d)\cdot\sinh(k\cdot\eta) = \frac{g\cdot a}{\omega} \quad (4)$$
$$B = A\cdot\tanh(k\cdot d) \quad (5)$$

(3)/(4) donne $\dfrac{\sinh(k\cdot\eta)+\tanh(k\cdot d)\cdot\cosh(k\cdot\eta)}{\cosh(k\cdot\eta)+\tanh(k\cdot d)\cdot\sinh(k\cdot\eta)} = \dfrac{\omega^2}{g\cdot k}$. Avec les identités hyperboliques on se ramène à :

$$\tanh[k(d+\eta)] = \frac{\omega^2}{g\cdot k}$$

En supposant $d \gg \eta$ on obtient la relation de dispersion $\omega^2 = g\cdot k\cdot\tanh(k\cdot d)$.

Question 10 Que devient la relation précédente ?

On a dans ce cas $k\cdot d = 2\pi\dfrac{d}{\lambda} \gg 1$ donc en passant à la limite $k\cdot d\to+\infty$ on a $\omega^2 = g\cdot k$.

Question 11 En déduire l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_f$ d'une particule fluide.

$$\overrightarrow{v_f} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{v_f}(x,z,t) = a\cdot\omega\cdot e^{k\cdot z}\cos(k\cdot x-\omega t)\overrightarrow{e_x} + a\cdot\omega\cdot e^{k\cdot z}\sin(k\cdot x-\omega t)\overrightarrow{e_z}$$

Question 12 Calculer $x_1(t)$ et $z_1(t)$ et en déduire, en justifiant, l'équation cartésienne et la nature de la trajectoire d'une particule fluide M de coordonnées (x,z).

De mon point de vue on a déjà établi la trajectoire du point M en déterminant complètement le vecteur vitesse d'une particule fluide.

2.2 Aspect énergétique

Question 13 Exprimer la puissance élémentaire $\mathrm{d}P_f$ des forces de pression des particules fluides situées au niveau de la surface $\mathrm{d}S$ de largeur unitaire à l'aide de l'équation (1). Donner son expression en fonction des variables $\phi, z, u = \overrightarrow{v}_f\cdot\overrightarrow{e}_x$ et des constantes caractéristiques de l'écoulement.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

On a $\mathrm{d}P_f = p(x,z,t) \times \mathrm{d}S \times u$ et avec la relation (1) et un élément de surface de largeur unitaire :

$$\mathrm{d}P_f = -\rho\left(g \cdot z + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \times 1 \times \mathrm{d}z \times u$$

Question 14 Calculer l'expression de la puissance houlomotrice dans le cas d'une profondeur infinie $d \to \infty$ et pour $k \cdot \eta \ll 1$.

Connaissant ϕ et $\overrightarrow{v_f}$ on a $\mathrm{d}P_f = -\rho\left(g \cdot z - \frac{a \cdot \omega^2}{k} \mathrm{e}^{k \cdot z} \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)\right) \times a \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{k \cdot z} \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)\mathrm{d}z$ donc :

$$P_w = \frac{-\rho \cdot g \cdot a}{T} \underbrace{\int_0^T \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)\mathrm{d}t}_{\text{0 par périodicité du cos}} \int_{-d}^{\eta} z \cdot \mathrm{e}^{k \cdot z}\mathrm{d}z + \frac{\rho \cdot a^2 \omega^3}{k \cdot T} \underbrace{\int_0^T \cos^2(k \cdot x - \omega \cdot t)\mathrm{d}t}_{\frac{T}{2} \text{ résultat classique}} \int_{-d}^{\eta} \mathrm{e}^{2k \cdot z}\mathrm{d}z$$

Tout calcul fait : $P_w = \frac{\rho \cdot a^2 \omega^3}{4k^2}\left(\mathrm{e}^{2k \cdot \eta} - \mathrm{e}^{-2k \cdot d}\right)$. Or $k \cdot \eta \ll 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{2k \cdot \eta} \approx 1$ et $d \to +\infty \Rightarrow \mathrm{e}^{-2k \cdot d} \to 0$ donc $\boxed{P_w \approx \frac{\rho \cdot a^2 \omega^3}{4k^2}}$.

Question 15 À l'aide de la relation de dispersion trouvée à la question 10, montrer que l'on peut écrire $P_w = \rho \frac{a^2 g^2}{8\pi} T$.

La relation de dispersion donne $k = \frac{\omega^2}{g}$ donc $P_w = \frac{\rho \cdot a^2 g^2}{4\omega}$. Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ cela donne $\boxed{P_w = \rho \frac{a^2 g^2}{8\pi} T}$.

Question 16 Comment évolue la puissance houlomotrice avec la fréquence de l'onde ? Est-ce conforme à d'autres domaines de la physique ? Justifier.

La fréquence de l'onde est inversement proportionnelle à sa période donc si la fréquence est grande alors la puissance récupérable est faible.

On s'attendrait plutôt à avoir plus de puissance récupérable si pour une même amplitude de houle on avait une fréquence plus élevée.

Question 17 Calculer la valeur numérique de la puissance houlomotrice potentiellement récupérable. Valider le résultat avec les données de la figure 5.

AN : $P_w = 1000 \times \frac{1^2 \times 10^2}{8\pi} \times 8 \approx 10\text{kW}$. Cette puissance correspond aux zones les moins intéressantes en terme de récupération d'énergie sur la figure 5.

3 Mise en place du modèle dynamique du système

Objectif

On cherche dans cette partie à mettre en place un modèle de comportement dynamique de la structure soumise à la houle. On vise notamment à montrer que le comportement suivant l'axe de pilonnement est découplé des autres mouvements.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

3.1 Paramétrage du système

Question 18 Exprimer x_f et z_f en fonction de x_e, z_e, z, θ et des caractéristiques géométriques du système.

$\overrightarrow{H_0G_F} = \overrightarrow{H_0O} + \overrightarrow{OG_E} + \overrightarrow{G_EH_1} + \overrightarrow{H_1G_F}$, donc après linéarisation à l'ordre 1 :

$$\overrightarrow{H_0G_F} = \underbrace{[x_e(t) - c \cdot \theta]}_{x_f(t)} \overrightarrow{e_x} + \underbrace{[z_e(t) + z(t)]}_{z_f(t)} \overrightarrow{e_z}$$

3.2 Mise en place de l'action du fluide

Question 19 Donner l'expression de la résultante des actions mécaniques du fluide sur le flotteur en fonction de la pression p.

Si toute la base du flotteur touche l'eau alors la résultante des actions mécaniques du fluide sur le flotteur s'écrit $\overrightarrow{R_{\text{fluide}\to\text{flotteur}}} = \int_{\text{surface immergée}} -p \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal sortant du flotteur au point d'intégration considéré.

