

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2021

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

BASE TC200 Tecdron

Corrigé UPSTI

STRUCTURE DE LA BASE TC200

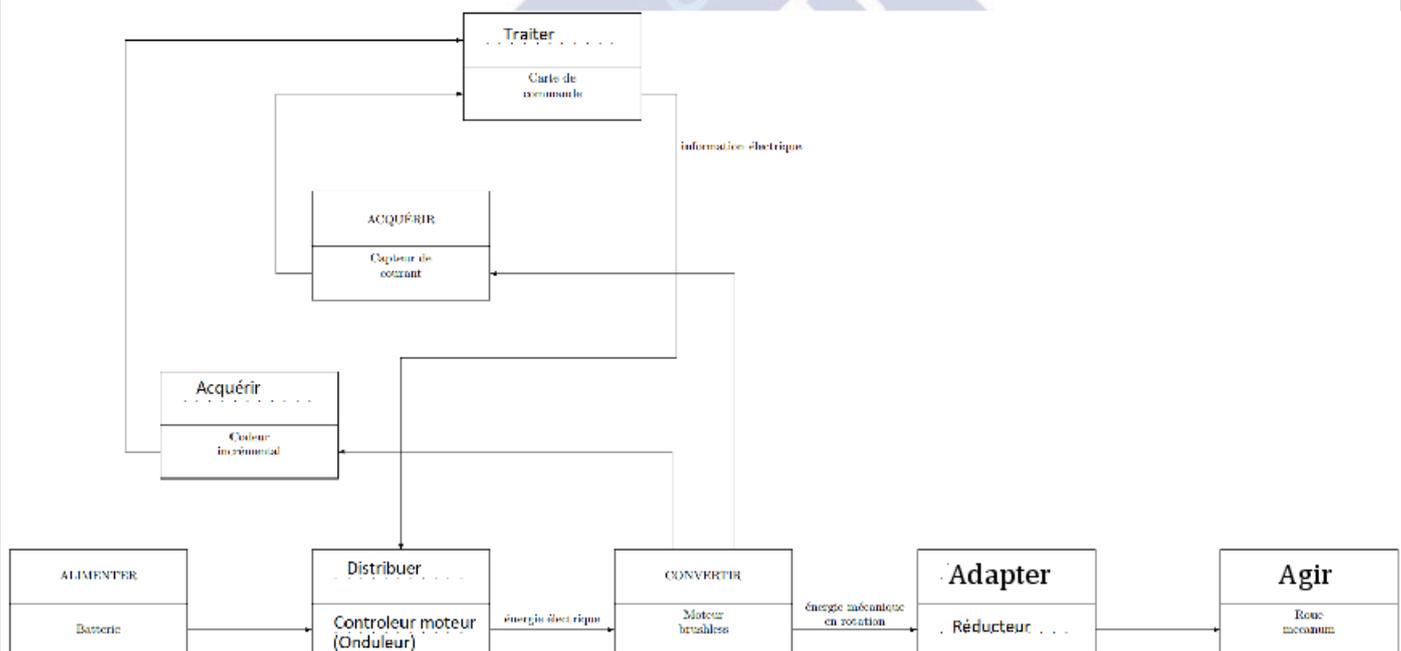
I - Structure de base TC200

I.1 - Présentation de la base TC200

I.2 - Analyse de la solution de déplacement de la base TC200

Objectif : Analyser le pilotage de la base TC200 pour suivre une trajectoire de consigne.

Question 1 À l'aide de la figure 6, compléter la figure A du document réponse qui détaille l'organisation structurelle d'une des motorisations.



Question 2 Dans ces hypothèses et en s'appuyant sur des graphes des liaisons, déterminer les degrés d'hyperstatisme des modèles 1 et 2. Justifier la solution adoptée par le constructeur, correspondant au modèle 2, compte tenu de l'exigence 3.

Exigence 3 : Un modèle isostatique base/sol doit pouvoir être associé à la structure choisie.

Mobilités utiles : 2 translations et 1 rotation (rappelé dans le texte, paragraphe en bas page 3).

Mobilités internes : 8, 4 roues et 4 rouleaux.

1^{ère} solution : À partir du modèle statique, on a $h = N_s - 6(n-1) + m_u + m_i$

Le calcul peut se faire simultanément sur les deux modèles à l'aide du tableau ci-après :

Modèle 1	Modèle 2
8 pivots et 4 ponctuelles, $N_s = 8 \cdot 5 + 4 = 44$	9 pivots et 4 ponctuelles, $N_s = 9 \cdot 5 + 4 = 49$
Chassis, 4 roues, 4 rouleaux et le sol $n=10$	Châssis, 4 roues, 4 rouleaux, essieu et le sol $n=11$
$h = 44 - 6 \cdot (10 - 1) + 3 + 8 = 1$	$h = 49 - 6 \cdot (11 - 1) + 3 + 8 = 0$
Modèle hyperstatique de degré 1	Modèle isostatique

Seul le modèle 2 répond au cahier des charges et c'est bien celui retenu par le constructeur.

2nde solution : En utilisant le modèle cinématique : $h = 6v - I_c + m_u + m_i$.

Il n'y a qu'un seul degré de liberté par pivot $I_c = 28$ (modèle 1) et $I_c = 29$ (modèle 2). Le nombre cyclomatique vaut 3 dans les deux modèles proposés. On retrouve la même conclusion.

Question 3 Quelle est l'hypothèse à formuler pour obtenir les deux équations scalaires suivantes ?

$$\begin{cases} V_x - b\omega + r\dot{\beta}_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ V_y + a\omega + (r+R)\omega_{10} + r\dot{\beta}_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

Question nécessitant du recul (pas d'accompagnement)

Deux équations scalaires en vitesse obtenues donc par composition des vitesses. L'étude utilise les grandeurs de la roue avant droite. Donc on pose : $\overrightarrow{V_{I_1,11/0}} = \overrightarrow{V_{I_1,11/10}} + \overrightarrow{V_{I_1,10/1}} + \overrightarrow{V_{I_1,1/0}}$

$$\overrightarrow{V_{I_1,11/10}} = \overrightarrow{V_{B_1,11/10}} + \overrightarrow{I_1 B_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{11/10}} = \vec{0} + r\vec{z}_1 \wedge \dot{\beta}_{11} \vec{x}_{11} = r\dot{\beta}_{11} \vec{y}_{11} \quad (\text{Plus facile à lire sur la figure 17}).$$

$$\overrightarrow{V_{I_1,10/1}} = \overrightarrow{V_{A_1,10/1}} + \overrightarrow{I_1 A_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10/1}} = (r+R)\vec{z}_1 \wedge \omega_{10} \vec{x}_1 = (r+R)\omega_{10} \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{V_{I_1,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{I_1 O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 + [(r+R)\vec{z}_1 - a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1] \wedge \omega \vec{z}_1 = V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 + a\omega \vec{y}_1 - b\omega \vec{x}_1$$

$$\text{D'où, } \overrightarrow{V_{I_1,11/0}} = r\dot{\beta}_{11} \vec{y}_{11} + (r+R)\omega_{10} \vec{y}_1 + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 + a\omega \vec{y}_1 - b\omega \vec{x}_1$$