Détermination de l'action hydrostatique du fluide

Question 20 Donner l'autre nom de l'effort hydrostatique sur l'embase et son expression générale en fonction de V, volume du solide immergé.

C'est la force d'Archimède et elle vaut $\overrightarrow{F}_{hs\to E} = \rho \cdot g \cdot V \overrightarrow{e_z}$.

Question 21 Expliquer la signification de cette équation.

Le volume V immergé pour une position quelconque est égal au volume immergé auquel on retire le volume qui est sorti de l'eau lors du passage de l'état d'équilibre à l'état courant, et pour une approximation aux petits angles.

Question 22 En déduire une expression de la hauteur h_M en fonction de z_e, r_M, α et θ.

On veut $h_M = \overrightarrow{\epsilon}(M_0) \cdot \overrightarrow{e_z}$, or $\overrightarrow{\epsilon}(O) \cdot \overrightarrow{e_z} = z_e$ car c'est le déplacement vertical du point O pour passer de la position d'équilibre à la position courante.

De plus $\left(\overrightarrow{M_0O} \wedge \theta \overrightarrow{e_y}\right) \cdot \overrightarrow{e_z} = -r_M\theta \cdot \cos(\alpha)$. Donc $\boxed{h_M = z_e - r_M\theta \cdot \cos(\alpha)}$.

Question 23 Montrer alors que l'effort hydrostatique du fluide sur l'embase peut s'écrire $\overrightarrow{F}_{hs\to E} = (\rho g V_0 - \rho g \pi r^2 z_e) \overrightarrow{\epsilon}_z$.

$\overrightarrow{F}_{hs\to E} = \rho \cdot g \cdot V \overrightarrow{e_z} = \rho \cdot g \left(V_0 - \int_{r_M=0}^{r} \int_{\alpha=0}^{2\pi} h_M \cdot r_M \mathrm{d}r_M \mathrm{d}\alpha\right) \overrightarrow{e_z}$. Or :

$$\int_{r_M=0}^{r} \int_{\alpha=0}^{2\pi} h_M \cdot r_M \mathrm{d}r_M \mathrm{d}\alpha = \underbrace{\int_{r_M=0}^{r} \int_{\alpha=0}^{2\pi} z_e \cdot r_M \mathrm{d}r_M \mathrm{d}\alpha}_{\pi \cdot r^2 z_e} - \underbrace{\int_{r_M=0}^{r} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \theta \cdot r_M^2 \cos(\alpha) \mathrm{d}r_M \mathrm{d}\alpha}_{0 \text{ par périodicité du cos}}$$

Finalement $\boxed{\overrightarrow{F}_{hs\to E} = \rho \cdot g \left(V_0 - \pi \cdot r^2 z_e\right) \overrightarrow{e_z}}$.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 24 Par analogie, exprimer l'effort hydrostatique du fluide sur le flotteur $\overrightarrow{F}_{hs\to F}$. La géométrie du flotteur est définie dans l'annexe 1.

On pose ici $V_0 = \pi(R^2 - r^2)d_F$ le volume du flotteur immergé à l'équilibre. L'expression de h_M devient $h_M = z_f - r_M \cdot \theta \cdot \cos(\alpha)$ avec $z_f = z_e + z$. En reprenant le même calcul que précédemment en intégrant le rayon de r à R on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{hs\to F} = \rho \cdot g \left(\pi(R^2 - r^2)d_F - \pi \cdot (R^2 - r^2)(z_e + z)\right)\overrightarrow{e_z}}$$

Question 25 A l'aide des dimensions de l'annexe 1, déterminer les expressions des positions verticales des points B_0 et O, notées respectivemebnt $Z_{B_0}^{(E)}$ et $Z_G^{(E)}$ dans le repère $(H_0, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$.

Avec les dimensions fournies on a $\boxed{Z_G^{(E)} = \overrightarrow{H_0O} \cdot \overrightarrow{e_z} = -c}$ par lecture directe sur l'annexe 1.

Pour calculer $Z_{B_0}^{(E)}$ on passe par la formule du barycentre :

$$\rho\left[\pi R_p^2 h_{Ep} + \pi r^2(d_E - h_{Ep})\right]\overrightarrow{OB_0} = m_{tot}\underbrace{\overrightarrow{OG_E}}_{\overrightarrow{0}} - \rho\pi r^2(h_{Ec} - d_E + h_{Ec})\overrightarrow{OG_{air}}$$

avec G_{air} le centre de gravité de la partie de la colonne située hors de l'eau. Avec $\overrightarrow{OG_{air}} = \left(c + \dfrac{h_{Ec} - d_E + h_{Ec}}{2}\right)\overrightarrow{e_z}$ on trouve finalement :

$$\overrightarrow{OB_0} = -\frac{R_p^2 h_{Ep} + r^2(d_E - h_{Ep})}{r^2(h_{Ec} - d_E + h_{Ec})}\left(c + \frac{h_{Ec} - d_E + h_{Ec}}{2}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Donc $\boxed{Z_{B_0}^{(E)} = \overrightarrow{H_0B_0} \cdot \overrightarrow{e_z} = -c - \dfrac{R_p^2 h_{Ep} + r^2(d_E - h_{Ep})}{r^2(h_{Ec} - d_E + h_{Ec})}\left(c + \dfrac{h_{Ec} - d_E + h_{Ec}}{2}\right)}$.

REMARQUE : d'après les définitions qui sont données pour $O = G_E$ et $C = B_0$ à l'équilibre, le point B_0 devrait se trouver en dessous du point O sur la figure 11 puisque B_0 est le centre de gravité du volume d'eau déplacé tandis que G_E est le centre de gravité de l'embase complet.

Question 26 Exprimer $\overrightarrow{G_EC}$ en fonction de $\overrightarrow{G_EB_1}$, $\overrightarrow{G_EB_2}$, V_0 et ΔV.

Par formule du barycentre et avec ΔV pouvant être positif ou négatif on a :

$$\rho(V_0 + \Delta V)\overrightarrow{G_EC} = \rho V_0\overrightarrow{G_EB_1} + \rho\Delta V\overrightarrow{G_EB_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{G_EC} = \frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\overrightarrow{G_EB_1} + \frac{\Delta V}{V_0 + \Delta V}\overrightarrow{G_EB_2}$$

Question 27 Déterminer $\overrightarrow{G_EB_1}$ en fonction de $Z_G^{(E)}$, $Z_{B_0}^{(E)}$ et θ dans la base $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$.

On a $\overrightarrow{OB_0} = \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right)\overrightarrow{e_z}$ en position d'équilibre, donc en position quelconque $\overrightarrow{G_EB_1} = \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right)\overrightarrow{e_{z_1}}$ par conservation de la distance. Dans la base fixe et avec l'approximation aux petits angles on a :

$$\overrightarrow{G_EB_1} = \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right)\overrightarrow{e_z} + \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right)\theta\overrightarrow{e_x}$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 28 Montrer alors que le moment $\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E}$ s'écrit au premier ordre sous la forme

$$\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E} = -\rho g \left[\left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) V_0 + \frac{\pi \cdot r^4}{4} \right] \theta \overrightarrow{e_y}$$

Par définition de $\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E}$ et d'après l'expression de $\overrightarrow{G_EC}$ issue de $\overrightarrow{G_EB_1}$ et $\overrightarrow{G_EB_2}$ on a :

$$\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E} = -\rho g \left[\left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) + \frac{\Delta V}{V_0 + \Delta V} \left(c - \frac{r^2}{4 \cdot z_e} \right) \right) \cdot \left(V_0 - \pi r^2 z_e \right) \right] \theta \overrightarrow{e_y}$$

Or d'après la question 23 on identifie $\Delta V = -\pi r^2 z_e$ donc :

$$\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E} = -\rho g \left[V_0 \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) + \Delta V \left(c - \frac{r^2}{4 \cdot z_e} \right) \right] \theta \overrightarrow{e_y}$$

avec $\Delta V = -\pi r^2 z_e$ l'expression devient :

$$\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E} = -\rho g \left[V_0 \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) + \Delta V \cdot c + \frac{\pi r^4}{4} \right] \theta \overrightarrow{e_y}$$

On rappelle que $Z_G^{(E)} = c$ et en supposant $\Delta V \ll V_0$ on obtient l'expression du moment au premier ordre :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E} = -\rho g \left[V_0 \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) + \frac{\pi r^4}{4} \right] \theta \overrightarrow{e_y}}$$

Question 29 En ingénierie maritime, l'action hydrostatique est souvent appelée raideur hydrostatique. Expliquer ce vocabulaire à partir de son expression analytique, en faisant une analogie mécanique.

On regarde d'abord la force $\overrightarrow{F}_{hs\to E}$, son expression est analogue à la force de rappel d'un ressort de "raideur" ρg et "d'élongation" $(V_0 - \pi \cdot r^2 z_e)$.

Le moment $\overrightarrow{M}_{G_E,hs\to E}$ est assimilable au couple de rappel d'un ressort de torsion de raideur

$\rho g \left[V_0 \left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)} \right) + \frac{\pi r^4}{4} \right]$.

Modèle de l'action hydrodynamique du fluide

Modèle de l'action du récupérateur d'énergie

3.3 Modèle dynamique

Question 30 Donner la forme des matrices d'inertie de l'embase et du flotteur en leur centre de gravité.

L'embase est un solide de révolution autour de l'axe $\overrightarrow{e_{z1}}$, donc sa matrice d'inertie prend la forme suivante dans la base $(\overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_{z1}})$:

$$I(G_E, E) = \begin{pmatrix} I_{y,E} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y,E} & 0 \\ 0 & 0 & B_E \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_{z1}})}$$

teaching sciences UPSTI for innovation

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

De même pour le flotteur de centre d'inertie G_F :

$$I(G_F,F)=\begin{pmatrix} I_{y,F} & 0 & 0\\ 0 & I_{y,F} & 0\\ 0 & 0 & B_F\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{ex1},\overrightarrow{ey},\overrightarrow{ez1})}$$

Question 31 En déduire l'expression de $I_{y,F}$, moment d'inertie du flotteur au point G_F autour de la direction $\overrightarrow{e}_y$. Vous donnerez le résultat en fonction de m_F et des caractéristiques dimensionnelles données en annexe 1.

En prenant l'inertie du flotteur complet à laquelle on retire la contribution du cylindre de rayon r correspondant à l'embase on a :

$$I_{y,F}=m_F\frac{R^2}{4}+m_F\frac{h_F^2}{12}-\left(m_{creux}\frac{r^2}{4}+m_{creux}\frac{h_F^2}{12}\right)$$

avec $m_{creux}=m_F\dfrac{r^2}{R^2}$ la masse du cylindre creux. Tout calcul fait :

$$\boxed{I_{y,F}=m_F\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)+m_F\frac{h_F^2}{12}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}$$

Question 32 Calculer le torseur dynamique de l'ensemble Σ au point G_E par rapport au repère galiléen, en linéarisant à l'ordre 1. Vous exprimerez le résultat en fonction des dérivées des paramètres (x_e,z_e,θ,z) et des constantes géométriques et inertielles du problème.

Calcul de la résultante dynamique :

On a $\overrightarrow{OG_E}=x_e(t)\overrightarrow{e_x}+z_e(t)\overrightarrow{e_z}$ donc $\overrightarrow{\Gamma}_{G_E,E/R_0}=\ddot{x}_e(t)\overrightarrow{e_x}+\ddot{z}_e(t)\overrightarrow{e_z}$.

De plus $\overrightarrow{OG_F}=\overrightarrow{OH_0}+\overrightarrow{H_0G_F}=c\overrightarrow{e_z}+x_f(t)\overrightarrow{e_x}+z_f(t)\overrightarrow{e_z}$ donc $\overrightarrow{\Gamma}_{G_F,F/R_0}=\ddot{x}_f(t)\overrightarrow{e_x}+\ddot{z}_f(t)\overrightarrow{e_z}$. La résultante dynamique vaut donc :

$$\overrightarrow{Rd}_{\Sigma/R_0}=m_E\overrightarrow{\Gamma}_{G_E,E/R_0}+m_F\overrightarrow{\Gamma}_{G_F,F/R_0}$$

Avec les expressions de x_f et z_f obtenues en **Question 18** on a

$$\boxed{\overrightarrow{Rd}_{\Sigma/R_0}=m_E\left(\ddot{x}_e\overrightarrow{e_x}+\ddot{z}_e\overrightarrow{e_z}\right)+m_F\left(\left[\ddot{x}_e-c\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{e_x}+\left[\ddot{z}_e+\ddot{z}\right]\overrightarrow{e_z}\right)}$$

Calcul du moment dynamique au point G_E :

On a $\overrightarrow{\delta}_{G_E,E/R_0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_{G_E,E/R_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_{G_E,E/R_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge\overrightarrow{\sigma}_{G_E,E/R_0}$ avec $\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}=\dot{\theta}\overrightarrow{e_y}$.

De plus $\overrightarrow{\sigma}_{G_E,E/R_0}=I(G_E,E)\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}=I_{y,E}\dot{\theta}\overrightarrow{e_y}$ donc $\boxed{\overrightarrow{\delta}_{G_E,E/R_0}=I_{y,E}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_y}}$.