Or $\vec{y}_{11} = -\sin(\alpha_{11})\vec{x}_1 + \cos(\alpha_{11})\vec{y}_1$. De plus α_{11} est un angle fixe de valeur -45° , donc $\vec{y}_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_1 + \vec{y}_1)$

$$\text{D'où, } \overrightarrow{V_{I_1,11/0}} = r\dot{\beta}_{11} \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (r+R)\omega_{10} \vec{y}_1 + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 + a\omega \vec{y}_1 - b\omega \vec{x}_1$$

Pour obtenir les deux équations proposées, il faut projeter l'équation vectorielle ci-dessus selon \vec{x}_1 et \vec{y}_1 et faire l'hypothèse d'un roulement sans glissement au point de contact I_1 entre le rouleau₁ et le sol », soit : $\overrightarrow{V_{I_1,11/0}} = \vec{0}$

Alors on retrouve bien les deux équations demandées.

Question 4 Déterminer la matrice M telle que $W = MV$. On donne $V = \begin{pmatrix} \omega \\ V_x \\ V_y \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \omega_{40} \end{pmatrix}$

Du système obtenu à la question 3, on a $\begin{cases} r\dot{\beta}_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = b\omega - V_x \\ V_y + a\omega + (r+R)\omega_{10} + r\dot{\beta}_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$ et donc (I) dans (II) :

$$V_y + a\omega + (r+R)\omega_{10} + b\omega - V_x = 0 \text{ soit } \omega_{10} = \frac{1}{(r+R)}[-(a+b)\omega + V_x - V_y]$$

Il suffit de reproduire ce traitement pour les six autres équations scalaires (ω_{20} , ω_{30} et ω_{40} , attention aux signes), et on obtient :

$$M = \frac{1}{(r+R)} \begin{pmatrix} -(a+b) & 1 & -1 \\ a+b & -1 & -1 \\ a+b & 1 & -1 \\ -(a+b) & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 5 Déterminer W_1, W_2 et W_3 correspondant respectivement à des paramètres de mouvements de la base définis par $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Connaissant W , expliquer s'il est possible de déterminer de manière unique V . Commenter ce résultat vis-à-vis de l'exigence 3.

$$W_1 = M \cdot V_1 = \frac{1}{(r+R)} \begin{pmatrix} -(a+b) & 1 & -1 \\ a+b & -1 & -1 \\ a+b & 1 & -1 \\ -(a+b) & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(r+R)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, on obtient $W_2 = \frac{1}{(r+R)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \frac{1}{(r+R)} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Connaissant W , on peut déterminer V en utilisant les quatre équations pour déterminer les trois inconnues. On peut remarquer que la quatrième ligne de la matrice M peut s'obtenir par combinaison linéaire de ses trois premières lignes : $L_4 = L_1 + L_2 - L_3$

Erreur ou non dans le sujet : il semble que cela soit l'exigence 1.1.3 et non l'exigence 3 : 5 km/h max. Cette vitesse peut être obtenue en choisissant $V_x = V_y = 1$ m/s alors la vitesse du châssis sera la somme vectorielle soit $\sqrt{2} * 1$ m/s ou 5,09 km/h. Donc cette exigence 1.1.3 est aussi respectée.

Question 6 Tracer sur la figure B du document réponse, la trajectoire du point O de la base TC200 correspondant à ce graphe d'états, après appui sur le bouton marche et en s'appuyant sur les relations (I.1, $\omega_{10}(t) = \omega_{30}(t) = \frac{V_x(t) - V_y(t)}{(r+R)}$ et $\omega_{20}(t) = \omega_{20}(t) = -\frac{V_x(t) + V_y(t)}{(r+R)}$).

Grâce aux équations (I.1), on peut connaître $V_x(t)$ et $V_y(t)$:

$$\begin{aligned} (r+R)\omega_{10}(t) &= V_x(t) - V_y(t) \\ (r+R)\omega_{20}(t) &= -V_x(t) - V_y(t) \end{aligned} \text{ soit } \begin{aligned} V_y(t) &= -\frac{(r+R)}{2}(\omega_{10}(t) + \omega_{20}(t)) \\ V_x(t) &= \frac{(r+R)}{2}(\omega_{10}(t) - \omega_{20}(t)) \end{aligned} \text{ avec } \frac{(r+R)}{2} = 73,05\text{mm}$$

A partir de la figure 8, on peut calculer les différentes vitesses selon les états :

	Durée	$V_x(t)$	$V_y(t)$
Etat 1	2 s	0 m/s	1 m/s
Etat 2	2 s	1 m/s	0 m/s
Etat 3	2 s	-1 m/s	0 m/s
Etat 4	2 s	1 m/s	1 m/s
Etat 5	2 s	-1 m/s	1 m/s

On peut de plus, toujours à partir du graphe d'états, en déduire la succession des étapes :



L.3 - Validation du dimensionnement de l'articulation de l'essieu avant

Objectif : Valider le dimensionnement de l'axe de l'articulation de l'essieu avant par rapport au châssis.

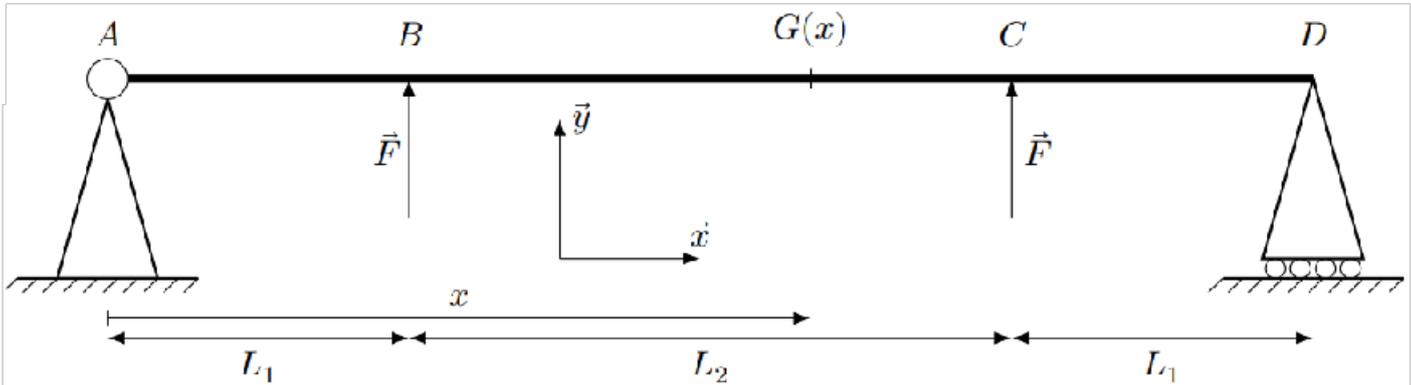


Figure 9 Modélisation spécifique à la validation du dimensionnement de l'articulation essieu/châssis