De manière similaire $\overrightarrow{\delta}_{G_F,F/R_0}=I_{y,F}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_y}$. Par formule de Varignon

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta}_{G_E,F/R_0} &= \overrightarrow{\delta}_{G_F,F/R_0}+\overrightarrow{G_EG_F}\wedge m_F\overrightarrow{\Gamma}_{G_F,F/R_0}\\ &= I_{y,F}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_y}+\left[-c\cdot\theta\overrightarrow{e_x}+(c+z)\overrightarrow{e_z}\right]\wedge m_F\left(\left[\ddot{x}_e-c\cdot\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{e_x}+\left[\ddot{z}_e+\ddot{z}\right]\overrightarrow{e_z}\right)\end{aligned}$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

soit au final

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}_{G_E,F/R_0} = \left[I_{y,F}\ddot{\theta} + m_F \cdot c^2 \cdot \ddot{\theta} - m_F \cdot c \cdot \ddot{x}_e\right]\overrightarrow{e_y}}$$

Conclusion :

On a calculé le torseur dynamique de l'ensemble Σ : $\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_0}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{Rd}_{\Sigma/R_0} \\ \overrightarrow{\delta}_{G_E,E/R_0} + \overrightarrow{\delta}_{G_E,F/R_0} \end{array}\right\}_{G_E}$

Question 33 Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au système Σ.

Le principe fondamentale de la dynamique au point G_E s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_0}\} = \underbrace{\{\mathcal{T}_{hs\to E}\} + \{\mathcal{T}_{hs\to F}\}}_{\text{hydrostatique}} + \underbrace{\{\mathcal{T}^{i+D}_{hd\to E}\} + \{\mathcal{T}^{i+D}_{hd\to F}\} + \{\mathcal{T}^{R}_{hd\to E}\} + \{\mathcal{T}^{R}_{hd\to F}\}}_{\text{hydrodynamique}} + \underbrace{\{\mathcal{T}_{IS\to F}\} + \{\mathcal{T}_{IS\to E}\}}_{0} + \{\mathcal{T}_{\text{pes}\to\Sigma}\}$$

en notant $\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to\Sigma}\}$ le torseur de l'action de la pesanteur sur le système Σ.

Question 34 Quelle équation particulière du principe fondamental de la dynamique appliqué au flotteur doit-on écrire pour obtenir une équation du mouvement ?

On isole le flotteur, puisque dans le torseur $\{\mathcal{T}_{IS\to F}\}$ la résultante $\overrightarrow{F}_u$ entre en jeu pour la récupération d'énergie on applique le théorème de la résultante dynamique projetée selon $\overrightarrow{e_z}$.

Question 35 Ecrire et linéariser cette équation, et former le système de 4 équations à 4 inconnues (x_e, z_e, θ, z).

En appliquant la stratégie proposée $m_F(\ddot{z}_e + \ddot{z}) = F_u + F_{2z} + F_{4z} + \underbrace{\rho \cdot g \cdot \pi \left(R^2 - r^2\right) \cdot (d_F - (z_e + z))}_{\overrightarrow{F}_{hs\to F}\cdot\overrightarrow{e_z}} - m_F \cdot g.$

Le TMD appliqué à l'ensemble Σ en G_E et projeté selon $\overrightarrow{e_y}$ donne :

$$(I_{y,E} + I_{y,F})\,\ddot{\theta} + m_F \cdot c^2\ddot{\theta} - m_F \cdot c \cdot \ddot{x}_e = -\rho g \left[\left(Z^{(E)}_{B_0} - Z^{(E)}_G\right) V_0 + \left(Z^{(F)}_{B_0} - Z^{(F)}_G\right) V^{(F)}_0 + \pi\frac{R^4}{4}\right]\theta + M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

Le TRD appliqué à l'ensemble Σ et projeté selon $\overrightarrow{e_x}$ donne :

$$m_E \cdot \ddot{x}_e + m_F(\ddot{x}_e - c \cdot \ddot{\theta}) = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

Le TRD appliqué à l'ensemble Σ et projeté selon $\overrightarrow{e_z}$ donne :

$$(m_E + m_F)\ddot{z}_e + m_F\ddot{z} = \underbrace{\rho \cdot g \left(V_0 - \pi \cdot R^2 z_e + \pi\left(R^2 - r^2\right)(d_F - z)\right)}_{\overrightarrow{F}_{hs\to E}\cdot\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{F}_{hs\to F}\cdot\overrightarrow{e_z}} + F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} - (m_E + m_F)g$$

Question 36 Simplifier ce système en tenant compte de l'équilibre du système en eau calme sans houle.

A l'équilibre en isolant le flotteur le théorème de la résultante statique donne $\rho \cdot g \cdot \pi\left(R^2 - r^2\right) d_F - m_F \cdot g = 0$. Le poids est compensé par la poussée d'Archimède.

De même en isolant l'ensemble {flotteur + embase} on a $\rho \cdot g \cdot V_0 + \rho \cdot g \cdot \pi\left(R^2 - r^2\right) d_F - (M_E + m_F)g = 0$.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Finalement les 4 équations précédentes deviennent (avec la mise en forme du système d'équations juste avant la question **Q37**) :

$$(m_E + m_F)\ddot{x}_e - m_F \cdot c \cdot \ddot{\theta} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$(m_E + m_F)\ddot{z}_e + m_F\ddot{z} + \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 z_e + \rho \cdot g \cdot \pi \left(R^2 - r^2\right) z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z}$$

$$-m_F \cdot c\ddot{x}_e + \left(I_{y,E} + I_{y,F} + m_F \cdot c^2\right)\ddot{\theta} + \rho g \left[\left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right) V_0 + \left(Z_{B_0}^{(F)} - Z_G^{(F)}\right) V_0^{(F)} + \pi\frac{R^4}{4}\right]\theta = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

$$m_F\ddot{z}_e + m_F\ddot{z} + \rho \cdot g \cdot \pi \left(R^2 - r^2\right) z_e + \rho \cdot g \cdot \pi \left(R^2 - r^2\right) z = F_u + F_{2z} + F_{4z}$$

REMARQUE : Vis-à-vis des équations proposées par la suite on peut identifier $k_{55} = \rho g \left[\left(Z_{B_0}^{(E)} - Z_G^{(E)}\right) V_0 + \left(Z_{B_0}^{(F)} - Z_G^{(F)}\right) V_0^{(F)} + \pi\frac{R^4}{4}\right]$ et $d = -c$.

3.4 Mise en forme du problème dans le domaine fréquentiel

Question 37 Justifier que le comportement suivant l'axe de pilonnement est découplé des autres directions.