Question 7 Déterminer les actions mécaniques exercées par les appuis sur la poutre aux points A et D puis déterminer l'expression du torseur de cohésion, sur chaque tronçon, en fonction de l'abscisse x de la section droite de la poutre. Donner la nature de chaque sollicitation sur chaque tronçon.

1ère solution :

En A : articulation, $\begin{Bmatrix} x_A \vec{x} + y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ et un appui simple en D, $\begin{Bmatrix} y_D \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$

- On isole l'axe
- On ramène tout en A pour appliquer le PFS

$$\{Appui_D\} = \begin{Bmatrix} y_D \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} y_D \vec{y} \\ (2L_1 + L_2)y_D \vec{z} \end{Bmatrix}_A, \{F_B\} = \begin{Bmatrix} F \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} F \vec{y} \\ L_1 F \vec{z} \end{Bmatrix}_A \text{ et } \{F_C\} = \begin{Bmatrix} F \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} F \vec{y} \\ (L_1 + L_2) F \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{PFS en A} \begin{cases} x_A = 0 \\ 2F + y_A + y_D = 0 \\ (2L_1 + L_2)y_D + (L_1 + L_2)F = 0 \end{cases} \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = -F \\ y_D = -F \end{cases}$$

2nde solution :

On peut se passer du calcul des moments en A. On peut remarquer que $X_A = 0$ car il s'agit du seul effort sur \vec{x} .

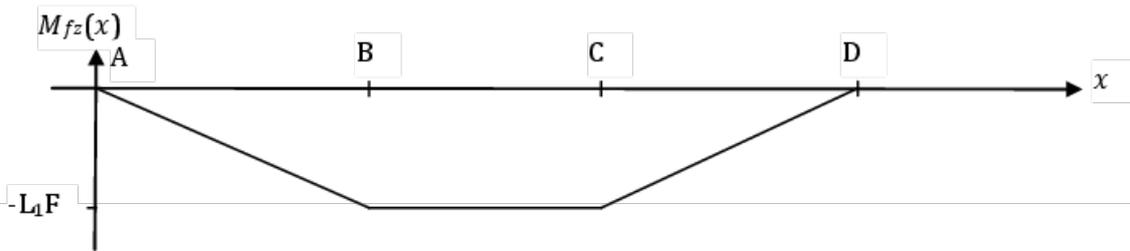
De la symétrie du problème on peut déduire que $Y_A = Y_D$.

En effectuant la somme des efforts sur \vec{y} , on a $2Y_A + 2F = 0$. D'où $Y_A = Y_D = -F$.

Toutes les actions mécaniques étant connues, il est possible de calculer le torseur de cohésion sur chaque tronçon.

- Tronçon [AB] : $\{T_{coh,AB}\} = - \begin{Bmatrix} -F \vec{y} \\ x F \vec{z} \end{Bmatrix}_G$ Flexion simple.
- Tronçon [BC] : $\{T_{coh,BC}\} = - \begin{Bmatrix} -F \vec{y} \\ x F \vec{z} \end{Bmatrix}_G - \begin{Bmatrix} F \vec{y} \\ -(x - L_1) F \vec{z} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -L_1 F \vec{z} \end{Bmatrix}_G$ Flexion pure.
- Tronçon [CD] : $\{T_{coh,CD}\} = + \begin{Bmatrix} -F \vec{y} \\ (x - 2L_1 - L_2) F \vec{z} \end{Bmatrix}_G$ Flexion simple.

Question 8 Tracer le diagramme du moment de flexion (x) associé.



Question 9 Pour la section la plus sollicitée, déterminer l'expression de la contrainte maximale et faire l'application numérique.

L'expression de la contrainte est maximale pour le segment [BC] et sur l'extérieur de la poutre donc pour $y=d/2$.

$$\sigma_{max} = \frac{L_1 F 64 d}{\pi d^4 2} \text{ soit AN : } \sigma_{max} = \frac{500.50.64 15}{\pi.15^4 2} = 75 \text{ MPa}$$

Question 10 Conclure sur le respect des exigences du tableau 3.

Exigence	Critère	Valeur
Sollicitation de l'axe dans le domaine élastique	Limite d'élasticité	450 MPa
	Coefficient de sécurité	≥ 5

Tableau 3 Exigence associée à la résistance mécanique de l'articulation de l'essieu avant

$\sigma_{max} < \frac{R_e}{5}$ donc $\sigma_{max} < 90 \text{ MPa}$ L'exigence est bien respectée.

II - Motorisation de la base TC200

II.1 - Validation des machines et des contrôleurs

Objectif : Valider le choix des machines et des contrôleurs associés afin de répondre à l'exigence 5.

Question 11 En déduire la relation entre ω_m vitesse de rotation du moteur en rad.s^{-1} et ω pulsation des courants statoriques en rad.s^{-1} . Calculer la fréquence maximale f_{max} permettant d'atteindre la vitesse maximale de $3000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$ annoncée.

On a un moteur synchrone donc $\omega_m = \omega_s = \frac{\omega}{p}$ avec ω_s la vitesse du champ tournant et p , le nbre de paire de pôles. Soit $\omega_m = \frac{\omega}{p}$

$$\omega_m = \frac{2.\pi.f}{p} \text{ donc } f = \frac{p.\omega_m}{2.\pi} = \frac{p.N_m}{60} \text{ et ainsi } f_{max} = \frac{p.\omega_m}{2.\pi} = \frac{p.N_{m\ max}}{60}$$

A.N. : 8 pôles soit $p=4$ et $N_{m\ max} = 3000 \text{ tr}/\text{mn}$ donc $f_{max} = \frac{4.3000}{60} = 200 \text{ Hz}$

Question 12 Dessiner le diagramme de Fresnel correspondant et exprimer la valeur efficace V en fonction des grandeurs R, X, E et I pour un réglage de l'angle $\Psi = 0$. Expliquer l'intérêt de ce réglage de l'angle Ψ .