Les 2 projections du théorème de la résultante dynamique écrites dans la question précédentes donnent 2 équations différentielles ne faisant intervenir que les déplacements dans l'axe de pilonnement tandis que les autres équations lient le déplacement de cavalement à la rotation de tangage.

Donc le comportement en pilonnement est découplé des autres directions.

Question 38 À partir de l'équation précédente, déterminer la matrice H telle que $H \cdot V = \begin{pmatrix} \hat{F}_{1z} - \hat{F}_u \\ \hat{F}_{2z} - \hat{F}_u \end{pmatrix}$ (7) avec $V^T = (\hat{V}_e \quad \hat{V}_f)^T$ le vecteur d'inconnues contenant les amplitudes complexes de $\dot{z}_e(t)$ et $\dot{z}_f(t)$. Vous exprimerez H en fonction de M, A, B, K et ω.

On a clairement $X = \frac{1}{j\omega}V$ (le sujet a oublié le symbole de transposée dans la définition de V) donc de manière immédiate :

$$\underbrace{\left[j\omega(M + A) + B - j\frac{K}{\omega}\right]}_{H} V = \begin{pmatrix} \hat{F}_{1z} - \hat{F}_u \\ \hat{F}_{2z} + \hat{F}_u \end{pmatrix}$$

Question 39 Interpréter les courbes de la figure 12, notamment par le comportement basse fréquence. Quelle est la fréquence optimale de la houle pour la récupération d'énergie ?

On observe que pour une pulsation inférieure à 0,3rad.s^{-1}, l'embase connait une amplitude de mouvement supérieure à 1m pour 1m d'amplitude de houle puis cette amplitude s'effondre pour retrouver un pic d'amplitude 0,3m à 0,5rad.s^{-1}, ce qui reste une atténuation par rapport à l'amplitude de la houle.

Le flotteur suit le rythme des vagues jusqu'à une pulsation de 1rad.s^{-1} puis connait une amplification de son amplitude de déplacement avant de tendre vers zéro en haute fréquence. En effet en haute fréquence les vagues

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

sont trop rapprochées, le flotteur n'a pas le temps d'effectuer de translation verticale, de même pour l'embase à qui ce phénomène arrive plus tôt.

Le plus grand déplacement relatif (et la plus grande différence de vitesse) entre le flotteur et l'embase est atteint pour une pulsation d'environ 1,6rad.s^{-1} : c'est la fréquence optimale pour la récupération d'énergie.

4 Récupération optimale de l'énergie des vagues

Objectif

Les parties précédentes ont montré que le mouvement du flotteur du système PB150 POWERBUOY était géré par des équations complexes, faisant intervenir plusieurs physiques. Néanmoins, à l'instar de tout système mécanique possédant un degré de liberté, son mouvement peut être piloté pour pouvoir récupérer un maximum d'énergie fournie par la force qui le met en mouvement. Cette partie vise à étudier conceptuellement la stratégie de commande permettant cette récupération énergétique optimale.

Question 40 Démontrer que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut s'écrire $E_u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega)\right)\mathrm{d}\omega$ où $\breve{V}_r^*$ est le complexe conjugué de $\breve{V}_r$.

Par définition de la transformée de Fourier on a $\breve{X}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t = \breve{X}^*(\omega)$. Donc par théorème de Parseval appliqué à la fonction E_u on obtient le résultat demandé dans la question.

Question 41 Démontrer que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut aussi s'écrire $E_u = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_h^*(\omega)\breve{V}_r(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)\mathrm{d}\omega$.

En supposant que l'on peut manipuler cette intégrale impropre comme une intégrale sur un segment :

$$E_u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega)\right)\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega)\right)\mathrm{d}\omega$$

On pose dans la première intégrale $\Omega = -\omega$, alors :

$$\int_{-\infty}^{0}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega)\right)\mathrm{d}\omega = \int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(-\Omega)\breve{V}_r^*(-\Omega) - \breve{F}(-\Omega)\breve{V}_r^*(-\Omega)\right)\mathrm{d}\Omega$$

Par analogie avec la réponse à la question précédente :

$$\int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(-\Omega)\breve{V}_r^*(-\Omega) - \breve{F}(-\Omega)\breve{V}_r^*(-\Omega)\right)\mathrm{d}\Omega = \int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h^*(\Omega)\breve{V}_r(\Omega) - \breve{F}^*(\Omega)\breve{V}_r(\Omega)\right)\mathrm{d}\Omega$$

La variable d'intégration étant muette on a finalement :

$$E_u = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\breve{F}_h(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_h^*(\omega)\breve{V}_r(\omega) - \breve{F}(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) - \breve{F}^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)\mathrm{d}\omega$$

Question 42 Vérifier que l'énergie fournie par le flotteur à la chaîne de motorisation peut aussi s'écrire :

$$E_u = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{|\breve{F}_h|^2}{2D} - \frac{\alpha(\omega)}{2D}\right)\mathrm{d}\omega$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

avec $\alpha(\omega) = \breve{F}_h(\omega)\breve{F}_h^*(\omega) + 2D\left(\breve{F}_u(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_u^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)$.

On part de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{|\breve{F}_h|^2}{2D} - \frac{\alpha(\omega)}{2D}\right)\mathrm{d}\omega$ avec $\alpha(\omega) = \breve{F}_h(\omega)\breve{F}_h^*(\omega)+2D\left(\breve{F}_u(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_u^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)$ et sachant que $|\breve{F}_h|^2 = \breve{F}_h \cdot \breve{F}_h^*$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{|\breve{F}_h|^2}{2D} - \frac{\alpha(\omega)}{2D}\right)\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\breve{F}_h(\omega)\breve{F}_h^*(\omega)}{2D} - \frac{\breve{F}_h(\omega)\breve{F}_h^*(\omega) + 2D\left(\breve{F}_u(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_u^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)}{2D}\right)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} -\left(\breve{F}_u(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_u^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

En utilisant $\breve{F}_u = \breve{F} - \breve{F}_t$ on retrouve bien le résultat de la question précédente.