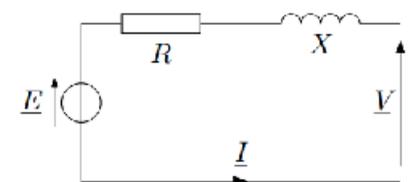


Figure 10 Modèle de Behn-Eschenburg

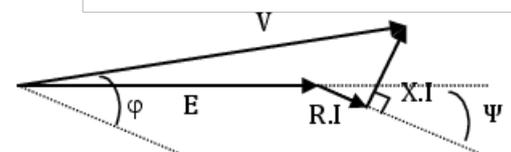
(Dans le diagramme de Fresnel ci-contre, les amplitudes sont quelconques et l'angle ψ est non nul.)

En réglant l'angle Ψ à 0, alors E et RI sont en phase et donc :

$$V = \sqrt{(E + RI)^2 + (XI)^2}$$

L'intérêt de conserver l'angle Ψ nul, est de maximiser le couple moteur pour un courant donné.

$$C_{em} = 3K_E I \cos(\psi) = 3K_E I$$



Question 13 À partir des caractéristiques nominales de la machine, déterminer les valeurs efficaces I du courant et V de la tension en régime établi pour un déplacement de la base TC200 à 3,6 km/h avec un couple résistant ramené sur l'axe moteur de 1 N.m, ce qui correspond à un déplacement typique de la base TC200 dans la carlingue de l'avion.

$$C_{em} = 3K_E I \cos(\psi) = 3K_E I \text{ avec } \cos(\psi) \text{ toujours égale à 1 (je suppose !!!)}$$

$$I = \frac{C_{em}}{3.K_E} \quad \text{A.N. } I = \frac{1}{3.0,05} = 6,67 \text{ A}$$

La vitesse de déplacement retenue est $V_{dep} = 3,6 \text{ km/h}$, $k = \frac{\omega_{mot}}{\omega_{roue}}$, et $\omega_{roue} = \frac{V_{dep}}{R_t}$

$$\text{Donc } \omega_{mot} = \frac{k.V_{dep}}{R_t} \quad \text{A.N. } \omega_{mot} = \frac{32.3600}{0,1461.3600} = 219 \text{ rd/s}$$

$$\text{On peut alors en déduire la fréquence des signaux appliqués } f = \frac{p.\omega_m}{2.\pi} \quad \text{A.N. } f = \frac{4.219}{2.\pi} = 139,4 \text{ Hz}$$

$$\text{Or } E = K_E \omega_{mot} = K_E \frac{k.V_{dep}}{R_t} \quad \text{A.N. } E = K_E \omega_{mot} = 0,05 \frac{32.3600}{0,1461.3600} = 10,95 \text{ V}$$

$$\text{Enfin } V = \sqrt{(E + R.I)^2 + (2.\pi.f.L.I)^2} \quad \text{A.N. } V = \sqrt{(10,95 + 0,25.6,67)^2 + (10^{-4}.2.\pi.139,4.6,67)^2} = 12,63 \text{ V}$$

Question 14 Relever le courant efficace I en régime stabilisé à la fin de l'accélération et comparer sa valeur à celle de la question précédente, puis interpréter le phénomène qui a lieu entre les temps $t = 1 \text{ s}$ et $1,2 \text{ s}$ en observant notamment le zoom effectué sur une partie de la courbe. Identifier le bloc qui a permis de simuler ce phénomène dans le schéma de la figure 11.

On relève les différentes valeurs sur la figure 25 (p19) :

$$\text{En régime stabilisé (pour } 0,2 \text{ s} < t < 1 \text{ s}), \text{ on a } I_{max} = 9,5 \text{ A soit } I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{9,5}{\sqrt{2}} = 6,7 \text{ A (car signal sinusoïdal)}$$

Les valeurs obtenues par le calcul et la simulation sont semblables.

Aux instants $t = 1 \text{ s}$ puis $t = 1,2 \text{ s}$, il y a respectivement l'application d'un couple résistant et son retrait. La vitesse du moteur diminue (augmente) puis retrouve sa valeur initiale (présence dans le correcteur, d'une action Intégrale). Ce couple est introduit par le bloc Group 1 (couple résistant) sur la figure 11.

Question 15 Valider le choix du contrôleur sachant que la fréquence maximale du signal issu du codeur traitable par le contrôleur est de 500 kHz.

Le codeur dispose de 2048 impulsions par tour (512 points par tour et on utilise les fronts montants et descendants des deux voies).

La fréquence max est obtenue pour la vitesse max du moteur, $N_{m \max} = 3000 \text{ tr/mn}$

$$f = 2048 \frac{N_{m \max}}{60} = 102 \text{ kHz}$$

Valeur inférieure à celle traitable par le contrôleur.

II.2 - Étude de la boucle de courant

Objectif : Valider les performances de la boucle de courant.

Question 16 À partir des équations temporelles (II.1) et (II.2), déterminer les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$ du schéma bloc de la figure 14.

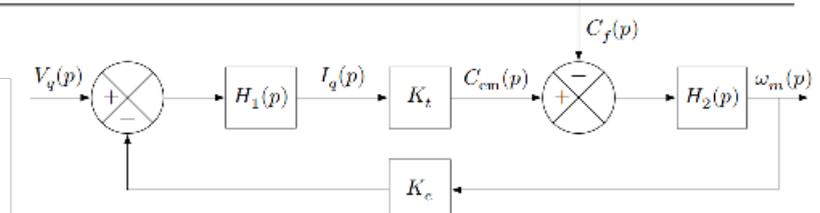


Figure 14 Schéma bloc de la machine

En utilisant la transformée de Laplace, les deux équations (II.1) et (II.2) deviennent :

$$V_q(p) = R_{eq}I_q(p) + L_{eq}pI_q(p) + K_e\omega_m(p) \quad (II.1)$$

$$C_{em}(p) = K_t I_q(p) = C_f(p) + J_{eq}p\omega_m(p) \quad (II.2)$$

De l'équation (II.1), on obtient $I_q(p) = \frac{1}{R_{eq} + L_{eq}p} (V_q(p) - K_e\omega_m(p))$ et par identification $H_1(p) = \frac{1}{R_{eq} + L_{eq}p}$.

De la même façon à l'aide de (II.2), $\omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} (C_{em}(p) - C_f(p))$ et ainsi $H_2(p) = \frac{1}{J_{eq}p}$

Question 17 En déduire la fonction de transfert $T(p) = \frac{I_q(p)}{V_q(p)}$ sous forme canonique dans le cas où $(p) = 0$.