Question 43 Démontrer que

$$\alpha(\omega) = \left((j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega) + \breve{F}_u(\omega)\right)\cdot\left((j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega) + \breve{F}_u(\omega)\right)^*$$

On développe l'expression proposée :

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \underbrace{(j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega)\cdot(j\omega M + D - jK/\omega)\breve{V}_r^*(\omega)}_{\breve{F}(\omega)\breve{F}^*(\omega)} \\ &+ \underbrace{(j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega)\breve{F}_u^*(\omega) + (j\omega M + D - jK/\omega)\breve{V}_r(\omega)\breve{F}_u^*(\omega)}_{2D\breve{V}_r(\omega)\breve{F}_u^*(\omega)} - \underbrace{(j\omega M + D - jK/\omega)\breve{V}_r(\omega)}_{F(\omega)}\breve{F}_u^*(\omega) \\ &+ \underbrace{(j\omega M + D - jK/\omega)\breve{V}_r^*(\omega)\breve{F}_u(\omega) + (j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r^*(\omega)\breve{F}_u(\omega)}_{2D\breve{V}_r^*(\omega)\breve{F}_u(\omega)} - \underbrace{(j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r^*(\omega)}_{F^*(\omega)}\breve{F}_u(\omega) \\ &+ \breve{F}_u(\omega)\breve{F}_u^*(\omega)\end{aligned}$$

Finalement :

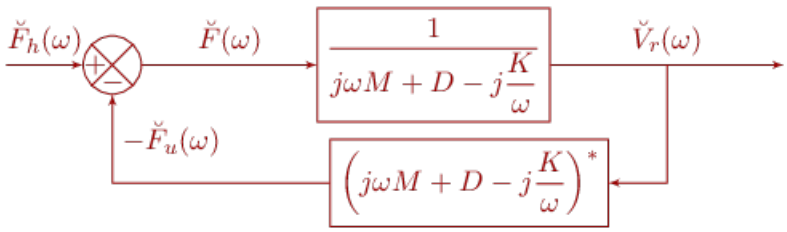
$$\alpha(\omega) = \breve{F}_h(\omega)\breve{F}_h^*(\omega) + 2D\left(\breve{F}_u(\omega)\breve{V}_r^*(\omega) + \breve{F}_u^*(\omega)\breve{V}_r(\omega)\right)$$

Question 44 En déduire que l'énergie maximale que le système peut récupérer du mouvement de la houle est $E_{u,max} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{|\breve{F}_h|^2}{2D}\mathrm{d}\omega$, et indiquer pour quelle valeur de l'effort $\breve{F}_u$ elle est atteinte.

On a d'après la question précédente $\alpha(\omega) = \left|(j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega) + \breve{F}_u(\omega)\right|^2$ donc $\alpha(\omega)$ possède pour borne inférieure 0. Ainsi l'expression de E_u de la **Question 42** est maximale pour $\alpha(\omega) = 0$, autrement dit pour $\breve{F}_u(\omega) = -(j\omega M + D - jK/\omega)^*\breve{V}_r(\omega)$.

Question 45 Représenter le schéma-bloc du système permettant d'aboutir à un contrôle de la vitesse de déplacement du flotteur tel que l'énergie des vagues soit récupérée au maximum. L'entrée de ce schéma sera $\breve{F}_h$ et la sortie $\breve{V}_r$. Ne mettre qu'un seul bloc dans la chaîne directe et qu'un seul bloc dans la chaîne de retour.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



5 Mesure du courant créé

- Objectif

L'énergie houlomotrice met en mouvement un système mécanique, qui fait tourner un moteur synchrone à aimants permanents. Le courant créé par ce moteur est redressé par des convertisseurs électriques statiques et est modifié avant d'être injecté sur le réseau. Afin d'optimiser cette chaîne de transmission énergétique, il est indispensable de mesurer proprement le courant en sortie du moteur. L'objet de cette partie consiste à modéliser la chaîne de mesure de ce courant, afin de l'optimiser

Question 46 B_t représente le champ magnétique dans le tore, et B_c le champ magnétique dans le capteur à effet Hall. Déterminer une relation entre ces deux champs magnétiques.

L'équation de Maxwell-Thomson $\text{div}(\overrightarrow{B}) = 0$ impose la conservation du flux de champ magnétique. Ainsi le flux reste constant à travers toute section d'un même tube de champ. Dans l'entrefer de section S dans lequel se situe le capteur de Hall on a $B_c S = B_t S$ soit $\boxed{B_t = B_c}$.

Question 47 Déterminer la valeur de l'excitation magnétique H_t dans le tore.

En faisant l'hypothèse d'un état magnétique non saturé et en supposant un milieu linéaire, homogène et isotrope on a la relation $B_t = \mu H_t$ avec μ la perméabilité magnétique du circuit. Or $\mu \to \infty$ donc $\boxed{H_t = 0}$.

Question 48 Déterminer l'expression du flux magnétique dans le tore, en fonction de I_e, I_s, N_e, N_s, e, S et μ_c.

L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{H}) = \overrightarrow{j}$ permet de lier la circulation de H à l'intensité du courant enlacé le long d'une ligne de champ (avec I_e qui crée un flux positif et I_s qui crée un flux négatif d'après l'énoncé) :

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = N_e I_e - N_s I_s \quad \Rightarrow \quad \underbrace{H_t}_{0} L + H_c \cdot e = N_e I_e - N_s I_s$$

Or $B_c = B_t = \mu_c H_c$ et le flux magnétique s'écrit $\phi = B_c S$ donc :

$$\boxed{\phi = \mu_c \frac{S}{e} (N_e I_e - N_s I_s)}$$

Question 49 Déterminer les expressions analytiques des fonctions de transfert H_1, H_2 et H_5 en fonction des grandeurs physiques qui apparaissent dans la figure 13, dans le domaine de Laplace.

Dans le domaine de Laplace et par la question précédente $\boxed{H_1(p) = \mu_c \frac{S}{e}}$. Par définition du flux magnétique on a $\boxed{H_2(p) = \frac{1}{S}}$.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

D'après la figure 13 on a par la loi des mailles $V_4 = L_s\dfrac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} + (R_s + R_m)i_s$ donc dans le domaine de Laplace et à conditions initiales nulles $\boxed{H_5(p) = \dfrac{1}{L_s p + (R_s + R_m)}}$.