Par lecture de la figure 14, on a : $I_q(p) = \frac{1}{R_{eq} + L_{eq}p} (V_q(p) - K_e\omega_m(p))$ et $\omega_m(p) = \frac{C_{em}(p)}{J_{eq}p} = \frac{K_t I_q(p)}{J_{eq}p}$ et donc :

$I_q(p) = \frac{1}{R_{eq} + L_{eq}p} (V_q(p) - K_e \frac{K_t I_q(p)}{J_{eq}p})$ soit $(R_{eq} + L_{eq}p)I_q(p) + K_e \frac{K_t I_q(p)}{J_{eq}p} = V_q(p)$. En simplifiant

$(J_{eq}p(R_{eq} + L_{eq}p) + K_e K_t)I_q(p) = J_{eq}pV_q(p)$ et on obtient : $\frac{I_q(p)}{V_q(p)} = \frac{J_{eq}p}{J_{eq}p(R_{eq} + L_{eq}p) + K_e K_t}$

Puis sous forme canonique : $T(p) = \frac{\frac{J_{eq}}{K_e K_t} p}{1 + \frac{J_{eq}R_{eq}}{K_e K_t} p + \frac{J_{eq}L_{eq}}{K_e K_t} p^2}$

Question 18 Déterminer l'erreur en régime permanent μ_∞ pour une consigne en échelon de courant d'amplitude 1 A. Déterminer la valeur de K_1 à choisir vis-à-vis des exigences de l'asservissement de courant en terme de précision données dans le tableau 5.

On donne $T(p) = \frac{K_0 \tau_0 p}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$ et $C_1(p) = K_1 \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$ et $\tau_i = \tau_m$

Il suffit de calculer $\varepsilon(p)$, et d'utiliser le théorème de la valeur finale ensuite pour obtenir μ_∞ pour une consigne en échelon de courant. Ainsi : $\varepsilon(p) = I_{qc}(p) - \varepsilon(p) \cdot T(p) \cdot C_1(p)$ donc $\varepsilon(p) = \frac{I_{qc}(p)}{1 + T(p) \cdot C_1(p)}$

$T(p) \cdot C_1(p) = \frac{K_0 \tau_0 p}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)} \cdot K_1 \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} = \frac{K_1 K_0 \tau_0}{\tau_i (1 + \tau_e p)}$ et ainsi $\varepsilon(p) = \frac{I_{qc}(p)}{1 + \frac{K_1 K_0 \tau_0}{\tau_i (1 + \tau_e p)}} = \frac{\tau_i (1 + \tau_e p)}{\tau_i + K_1 K_0 \tau_0 + \tau_i \tau_e p} I_{qc}(p)$

Pour le calcul de l'erreur, on utilise la formule rappelée dans le tableau 5, $\mu_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$ (l'erreur demandée est ici absolue et non relative). En outre $I_{qc}(p) = \frac{1}{p}$

$$\mu_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\tau_i (1 + \tau_e p)}{\tau_i + K_1 K_0 \tau_0 + \tau_i \tau_e p} I_{qc}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{\tau_i (1 + \tau_e p)}{\tau_i + K_1 K_0 \tau_0 + \tau_i \tau_e p} \right) \frac{1}{p} = \frac{\tau_i}{\tau_i + K_1 K_0 \tau_0}$$

Or, toujours selon le tableau 5, cette erreur doit rester inférieure 5% de la consigne appliquée. Donc on obtient l'équation suivante : $\mu_\infty \leq 0,05 \cdot 1A$

et $0,05 \cdot (\tau_i + K_1 K_0 \tau_0) \geq \tau_i$ soit $K_1 \geq \frac{\tau_i (1 - 0,05)}{0,05 K_0 \tau_0}$

A.N. : $K_1 \geq \frac{0,026 (1 - 0,05)}{0,05 \cdot 0,1} \quad K_1 \geq 4,94$

III - Modélisation dynamique de la base TC200

Objectif : Mettre en place un modèle de connaissance afin de pouvoir valider par simulation l'asservissement en vitesse de la base TC200.

III.1 - Commande particulière étudiée dans le cas de la translation

III.2 - Élaboration du modèle dynamique

III.2.a - Modélisation des efforts exercés par le sol sur les rouleaux

Question 19 En considérant que le rouleau i_1 est sans masse ni inertie, justifier que le torseur d'actions

mécaniques du sol sur le rouleau se simplifie sous la forme $\{F_{sol \rightarrow i_1}\} = \begin{Bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{Bmatrix}_{i_1, \vec{x}_{i_1}, \vec{y}_{i_1}, \vec{z}_1}$

- On isole le rouleau i_1 .
- Il est soumis à une liaison pivot parfaite, et au contact du sol sur le rouleau.
- En appliquant le théorème du moment dynamique en B_i (point situé sur l'axe de symétrie du galet) en projection sur \vec{x}_{i_1} , il vient (avec $J_{rouleau}=0$) : $\underbrace{J_{rouleau}}_0 \cdot \frac{d\beta_{i_1}}{dt} = r \cdot Y_i$

Le rayon étant non nul, la seule solution est $Y_i=0$, le torseur d'action mécanique du sol sur le rouleau se

simplifie bien en $\{F_{sol \rightarrow i_1}\} = \begin{Bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{Bmatrix}_{i_1, \vec{x}_{i_1}, \vec{y}_{i_1}, \vec{z}_1}$.

Question 20 En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique à la base TC200 (châssis + essieu avant + motorisations), notée S, de masse M, supposée en translation, déterminer les équations faisant intervenir les composantes tangentielles des actions mécaniques du sol sur les rouleaux, les paramètres du mouvement $V_x(t)$, $V_y(t)$ et leurs dérivées.

- On isole S
- Elle est soumise à : l'action de la pesanteur et des actions mécaniques du sol en I_1, I_2, I_3, I_4 .
- On applique le théorème de la résultante dynamique à la base TC200.

En projection dans le plan horizontal sur \vec{x}_1 et \vec{y}_1 , il vient :

$$\begin{cases} M \frac{dV_x(t)}{dt} = 2 \cdot T \cdot \cos(\alpha_{11}) + 2 \cdot T' \cdot \cos(\alpha_{21}) \\ M \frac{dV_y(t)}{dt} = 2 \cdot T \cdot \sin(\alpha_{11}) + 2 \cdot T' \cdot \sin(\alpha_{21}) \end{cases} \text{ soit, avec les valeurs des angles, } \begin{cases} M \frac{dV_x(t)}{dt} = \sqrt{2} \cdot T + \sqrt{2} \cdot T' \\ M \frac{dV_y(t)}{dt} = -\sqrt{2} \cdot T + \sqrt{2} \cdot T' \end{cases}$$

Question 21 En déduire les expressions de T et de T' en fonction de M, $V_x(t)$, $V_y(t)$ et leurs dérivées.

$$\begin{cases} T' = \frac{M}{2\sqrt{2}} \left(\frac{dV_x(t)}{dt} + \frac{dV_y(t)}{dt} \right) \\ T = \frac{M}{2\sqrt{2}} \left(\frac{dV_x(t)}{dt} - \frac{dV_y(t)}{dt} \right) \end{cases}$$

III.2.b - Équation du mouvement pour chaque motorisation

Question 22 Donner le nom du théorème à appliquer (à quel solide, en quel point et en projection selon quel axe) pour obtenir la relation (III.1). Exprimer le paramètre ρ_i en fonction de $r + R$ et de α_{i1} .

$$J_{roue} \frac{d\omega_{i0}(t)}{dt} = c_{ri}(t) + \rho_i T_i \quad (III.1)$$

- On isole l'ensemble (roue+rouleaux) :
- Il est soumis à l'action de la pesanteur, l'action de la liaison pivot supposée parfaite, l'action du sol sur le rouleau en I_i , le couple exercé par le réducteur sur la roue (autour de \vec{x}_1)
- On écrit le théorème du moment dynamique, appliqué à la roue (+rouleaux), en A_i , en projection sur \vec{x}_1

(pour le torseur d'action mécanique du sol sur le rouleau, on a : $\overrightarrow{M_{A_i, \text{sol} \rightarrow \text{rouleau}}} = \overrightarrow{M_{I_i, \text{sol} \rightarrow \text{rouleau}}} + \overrightarrow{A_i I_i} \wedge T_i \cdot \overrightarrow{x_{i1}}$
 $\overrightarrow{M_{A_i, \text{sol} \rightarrow \text{rouleau}}} = \vec{0} - (r + R) \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge T_i \cdot \overrightarrow{x_{i1}}$ soit $\overrightarrow{M_{A_i, \text{sol} \rightarrow \text{rouleau}}} = -(r + R) T_i \cdot \overrightarrow{y_{i1}}$

En projection sur $\overrightarrow{x_1}$, il vient :

$$J_{roue} \frac{d\omega_{i0}(t)}{dt} = c_{ri}(t) - (r + R) \cdot (-\sin(\alpha_{i1})) T_i \text{ soit } \boxed{\rho_i = (r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1})}$$

$$(J_m + J_{red}) \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) + c_{redi}(t) - C_{fi} \quad (III.2)$$

Question 23 En utilisant les relations (III.1) et (III.2), montrer que le modèle dynamique pour chaque motorisation s'écrit sous la forme de la relation (III.3). Exprimer les constantes δ_i et J en fonction des données. $J \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) + \delta_i T_i - C_{fi}$ (III.3)

Avec la relation $\omega_{i0}(t) = \frac{\omega_{mi}(t)}{k}$ et à partir de l'équation (III.1), on peut écrire :

$$\frac{J_{roue}}{k} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{ri}(t) + (r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i, \text{ on peut donc écrire } c_{ri}(t) = \frac{J_{roue}}{k} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} - (r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i,$$

Avec la relation $c_{redi}(t) = -\frac{c_{ri}(t)}{k}$, on peut écrire $c_{redi}(t) = -\frac{\frac{J_{roue}}{k} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} - (r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i}{k}$ soit

$$c_{redi}(t) = -\frac{J_{roue}}{k^2} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} + \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i}{k}$$

Et en remplaçant dans (III.2), il vient : $(J_m + J_{red}) \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) + -\frac{J_{roue}}{k^2} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} + \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i}{k} - C_{fi}$

$$\left(J_m + J_{red} + \frac{J_{roue}}{k^2} \right) \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) + \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1}) T_i}{k} - C_{fi}$$

Soit $J = \left(J_m + J_{red} + \frac{J_{roue}}{k^2} \right)$ et $\delta_i = \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{i1})}{k}$

Question 24 En utilisant les expressions obtenues à la question 21 et les relations (I.1), montrer que la relation (III.3) se met sous la forme de la relation (III.4). Expliciter la valeur de J_{eq} en fonction de J , M et des paramètres r , R et k . $J_{eq} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) - C_{fi}$ (III.4)

En dérivant les relations (I.1), il vient $\left\{ \begin{array}{l} (r + R) \frac{d\omega_{10}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt} - \frac{dV_y(t)}{dt} \\ (r + R) \frac{d\omega_{20}(t)}{dt} = -\left(\frac{dV_x(t)}{dt} + \frac{dV_y(t)}{dt} \right) \end{array} \right.$

Or, (Q 21) on a $\left\{ \begin{array}{l} T' = \frac{M}{2\sqrt{2}} \left(\frac{dV_x(t)}{dt} + \frac{dV_y(t)}{dt} \right) \\ T = \frac{M}{2\sqrt{2}} \left(\frac{dV_x(t)}{dt} - \frac{dV_y(t)}{dt} \right) \end{array} \right.$ soit $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dV_x(t)}{dt} + \frac{dV_y(t)}{dt} \right) = \frac{T' \cdot 2\sqrt{2}}{M} \\ \left(\frac{dV_x(t)}{dt} - \frac{dV_y(t)}{dt} \right) = \frac{T \cdot 2\sqrt{2}}{M} \end{array} \right.$

On obtient : $\left\{ \begin{array}{l} (r + R) \frac{d\omega_{10}(t)}{dt} = \frac{T \cdot 2\sqrt{2}}{M} \\ (r + R) \frac{d\omega_{20}(t)}{dt} = -\frac{T' \cdot 2\sqrt{2}}{M} \end{array} \right.$

On a aussi $\omega_{i0}(t) = \frac{\omega_{mi}(t)}{k}$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(r + R)}{k} \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} = \frac{T \cdot 2\sqrt{2}}{M} \\ \frac{(r + R)}{k} \frac{d\omega_{m2}(t)}{dt} = -\frac{T' \cdot 2\sqrt{2}}{M} \end{array} \right.$ soit encore $\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{M}{2\sqrt{2}} \frac{(r + R)}{k} \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} \\ T' = -\frac{M}{2\sqrt{2}} \frac{(r + R)}{k} \frac{d\omega_{m2}(t)}{dt} \end{array} \right.$

En multipliant par $\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{11})}{k} \\ \delta_2 = \frac{(r + R) \cdot \sin(\alpha_{21})}{k} \end{array} \right.$ on a : $\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \cdot T = -\frac{M}{4} \frac{(r + R)^2}{k^2} \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} \\ \delta_2 \cdot T' = -\frac{M}{4} \frac{(r + R)^2}{k^2} \frac{d\omega_{m2}(t)}{dt} \end{array} \right.$. Les 2 résultats sont de même signe, on

peut donc écrire $\delta_i \cdot T_i = -\frac{M}{4} \frac{(r + R)^2}{k^2} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt}$