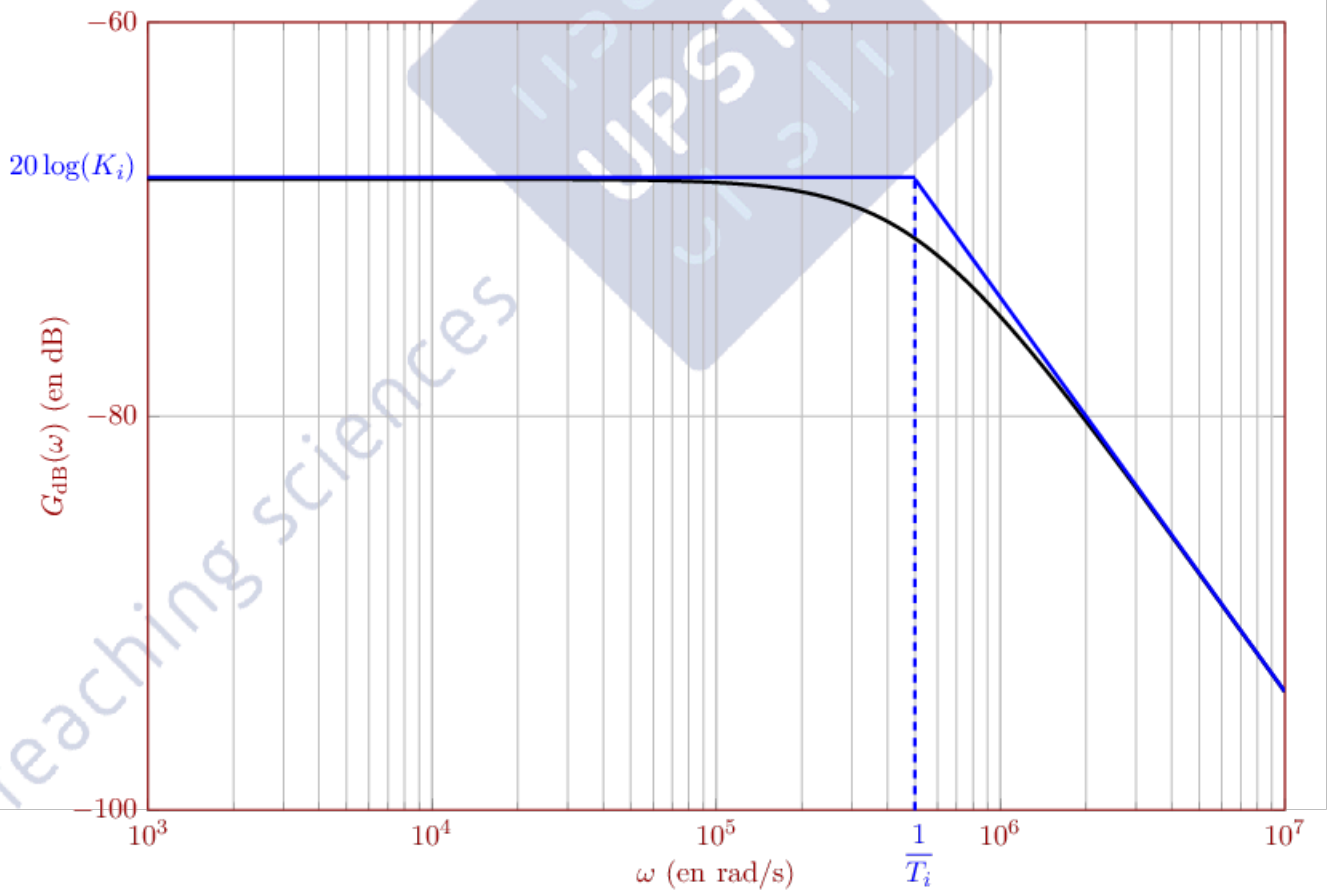
Question 50 Exprimer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{I_s(p)}{I_e(p)}$ et déterminer son gain K_i et sa constante de temps T_i en fonction de $N_e, N_s, \mu_c, R_s, R_m, L_s, e, K_3$ et K_4.

Par formule de Black : $\boxed{H(p) = \dfrac{\dfrac{N_e\mu_c K_3 K_4}{e(R_m + R_s) + N_s\mu_c K_3 K_4}}{1 + \dfrac{L_s e}{e(R_m + R_s) + N_s\mu_c K_3 K_4}p}}$.

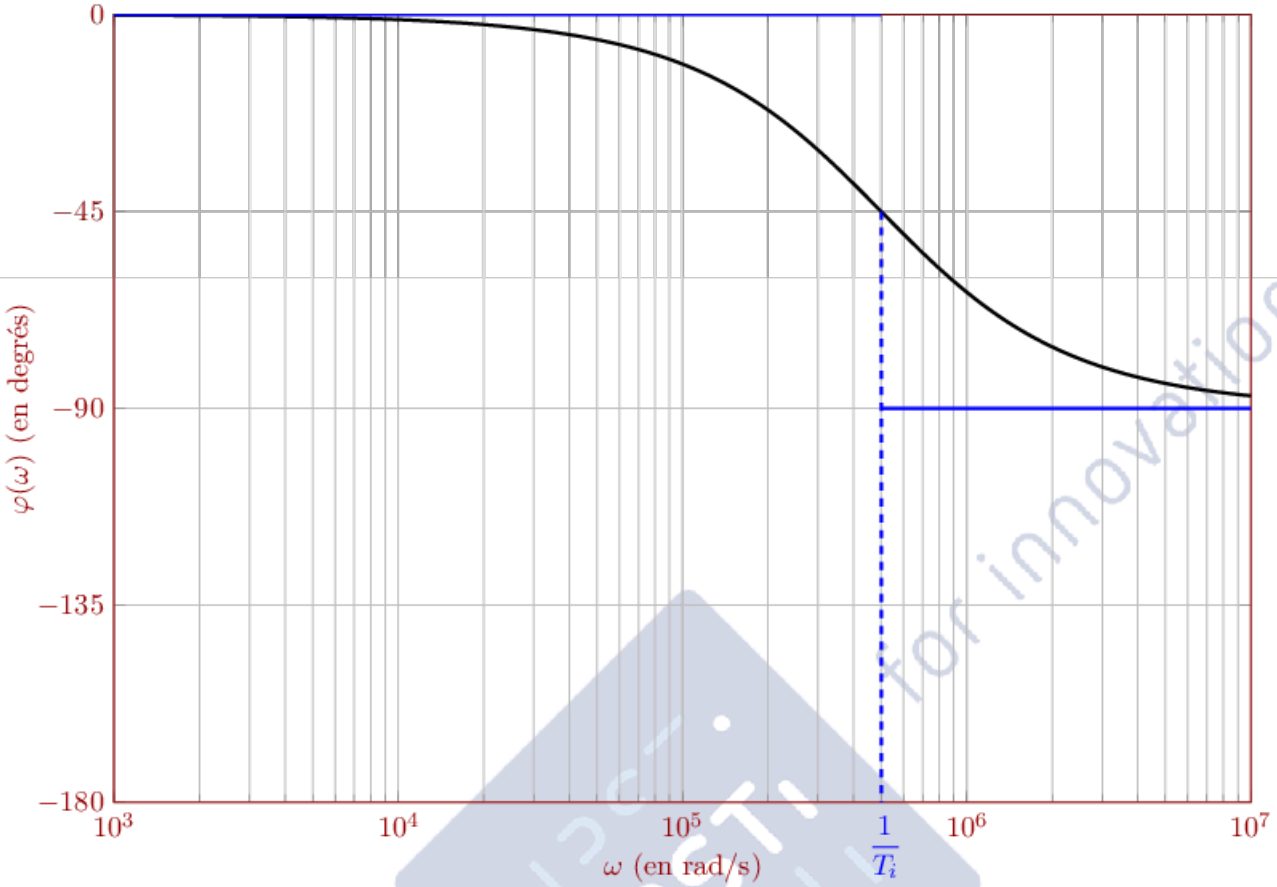
On identifie $\boxed{K_i = \dfrac{N_e\mu_c K_3 K_4}{e(R_m + R_s) + N_s\mu_c K_3 K_4}}$ et $\boxed{T_i = \dfrac{L_s e}{e(R_m + R_s) + N_s\mu_c K_3 K_4}}$.