En remplaçant le terme δ_i, T_i dans l'équation(III.3), on obtient :

$$J \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) + \frac{M(r+R)^2}{4k^2} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} - C_{fi}$$

Ce qui donne au final : $\left(J_m + J_{red} + \frac{J_{roue}}{k^2} + \frac{M(r+R)^2}{4k^2} \right) \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{emi}(t) - C_{fi}$ avec

$$J_{eq} = J_m + J_{red} + \frac{J_{roue}}{k^2} + \frac{M(r+R)^2}{4k^2} \text{ soit } J_{eq} = J + \frac{M(r+R)^2}{4k^2}$$

IV - Validation du suivi de trajectoire de la base TC200

Objectif : Valider l'asservissement de vitesse mis en place pour que la base TC200 se déplace suivant la trajectoire de consigne souhaitée.

IV.1 - Étude l'asservissement de vitesse d'un moteur

Objectif : Vérifier les exigences de la boucle de vitesse en termes de stabilité, précision et rapidité.

Exigence	Critère	Performance attendue
Précision	Erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{mc0}	$\mu_{v\infty} \leq 1\%$
	Erreur en vitesse en régime permanent $\Delta\omega_{\infty}$ pour une consigne en rampe telle que $\omega_{mc}(t) = at$	$\leq 100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour une pente de $1800 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$
Rapidité	Temps de réponse à 5%	$t_{5\%} \leq 180 \text{ ms}$
Stabilité	Dépassement maximal	$\leq 10\%$
	Marge de phase	$\geq 60^\circ$

Tableau 8 Exigences de la boucle de vitesse

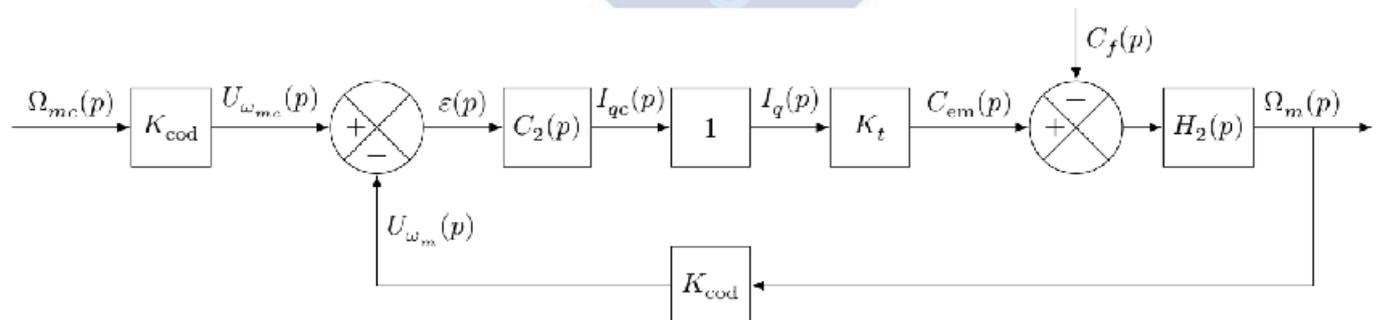


Figure 19 Schéma bloc de l'asservissement de vitesse

Question 25 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée, $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mc}(p)}$ pour $C_f(p) = 0$

Première méthode : $H_{BF}(p) = K_{cod} \frac{D(p)}{1+D(p).R(p)}$ avec $D(p) = C_2(p).K_t.H_2(p)$ et $R(p) = K_{cod}$

$$\text{Soit } H_{BF}(p) = K_{cod} \frac{K_2 \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_{eq} p}}{1 + K_2 \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_{eq} p} \cdot K_{cod}} = K_{cod} \frac{K_2 \cdot K_t}{J_{eq} \cdot p + K_2 \cdot K_t \cdot K_{cod}} = \frac{1}{1 + \frac{J_{eq}}{K_2 \cdot K_t \cdot K_{cod}} \cdot p}$$

Seconde méthode : On rentre K_{cod} dans la boucle et on obtient une boucle à retour unitaire.

$$FTBO(p) = C_2(p).K_t.H_2(p)K_{cod} \text{ et } FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{1}{1 + \frac{J_{eq}}{K_2 \cdot K_t \cdot K_{cod}} \cdot p}$$

Question 26 Justifier que cet asservissement est stable et donner la valeur de la marge de phase.

Cet asservissement est régi par une fonction de transfert d'ordre 1. Il est donc toujours stable. Le déphasage maximal est de -90° , donc la marge de phase est de 90° .

Question 27 Déterminer la condition sur K_2 afin de satisfaire l'exigence de rapidité du tableau 8.

Pour une fonction du premier ordre, le temps de réponse est égal à 3τ . Donc :

$$3 \frac{J_{eq}}{K_2 \cdot K_t \cdot K_{cod}} \leq 180 \text{ ms et ainsi } 3 \frac{J_{eq}}{0,18 \cdot K_t \cdot K_{cod}} \leq K_2, \text{ ou } K_2 \geq \frac{J_{eq}}{0,06 \cdot K_t \cdot K_{cod}}$$

$$\text{A.N. : } K_2 \geq \frac{0,0015}{0,06 \cdot 0,09 \cdot 0,2} \text{ soit } K_2 \geq 1,4 \text{ A/V}$$

Question 28 Calculer l'erreur relative en régime permanent $\mu_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en échelon de valeur ω_{mc0} .

Il y a la présence d'un intégrateur, donc l'erreur statique est nulle (erreur en réponse à une consigne de vitesse en échelon).

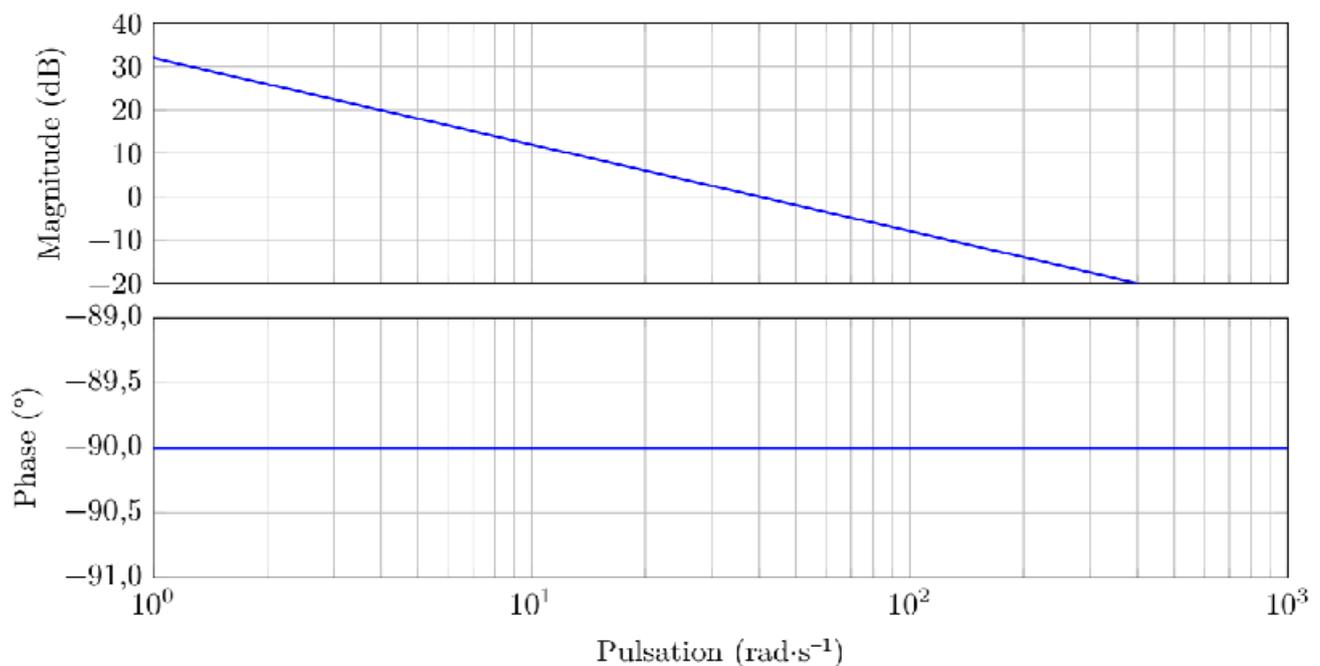


Figure 20 Diagrammes de Bode de la FTBO

Question 29 Identifier la valeur de K_2 qui a été réellement choisie par le constructeur.

Ce diagramme de Bode est celui de la fonction de transfert en boucle ouverte. Donc $H_{BO}(p) = D(p) \cdot R(p)$

$$\text{Soit } H_{BO}(p) = K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}$$

Pour le gain à 0 dB, la pulsation est égale à $\omega_{0dB} = \frac{K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t}{J_{eq}}$ donc $K_2 = \frac{J_{eq} \cdot \omega_{0dB}}{K_{cod} \cdot K_t}$ et $\omega_{0dB} = 40 \text{ rd/s}$ (figure 20)

$$\text{A.N. } K_2 = \frac{0,0015 \cdot 40}{0,2 \cdot 0,09} = 3,33 \text{ A/V}$$

Question 30 À partir de cette valeur, calculer l'erreur en vitesse en régime permanent $\Delta_{v\infty}$ pour une consigne de vitesse en rampe de pente a et valider le critère de précision des exigences du tableau 8.

L'erreur à calculer est celle entre $\Omega_{mc}(p)$ et $\Omega_m(p)$ et non seulement $\epsilon(p)$ visible sur la figure 19.

$$\text{Ainsi : } \Omega_{mc}(p) - \Omega_m(p) = \Omega_{mc}(p) - FTBF(p) \Omega_{mc}(p) = \Omega_{mc}(p) \left(1 - \frac{K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_{eq} p}}{1 + K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_{eq} p}} \right)$$

$$\text{et ainsi } \Omega_{mc}(p) - \Omega_m(p) = \Omega_{mc}(p) \left(\frac{J_{eq} p}{J_{eq} p + K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t} \right)$$

Pour le calcul de l'erreur, on utilise le théorème de la valeur finale avec $\Omega_{mc}(p) = \frac{a}{p^2}$:

$$\Delta_{\omega\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\Omega_{mc}(p) - \Omega_m(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{J_{eq} p}{J_{eq} p + K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t} \cdot \frac{a}{p^2} = \frac{J_{eq} a}{K_{cod} \cdot K_2 \cdot K_t}$$

$$\text{A.N. : } \Delta_{\omega\infty} = \frac{0,0015 \cdot 1800}{0,2 \cdot 3,33 \cdot 0,09} = 45 \text{ rd/s}$$

Dans le tableau 8, l'erreur dynamique doit être inférieure à 100 rad.s⁻¹ pour une pente de 1800 rad.s⁻². Au vu de notre calcul, ce critère est validé.

IV.2 - Validation des performances du suivi de trajectoire

Objectif : Analyser et commenter les performances du suivi de trajectoire de la base TC200.

Question 31 En se référant au tableau 6, proposer l'expression littérale de l'écart entre la trajectoire de consigne et la trajectoire réelle en fonction du temps, en faisant apparaître les paramètres $x_c(t)$, $y_c(t)$, $x(t)$ et $y(t)$. Une première simulation est réalisée sans perturbation, c'est-à-dire avec $C_f = 0$. La figure 22 représente alors l'écart simulé entre la trajectoire réelle et la trajectoire de consigne.

$$\text{Ecart : } e(t) = \sqrt{(x_c(t) - x(t))^2 + (y_c(t) - y(t))^2}$$

Question 32 Conclure quant au respect de l'exigence 1.1.1.

L'exigence est respectée car à chaque arrêt ($t=2,4 \text{ s}$; $t=4,8 \text{ s}$; $t > 9 \text{ s}$) l'écart est inférieur à 1 cm.

Question 33 Conclure quant au respect de l'exigence 1.1.1 dans ce cas. Proposer une solution technologique permettant de satisfaire l'exigence de précision de positionnement.

L'exigence n'est pas respectée car l'écart (à l'arrêt ou non) est constamment supérieur à 1 cm. Il faut diminuer les frottements (choisir des éléments technologique ayant peu de frottements pour réaliser les différentes liaisons pivot rouleau-roue et roue-châssis ? roulements à billes).

V - Conclusion

Question 34 Conclure vis-à-vis de l'étude menée sur l'utilisation et l'intérêt de la base TC200 dans l'application demandée. Expliquer également pourquoi une précision de positionnement de 1 cm de la base TC200 est suffisante pour le vissage de vis d'un diamètre variable de 0,4 à 2 cm.

Les trois degrés de liberté peuvent être contrôlés indépendamment ce qui permet de répondre à l'exigence d'évitement.

Le TC200 porte un bras robotisé visseur qui compense facilement l'erreur de positionnement de la base.