Question 51 Représenter le diagramme de Bode de la fonction $H(p)$. Indiquer sur quelle plage de pulsation la mesure doit être faite pour avoir une bonne image de I_e.

On trace le diagramme avec la fonction de transfert proposée dans la suite du sujet : $H(p) = \dfrac{4.10^{-4}}{1 + 2.10^{-6}p}$:



© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



On aura une image correcte de I_e (donc une bonne valeur de I_s) si on n'atténue pas trop le gain, soit pour une pulsation inférieure à $\frac{1}{T_i}$.

Question 52 La résistance de mesure valant $R_m = 200\Omega$, déterminer la valeur numérique de la tension V_s si le moteur délivre 100A dans le domaine des basses fréquences.

En basse fréquence la fonction de transfert précédente se simplifie ce qui donne $I_s = 4.10^{-4} I_e$. Or $V_s = R_m I_s$ donc $\boxed{V_s = R_m \cdot 4.10^{-4} I_e}$.

AN avec $I_e = 200\text{A}$: $\boxed{V_s = 8\text{V}}$.

Question 53 On suppose que le moteur délivre un courant sinusoïdal, de pulsation ω. Déterminer l'expression littérale de la valeur efficace maximale du courant que le moteur peut délivrer, si on souhaite limiter la valeur maximale du champ magnétique à la valeur B_{max}.

Par la **Question 48** on a $B_c = \frac{\mu_c}{e}(N_e I_e - N_s I_s)$ donc en se plaçant en haute fréquence on atténue I_s ce qui permet de se rapprocher de la valeur critique $B_c = \frac{\mu_c N_e}{e} I_e$.

En passant à la valeur efficace on a $I_{eff,max} = \frac{e}{\mu_c N_e} B_{max}$.

Question 54 Une variation de température agit surtout sur le capteur à effet Hall, et modifie la valeur numérique de K_3 à un niveau pouvant aller jusqu'à $\frac{\mathrm{d}K_3}{K_3} = \pm 10\%$. Montrer qu'actuellement le système de mesure du courant est soumis à cette perturbation.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

L'embase du système étant constamment en train de plonger sous l'eau puis de remonter à la surface, le capteur à effet Hall est en permanence soumis à des variations de température.

Question 55 Déterminer la nouvelle fonction de transfert $H_4(p)$.

Les AOP sont en fonctionnement linéaire car la sortie est systématiquement rebouclée sur la borne négative, ils sont supposés parfaits.

Fonction de transfert de l'AOP de gauche :

En notant V_4' la tension en sortie de l'AOP de gauche et en posant $V_+ = V_-$ avec respectivement V_+ la tension à l'entrée + et V_- la tension à l'entrée - alors par pont diviseur de tension :

$$V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_c \quad ; \quad V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_4'$$

Finalement $\boxed{V_4' = \frac{R_2}{R_1} V_c}$.

Fonction de transfert de l'AOP de droite :

On reprend les mêmes notations pour les tensions aux bornes + et - de l'AOP, par pont diviseur de tension :

$$V_+ = V_4' \quad ; \quad V_- = \frac{R_3}{R_3 + \dfrac{1}{C_4 p}} V_4$$

Donc $\boxed{V_4' = \dfrac{R_3}{R_3 + \dfrac{1}{C_4 p}} V_4}$.

Conclusion :

On a $\boxed{H_4(p) = \dfrac{V_4(p)}{V_c(p)} = \dfrac{\dfrac{R_2}{R_1}(1 + R_3 C_4 p)}{R_3 C_4 p}}$.

Question 56 Indiquer pourquoi la chaîne de mesure est devenue robuste vis-à-vis des variations de températures et à quelle condition le problème est réglé.

On reconnait en $H_4(p)$ un correcteur proportionnel intégral, il supprime donc l'effet d'une perturbation en température si celle-ci est un échelon.

6 Conclusion

Question 57 Rappeler le objectifs des différentes parties et les conclusions associées. Mettre en évidence les limites du modèle. Comment peut-on y remédier ?

Le sujet portait sur l'étude d'un système houlogénérateur comportant 2 ensembles cinématiques (le flotteur et l'embase) liés par une liaison glissière. Le mouvement relatif entre le flotteur est l'embase crée de l'énergie qui peut être récupérée. L'objectif étant d'optimiser la quantité d'énergie récupérée.

Dans un premier temps une étude de la houle a été menée afin de déterminer la puissance qu'elle transporte, notre exemple (houlogénératrice près des côtes) a montré que cette puissance était faible comparée à ce qu'il était possible d'obtenir ailleurs sur le globe : il vaut mieux être en pleine mer.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Dans un second temps un modèle dynamique en petits déplacements du système a été élaboré afin d'établir les équations du mouvement du système en faisant intervenir l'action du récupérateur d'énergie. Une expression de l'énergie transmise par le flotteur à la chaîne de motorisation a ensuite été proposée pour des mouvements uniquement verticaux du flotteur. Une étude a alors permis de trouver quelle force F_u transmise par l'Interface Secondaire (IS) sur le flotteur permettait de maximiser l'énergie transmise à la motorisation.

Enfin une dernière partie avait pour but d'optimiser le système de mesure du courant en sortie de la machine synchrone. La solution technologique envisagée est un capteur à effet Hall situé dans un entrefer de circuit magnétique en forme de tore dont le signal est amplifié en vue de le mesurer. Les perturbations de température sont aussi éliminées.

Plusieurs limites peuvent être citées dans l'étude menée :

- la profondeur de l'eau est supposée infinie (ce qui n'est pas le cas) ;
- l'étude dynamique est faite pour de petits mouvements alors que la mer peut être très agitée (on a alors minimisé l'énergie accumulée) ;
- le calcul de l'effort optimal transmis par l'IS a été fait pour un modèle unidimensionnel alors que plusieurs paramètres variables étaient considérés dans l'étude dynamique juste avant ;
- les composants électroniques étaient supposés parfaits (une notion de rendement aurait pu être introduite).

Pour améliorer le modèle on pourrait faire l'hypothèse des grands déplacements dans plusieurs directions de l'espace, mais il faudrait le cas échéants faire intervenir des outils numériques pour conclure quant à la modélisation effectuée.

teaching sciences for innovation

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI